

تقدیم بہ تنہا
فرشتہ زندگی
مادر

مقدمه ناشر

زمین که دارد گرم می‌شود، هر روز یک جای دنیا یک بمبی می‌ترکد، در خاورمیانه تقریباً در اکثر کشورها جنگ هست، بعضی وقت‌ها هم یک آدمی پیدا می‌شود که مقداری از پول‌های ما را که احتمالاً فکر می‌کند به آن نیازی نداریم! بر می‌دارد و می‌رود یک جایی از دنیا تا کمی زندگی کند. کافی است اخبار را دنبال کنید از سایت‌ها یا کانال‌های داخلی و خارجی! یک سیل عظیمی از خبرهای بد برایتان دارند که هر کدام برای یک افسردگی حاد کافی هستند!

چرا واقعاً دنیا این جوریه؟!

این همه علم پیشرفت کرده، آدم‌ها رفته‌اند مریخ، هسته‌اتم را شکافته‌اند، از خودروهای پاک و انرژی‌های تجدیدپذیر استفاده می‌کنند، در مورد حقوق بشر ساعت‌ها داد سخن می‌رانند، روزانه صدها مقاله معتبر و کتاب‌های متعدد در باب خوبی و اخلاق و علم و نوع دوستی و ... منتشر می‌کنند ولی هنوز نتوانسته‌اند مثل آدم! با همدیگر زندگی کنند.

نمی‌خواستم ناراحتتان کنم. ولی این‌ها قسمت‌هایی از واقعیت‌های دور و برمان هستند. سعی کنید خیلی بهشان فکر نکنید، خبرهای بد را هم اصلاً دنبال نکنید چون طبق قانون جذب تجمع ناراحتی و افکار منفی باعث بروز بیشتر این‌ها می‌شود. 😊

فقط خبرهای خوب! ولی واقعیت‌ها را بدانید و ببینید که بعداً چه کاری می‌توانید برای دنیا انجام بدهید که جای بهتری برای زندگی باشد.

از هر فرصتی برای

همین جوری خوشحال بودن استفاده کن!

مقدمهٔ مولف

دنیای امروزی دائماً در حال تغییره. می‌گن اون‌هایی که می‌خوان ثابت بمونن و خودشونو با تغییرات وفق ندن، محکوم به شکستن! ما هم تصمیم گرفتیم خودمونو با تغییرات کنکور یه وفق اساسی بدیم و کتابمونو بکوبیم و از نو بسازیم.

دربارهٔ کتاب

- در هر فصل، ابتدا یک درس‌نامهٔ روان، ساده و کامل برایتان آورده‌ایم. سعی کردیم تمام مطالب مهم را به زبانی ساده برایتان توضیح دهیم. بعد از آن، تست‌های فصل را می‌بینید. روی چینش تست‌ها خیلی وقت گذاشتیم و در هر موضوع، آن‌ها را از آسان به سخت چیدیم. در آخر هم پاسخ‌نامهٔ فوق تشریحی برایتان آورده‌ایم، جوری که با خواندنش احساس کنید، معلم پیشنهاد است و برایتان توضیح می‌دهد.
- در بین تست‌ها، یک سری کامنت آورده‌ایم تا کمی مسیر حل را ساده‌تر کند و گوشه‌های لازم داده شود. مثل راهنمایی‌هایی که معلم‌ها سر کلاس در حین حل بعضی سؤالات می‌کنن.
- کتاب حاضر کاملاً منطبق با کتاب درسی و کنکورهای سراسری سال‌های اخیر است.
- اگر وقت کمی دارید، تست‌هایی که کنارشان آیکون 😊 آمده را حل کنید، هرچند توصیه می‌کنیم که همهٔ تست‌ها حل شوند! تست‌هایی که کنارشان علامت ⚠️ آمده، تست‌های سخت‌تری هستند و برای خفن‌تر شدن شما آن‌ها را آورده‌ایم.
- در آخر هر موضوع چند تست پرمحاسبه (مثل کنکورهای جدید) و چالشی آورده‌ایم. از آن‌ها عبور نکنید؛ حتماً باهاشون بجنگین!

تشکرها

- از دکتر کمیل نصری؛ مدیر و رفیق ۹ساله
- از دکتر سعید احمدپور؛ مرسی بابت اعتماد همیشگی
- از مهندس بقایی عزیز و سایر دوستانمان در واحد تولید
- از خانم لولوا مرادی عزیز که تمام زحمات هماهنگی‌های کتاب با ایشان بود.
- از دوستانم در خیلی‌سبز؛ ایمان سلیمان‌زاده، نوید شاهی و کوشا نشتایی
- از دو ویراستار عزیز کتاب؛ خانم‌ها زهرا فتحی و مریم نظری
- از خانوادهٔ عزیزم که خیلی دوستشون دارم ولی متأسفانه هیچ وقت پیششون نیستیم؛ منو ببخشید 😊

انتقاد و پیشنهاد

دوستانی که کتاب ما رو خوندن (چه دبیران عزیز، چه دانش‌آموزان عزیز) اگه هر نظری در مورد کتاب داشتین، خوشحال می‌شیم به ما هم بگین.

علی شهبازی

۱۰ خرداد ۱۴۰۲

فهرست

تست

درس نامه

۱۱	۷	درس ۱: معادله و مسائل توصیفی	فصل اول معادله درجه دوم
۲۳	۱۳	درس ۲: حل معادله درجه ۲ و کاربردها	
۳۴	۳۰	درس ۳: معادله‌های شامل عبارتهای گویا	
۴۳	۳۸	درس ۱: مفهوم تابع	فصل دوم تابع
۵۱	۴۵	درس ۲: ضابطه جبری تابع	
۶۳	۵۵	درس ۳: تابع خطی	
۸۰	۶۷	درس ۴: تابع درجه دو	
۹۴	۸۹	درس ۱: گردآوری داده‌ها	فصل سوم کار با داده‌های آماری
۱۰۴	۹۷	درس ۲: معیارهای گرایش به مرکز	
۱۱۸	۱۰۹	درس ۳: معیارهای پراکندگی	
۱۲۹	۱۲۳	درس ۱: نمودارهای تک‌متغیره	فصل چهارم نمایش داده‌ها
۱۴۰	۱۳۳	درس ۲: نمودارهای چندمتغیره	
۱۴۴			پاسخ‌نامه تشریحی
۲۱۵			پاسخ‌نامه کلیدی

درس سوم معادله‌های شامل عبارت‌های گویا



به معادله‌هایی که مجهول (یعنی x) در مخرج می‌آید، معادله گویا یا کسری می‌گویند. البته مجهول می‌تواند هم در مخرج باشد و هم در صورت، ولی حتماً در مخرج حداقل یکی از کسرها باید دیده شود. مثلاً معادله‌های $x = \frac{2}{x+1}$ و $\frac{9}{x-2} = \frac{x+3}{x-1} + \frac{12}{x^2-3x+2}$ ، معادله‌های گویا محسوب می‌شوند.

روش‌های حل معادله‌های گویا

برای حل معادله‌های گویا، سه‌تا روش بیان می‌کنیم. دو روش اول را روی معادله $\frac{x}{x-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{9}{x^2-1}$ انجام می‌دهیم.

از بین بردن مخرج‌ها

در این روش، سعی می‌کنیم طرفین تساوی را در عبارتی ضرب کنیم تا تمام مخرج‌ها از بین بروند و با یک معادله غیرکسری طرف باشیم.

$\frac{x}{x-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{9}{(x-1)(x+1)}$	مخرج‌ها را تا حد امکان تجزیه می‌کنیم.	مرحله ۱
مخرج مشترک بین $x-1$ ، $x+1$ و $(x-1)(x+1)$ می‌شود $(x-1)(x+1)$.	ک.م.م مخرج‌ها را حساب می‌کنیم. (همان مخرج مشترک)	مرحله ۲
$\cancel{(x-1)} \frac{x}{\cancel{x-1}} + \cancel{(x+1)} \frac{3}{\cancel{x+1}} = \frac{9}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}}$	همه کسرها را در ک.م.م مخرج‌ها ضرب می‌کنیم.	مرحله ۳
$(x+1)(x) + (x-1)(3) = 9 \Rightarrow x^2 + x + 3x - 3 = 9$ $\Rightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (x+6)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -6 \\ x_2 = 2 \end{cases}$	معادله جدید به دست آمده را حل می‌کنیم.	مرحله ۴
$x_1 = -6$ و $x_2 = 2$ مخرج کسره‌های معادله را صفر نمی‌کنند، پس هر دو قابل قبول اند.	جواب‌های به دست آمده در صورتی قابل قبول اند که مخرج هیچ کدام از کسرها را صفر نکنند.	مرحله ۵

مخرج مشترک‌گیری

در این روش تمام عبارت‌ها را به یک سمت می‌آوریم و بعد از مخرج مشترک‌گیری، صورت کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم. این روش، روشی است که کتاب درسی هم به آن اشاره کرده است.

$\frac{x}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{9}{x^2-1} = 0$	تمام عبارت‌ها را به سمت چپ تساوی می‌بریم تا در سمت راست آن فقط عدد صفر باقی بماند.	مرحله ۱
$\frac{x}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{9}{(x-1)(x+1)} = 0$	مخرج تمام کسرها را تجزیه می‌کنیم.	مرحله ۲
$\frac{x(x+1) + 3(x-1) - 9}{(x-1)(x+1)} = 0$	در سمت چپ با مخرج مشترک‌گیری، معادله را به شکل $\frac{A}{B} = 0$ درمی‌آوریم.	مرحله ۳
$x(x+1) + 3(x-1) - 9 = 0$ $\Rightarrow x^2 + x + 3x - 3 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 12 = 0$ $\Rightarrow (x+6)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -6 \\ x_2 = 2 \end{cases}$	یک کسر، زمانی صفر می‌شود که صورتش صفر باشد؛ پس صورت کسر مرحله قبل یعنی A باید صفر باشد.	مرحله ۴
هر دو جواب $x_1 = -6$ و $x_2 = 2$ قابل قبول اند.	از بین جواب‌های مرحله قبل، آن‌هایی را قبول می‌کنیم که مخرج کسر یعنی B را صفر نکنند.	مرحله ۵

ما در این کتاب اغلب از روش اول برای حل معادله‌ها استفاده می‌کنیم. **تذکره**

آزمون | جواب معادله $\frac{x+2}{x-1} + \frac{4-x}{x} = \frac{10}{x^2-x}$ کدام است؟

۱) -۱

۲) ۲

۳) -۳

۴) ۴

$$\frac{x+2}{x-1} + \frac{4-x}{x} = \frac{10}{x(x-1)}$$

پاسخ | مرحله ۱: اول مخرج کسرها را تجزیه می‌کنیم:

مرحله ۲: ک.م.م مخرج‌ها $x(x-1)$ می‌شود.

مرحله ۳: دو طرف را در $x(x-1)$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{x+2}{x-1} \cdot x(x-1) + \frac{4-x}{x} \cdot x(x-1) = \frac{10}{x(x-1)} \cdot x(x-1)$$

مرحله ۴: $(x+2)(x) + (4-x)(x-1) = 10 \Rightarrow x^2 + 2x + 4x - 4 - x^2 + x = 10 \Rightarrow 7x - 4 = 10 \Rightarrow 7x = 14 \Rightarrow x = \frac{14}{7} = 2$

مرحله ۵: چون $x = 2$ مخرج کسرها را صفر نمی‌کند، پس قابل قبول است.

آزمون | جواب‌های معادله $\frac{x+4}{x^2-1} + \frac{5}{x+3} = \frac{5x+5}{x^2+2x-3}$ چگونه است؟

۱) دو جواب مثبت

۲) فقط یک جواب مثبت

۳) یک جواب مثبت و یک جواب منفی

۴) جواب ندارد.

$$\frac{x+4}{x^2-1} + \frac{5}{x+3} = \frac{5x+5}{x^2+2x-3} \Rightarrow \frac{x+4}{(x-1)(x+1)} + \frac{5}{x+3} = \frac{5x+5}{(x-1)(x+3)}$$

پاسخ | مرحله ۱: مخرج‌ها را تجزیه می‌کنیم:

مزدوج $(x-1)(x+1)(x+3)$

جمله‌مشترک $(x-1)(x+1)(x+3)$

مرحله ۲: ک.م.م مخرج‌ها را حساب می‌کنیم:

مرحله ۳: دو طرف را در $(x-1)(x+1)(x+3)$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{(x+4)}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{(x+3)}{(x+3)} + \frac{5}{x+3} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(5x+5)}{(x-1)(x+3)} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)}$$

مرحله ۴: معادله را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$(x+3)(x+4) + 5(x-1)(x+1) = (x+1)(5x+5) \Rightarrow x^2 + 7x + 12 + 5(x^2 - 1) = 5x^2 + 5x + 5$$

مزدوج $(x+3)(x+4) + 5(x-1)(x+1)$

$$\Rightarrow x^2 + 7x + 12 + 5x^2 - 5 = 5x^2 + 5x + 5 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{جمله‌مشترک}} (x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \checkmark \\ x_2 = 1 \times \end{cases}$$

مرحله ۵: $x_2 = 1$ ریشه مخرج یکی از کسرها است، پس قابل قبول نیست و فقط $x_1 = 2$ قابل قبول است. در نتیجه معادله، فقط یک جواب مثبت دارد.

معادلات به فرم $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$

برای حل معادلات به فرم $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ ، عبارت روبه‌رو را در هم ضرب می‌کنیم و با هم برابر قرار می‌دهیم. اصطلاحاً به این کار، **طرفین وسطین** می‌گوییم.

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Rightarrow A \times D = B \times C$$

بعد معادله جدید را حل می‌کنیم.

پس یک بار مراحل حل معادلات گویا به فرم $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ را ببینیم:

مرحله ۱	طرفین وسطین می‌کنیم: $A \times D = B \times C$
مرحله ۲	معادله جدید را حل می‌کنیم.
مرحله ۳	چک می‌کنیم که جواب‌های به دست آمده، مخرج کسره‌های معادله اولیه را صفر نکنند.

آزمون | اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله $\frac{x+3}{x-5} = \frac{3x-1}{x-3}$ باشند، حاصل $x_1^2 + x_2^2$ کدام است؟ ($x_2 > x_1$)

۱) ۷

۲) ۸

۳) ۹

۴) ۱۰

$$\frac{x+3}{x-5} = \frac{3x-1}{x-3} \Rightarrow (x+3)(x-3) = (3x-1)(x-5)$$

پاسخ | مرحله ۱: طرفین وسطین می‌کنیم:

$$x^2 - 9 = 3x^2 - 15x - x + 5 \Rightarrow 2x^2 - 16x + 14 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 - 8x + 7 = 0$$

مرحله ۲: ساده می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\text{جمله‌مشترک}} (x-7)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 7 \end{cases}$$

با توجه به شرط $x_2 > x_1$ ، ریشه بزرگ‌تر را x_2 گذاشتیم.

مرحله ۳: جواب‌های به دست آمده، مخرج کسرها را صفر نمی‌کنند، پس قابل قبول‌اند.

$$x_1^2 + x_2^2 = 1^2 + 7^2 = 1 + 49 = 50$$

در نتیجه:

مجموع، حاصل ضرب و اختلاف ریشه‌ها در معادله گویا

جمع ریشه‌ها	ضرب ریشه‌ها	اختلاف ریشه‌ها
$S = \frac{-b}{a}$	$P = \frac{c}{a}$	$M = \frac{\sqrt{\Delta}}{ a }$

در بسیاری از سوالات مربوط به معادله گویا، در آخر از ما «مجموع ریشه‌ها» یا «حاصل ضرب ریشه‌ها» یا «اختلاف ریشه‌ها» یا ... خواسته می‌شود. ما به روشی که بلدیم معادله گویایمان را جلو می‌بریم. در آخر به یک معادله درجه دوم به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ می‌رسیم. با توجه به خواسته سؤال از همان روابطی که در معادله درجه دوم یاد گرفتیم، استفاده می‌کنیم:

آزمون | مجموع ریشه‌های معادله $\frac{x+3}{x-1} + \frac{2x}{x+1} = \frac{7-x}{x^2-1}$ کدام است؟

۱ (۱) -1 (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $-\frac{4}{3}$ (۴)

$$\frac{x+3}{x-1} + \frac{2x}{x+1} = \frac{7-x}{(x-1)(x+1)}$$

پاسخ | اول مخرج‌ها را تجزیه می‌کنیم:

دو طرف را در $(x-1)(x+1)$ ضرب می‌کنیم تا از شر مخرج‌ها خلاص شویم:

$$\frac{x+3}{x-1} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{2x}{x+1} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{7-x}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} \Rightarrow (x+3)(x+1) + 2x(x-1) = 7-x$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 3 + 2x^2 - 2x = 7 - x \Rightarrow 3x^2 + 2x + 3 = 7 - x \Rightarrow 3x^2 + 2x + 3 - 7 + x = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-3}{3} = -1$$

مجموع ریشه‌های معادله درجه دوم بالا برابر است با:

دقت کنید که ریشه‌های مخرج معادله اول یعنی $x = 1$ و $x = -1$ ، جواب‌های معادله $3x^2 + 3x - 4 = 0$ نیستند، پس جوابی حذف نمی‌شود.

مسائل معادلات گویا

بعضی وقت‌ها، معادله گویا را شسته و زفته به ما نمی‌دهند و باید با اطلاعاتی که سؤال در اختیارمان قرار می‌دهد، معادله را بنویسیم و آن را حل کنیم. معروف‌ترین تیپ‌های مسائل معادلات گویا را با هم بررسی می‌کنیم:

۱. اعداد زوج متوالی، اعداد فرد متوالی

از آن جایی که اعداد فرد متوالی (یا اعداد زوج متوالی)، $2n$ تا $2n+2$ با هم اختلاف دارند، پس اگر با دو عدد فرد متوالی کار داشتیم، آن‌ها را x ، $x+2$ و اگر با سه عدد فرد متوالی کار داشتیم آن‌ها را x ، $x+2$ و $x+4$ می‌گیریم. همین کار را برای اعداد زوج هم می‌توانیم بکنیم. حالا اگر معکوس دو عدد زوج (یا فرد) متوالی را می‌خواستیم، آن‌ها را $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{x+2}$ می‌گیریم.

آزمون | اختلاف معکوس دو عدد طبیعی زوج متوالی برابر با $\frac{1}{40}$ است. مجموع این دو عدد کدام است؟

۱۰ (۱) 14 (۲) 18 (۳) 22 (۴)

پاسخ | دو عدد زوج متوالی را x و $x+2$ می‌گیریم.

معکوس آن‌ها $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{x+2}$ می‌شود. دقت کنید چون x کوچک‌تر از $x+2$ است، پس $\frac{1}{x}$ از $\frac{1}{x+2}$ بزرگ‌تر است.

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{40}$$

اختلافشان $\frac{1}{40}$ است، پس:

$$40 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{(x+2)}{(x+2)} - 40 \cdot \frac{1}{x+2} \cdot \frac{(x+2)}{(x+2)} = \frac{1}{40} \cdot \frac{(x+2)}{(x+2)}$$

دو طرف را در $40x(x+2)$ ضرب می‌کنیم:

$$40(x+2) - 40x = x(x+2) \Rightarrow 40x + 80 - 40x = x^2 + 2x \Rightarrow x^2 + 2x - 80 = 0$$

معادله را ساده می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (x+10)(x-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -10 \quad * \text{ (طبیعی نیست)} \\ x_2 = 8 \quad \checkmark \end{cases}$$

پس دو عدد ما $\frac{1}{8}$ ، $\frac{1}{10}$ هستند که مجموعشان می‌شود $\frac{1}{8}$.

۲. کار مشترک

فرض کنید شخصی کاری را به تنهایی در A ساعت و شخص دیگری همان کار را به تنهایی در B ساعت انجام می‌دهد. حالا اگر هر دو با هم کار کنند، آن کار در C ساعت انجام می‌شود. ما دنبال رابطه بین A ، B و C هستیم. این جورری به داستان نگاه می‌کنیم:

- شخص اول در هر ساعت، $\frac{1}{A}$ کار را انجام می‌دهد.
- شخص دوم در هر ساعت، $\frac{1}{B}$ کار را انجام می‌دهد.

• اگر هم با هم کار کنند، در هر ساعت، $\frac{1}{C}$ کار انجام می‌شود.

پس مجموع $\frac{1}{A}$ و $\frac{1}{B}$ باید برابر با $\frac{1}{C}$ باشد:

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{C}$$

\downarrow
زمان انجام کار
توسط شخص اول
 \downarrow
زمان انجام کار
توسط شخص دوم
 \downarrow
زمان انجام کار
توسط هر دو نفر با هم

آزمون | علی کاری را به تنهایی در ۱۲ ساعت و رضا همان کار را به تنهایی در ۸ ساعت انجام می‌دهد. اگر هر دو با هم کار کنند، این کار در چند ساعت انجام می‌شود؟

(۱) $4/2$

(۲) $4/8$

(۳) $5/6$

(۴) $6/4$

پاسخ | از رابطه مقابل استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{\text{زمان انجام کار علی}} + \frac{1}{\text{زمان انجام کار رضا}} = \frac{1}{\text{زمان انجام کار علی و رضا با هم}}$$

معادله را می‌نویسیم:

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{1}{x} \xrightarrow[\text{در سمت چپ}]{\text{مخرج مشترک}} \frac{2}{24} + \frac{3}{24} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{5}{24} = \frac{1}{x}$$

دو طرف را معکوس می‌کنیم:

$$\frac{24}{5} = \frac{x}{1} \Rightarrow x = \frac{24}{5} = 4/8$$

پس وقتی علی و رضا با هم کار کنند، کل کار در $4/8$ ساعت انجام می‌شود.

مراحل حل سؤالات کار مشترک به صورت زیر است:

مرحله ۱	خواسته سؤال (زمان یکی از اشخاص) را x می‌گیریم.
مرحله ۲	زمان شخص دوم را برحسب x می‌نویسیم. (مثلاً اگر شخص دوم ۳ ساعت دیرتر انجام می‌دهد، زمانش را $x+3$ می‌گیریم.)
مرحله ۳	معادله روبه‌رو را تشکیل می‌دهیم:
مرحله ۴	معادله بالا را حل می‌کنیم.

آزمون | دو نقاش، یک ساختمان را با هم در ۱۲ روز رنگ می‌کنند. اگر هر کدام به تنهایی بخواهند این کار را انجام دهند، نقاش اول ۱۰ روز زودتر از نقاش دوم کار را انجام می‌دهد. نقاش دوم به تنهایی ساختمان را در چند روز رنگ می‌کند؟

(۱) ۲۵

(۲) ۳۰

(۳) ۳۲

(۴) ۲۰

پاسخ | ۱. خواسته سؤال یعنی تعداد روزهایی که نقاش دوم به تنهایی ساختمان را رنگ می‌کند، x می‌گیریم.

مرحله ۲: چون نقاش اول ۱۰ روز زودتر ساختمان را رنگ می‌کند، زمانش را $x-10$ می‌گیریم.

مرحله ۳: معادله را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{1}{\text{زمان نقاش اول}} + \frac{1}{\text{زمان نقاش دوم}} = \frac{1}{\text{زمان هر دو نقاش با هم}} \Rightarrow \frac{1}{x-10} + \frac{1}{x} = \frac{1}{12}$$

مرحله ۴: دو طرف را در $12x(x-10)$ ضرب می‌کنیم و معادله را حل می‌کنیم:

$$12x(x-10) \cdot \frac{1}{x-10} + 12x(x-10) \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{12} \cdot 12x(x-10) \Rightarrow 12x + 12(x-10) = x(x-10)$$

$$\Rightarrow 12x + 12x - 120 = x^2 - 10x \Rightarrow x^2 - 24x + 120 = 0 \xrightarrow[\text{ضرب جمع}]{\text{جمله مشترک}} (x-30)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 30 \checkmark \\ x = 4 \times \end{cases}$$

دقت کنید $x = 4$ قبول نیست، چون به ازای آن، زمان نفر اول یعنی $x-10$ می‌شود -6 روز!

چون خواسته سؤال را x گرفته بودیم، نیازی به کار دیگری نداریم و جواب 30 می‌شود.

نکته | در استخری، شیر اول، استخر را به تنهایی در A ساعت و شیر دوم، استخر را به تنهایی در B ساعت پر می‌کند. این استخر یک راه تخلیه آب هم دارد که اگر باز باشد، آب یک استخر پر را در C ساعت خالی می‌کند. در این صورت اگر شیرها باز و راه تخلیه هم باز باشد، کل استخر در D ساعت پر می‌شود که رابطه مقابل باید برقرار باشد:

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} - \frac{1}{C} = \frac{1}{D}$$

تذکره | اگر راه تخلیه وجود نداشته باشد، رابطه بالا به صورت $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{D}$ درمی‌آید.

آزمون | در یک استخر، دو شیر وجود دارد که اولی به تنهایی استخر را در ۶ ساعت و دومی در ۸ ساعت پر می‌کند. یک دریچه خروج آب هم دارد که آب یک استخر پر را وقتی شیرها بسته باشند، در ۱۶ ساعت خالی می‌کند. اگر هر دو شیر و دریچه باز باشند، استخر در چند ساعت پر می‌شود؟

(۱) $4/5$

(۲) $4/8$

(۳) $24/5$

(۴) $48/11$

پاسخ ۱) باید مقادیر $A = 6$ ، $B = 8$ و $C = 16$ را در رابطه گفته شده قرار دهیم:

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} - \frac{1}{C} = \frac{1}{D} \Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{D} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{8}{48} + \frac{6}{48} - \frac{3}{48} = \frac{1}{D}$$

$$\frac{8+6-3}{48} = \frac{1}{D} \Rightarrow \frac{11}{48} = \frac{1}{D} \xrightarrow{\text{معکوس}} D = \frac{48}{11}$$

۳. تقسیم کردن بین چند نفر (سهام بندی)

در این مسائل، تعدادی پول یا یک خوراکی مثل کیک را ابتدا بین چند نفر به طور یکسان تقسیم می کنند؛ بعد تعدادی به افراد اولیه اضافه یا از آن ها کم می شود و این کار مجدداً انجام می شود. در این صورت سهم هر نفر در دو حالت متفاوت می شود. با توجه به اختلاف بین سهم ها در دو حالت، باید تعداد نفرات را حساب کنیم. مراحل حل این سؤالات به صورت زیر است:

مرحله ۱	تعداد نفرات اولیه را X و تعداد نفرات ثانویه را $x + n$ (یا $x - n$) می گیریم.
مرحله ۲	در هر دو حالت، سهم هر نفر را حساب می کنیم: $\text{سهم اولیه} = \frac{\text{مقدار پول (یا تعداد خوراکی)}}{\text{تعداد نفرات اولیه}}$ $\text{سهم ثانویه} = \frac{\text{مقدار پول (یا تعداد خوراکی)}}{\text{تعداد نفرات ثانویه}}$
مرحله ۳	اختلاف سهم در هر دو حالت را با عددی که سؤال داده، برابر قرار می دهیم: سهم ثانویه - سهم اولیه = عدد ↓ سؤال داده
مرحله ۴	معادله گویای به دست آمده را حل می کنیم.

آ تست ۱) یک کیک را بین چند نفر تقسیم کرده ایم و به هر یک مقدار مساوی رسیده است، سپس ۲ نفر دیگر به جمع اضافه شد و دوباره کیک را

بین آن ها تقسیم کردیم. در این مرحله به هر نفر به اندازه $\frac{1}{24}$ کم تر رسید. در ابتدا این جمع چند نفر بوده است؟

- ۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ ۱) مرحله ۱: فرض کنیم در ابتدا جمع X نفره بوده. وقتی دو نفر به جمع اضافه می شوند، تعداد به $X + 2$ می رسد.

مرحله ۲: در حالت اول سهم هر نفر $\frac{1}{X}$ و در حالت دوم سهم هر نفر $\frac{1}{X+2}$ می شود.

مرحله ۳: طبق گفته سؤال $\frac{1}{X}$ از $\frac{1}{X+2}$ به اندازه $\frac{1}{24}$ بیشتر است، پس:

مرحله ۴: دو طرف معادله را در $24X(X+2)$ ضرب می کنیم:

$$\frac{1}{X} \cdot 24X(X+2) - \frac{1}{X+2} \cdot 24X(X+2) = \frac{1}{24} \cdot 24X(X+2)$$

$$\Rightarrow 24(X+2) - 24X = X(X+2) \Rightarrow 24X + 48 - 24X = X^2 + 2X \Rightarrow X^2 + 2X - 48 = 0$$

به کمک اتحاد جمله مشترک سمت چپ تساوی را تجزیه می کنیم:

$$(X+8)(X-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} X = -8 & * \text{ (تعداد نمی تواند منفی باشد.)} \\ X = 6 & \checkmark \end{cases}$$

پس در ابتدا این جمع ۶ نفر بوده است.

پرسش های چهار گزینه ای

معادله گویا

۱۲۴- جواب های معادله $\frac{x+1}{3x-3} = \frac{3}{x-1}$ کدام است؟

- ۱) ۲ و ۴ ۲) ۲ و -۴ ۳) -۲ و ۴ ۴) -۴ و -۲

۱۲۵- جواب معادله $\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{1}{10}$ بین کدام دو عدد طبیعی متوالی قرار دارد؟

- ۱) ۶ و ۷ ۲) ۷ و ۸ ۳) ۸ و ۹ ۴) ۹ و ۱۰



(سراسری ۹۲)

۱۲۶- در معادله $2x = \frac{x^2}{x-4} - \frac{2x+8}{x-4}$ ، تفاضل معکوس جواب از خود جواب، کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{7}{4}$ (۴) $\frac{5}{2}$

(سراسری ۹۶)

۱۲۷- در معادله $x + \frac{2x-1}{x-4} = -2$ ، ریشه‌ها چگونه‌اند؟

- (۱) فقط یک جواب قابل قبول (۲) دو جواب وارون هم (۳) دو جواب مساوی هم (۴) دو جواب قرینه هم

(سراسری ۹۵)

۱۲۸- ریشه‌های معادله $0 = \frac{x-6}{x-2} - \frac{x-6}{x-2} + 2x$ چگونه‌اند؟

- (۱) یک جواب مورد قبول (۲) دو جواب مساوی (۳) دو جواب قرینه (۴) دو جواب وارون هم

(کتاب درسی)

۱۲۹- حاصل ضرب ریشه‌های معادله $1 - \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1}{x-1} - 3$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۳

۱۳۰- جواب‌های معادله $\frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4} = \frac{x^2-6x+5}{x^2-x-20}$ چگونه است؟

- (۱) یک جواب مثبت و یک جواب منفی (۲) فقط یک جواب مثبت (۳) دو جواب مثبت (۴) فقط یک جواب منفی

۱۳۱- جواب‌های معادله $4 = \frac{2x+1}{x-3} - \frac{x+4}{x+1}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ و ۵ (۲) $\frac{-5}{3}$ و ۴ (۳) $\frac{-5}{3}$ و ۵ (۴) $\frac{4}{3}$ و ۴

(سراسری ۹۹)

۱۳۲- مجموع ریشه‌های معادله $\frac{2}{3} = \frac{2x-1}{x+2} - \frac{x-3}{x-2}$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۱۲

۱۳۳- نسبت ریشه‌های معادله $\frac{4x}{8x^2-2x-3} = \frac{1}{4x-3} + \frac{x}{2x+1}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

اگر صورت و مخرج یک کسر با هم ساده می‌شوند، اول این کار را بکنید و بعد معادله را حل کنید.

۱۳۴- اختلاف جواب‌های معادله $6 = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} + \frac{x+7}{x+2}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۳۵- جواب معادله $20 = \frac{2x^3+22x^2+36x}{x^3-7x^2-18x}$ کدام است؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

۱۳۶- اختلاف جواب‌های معادله $\frac{4x^2-9}{2x^2+3x} = \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) $2\sqrt{3}$

۱۳۷- نسبت جواب بزرگ‌تر به کوچک‌تر معادله $\frac{x^2+1}{x^4-1} + \frac{8}{x+1} = \frac{x+1}{x-1}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۴ (۴) -۴

جواب معادله در آن صدق می‌کند.

(کتاب درسی)

۱۳۸- به ازای کدام مقادیر a، معادله $\frac{x+1}{x+a} = \frac{a}{x}$ دارای جواب $x=1$ است؟

- (۱) ۱ و ۲ (۲) -۲ و ۱ (۳) ۱ و ۲ (۴) -۲ و -۱

(سراسری مجدد ۱۴۰۱)

۱۳۹- به ازای چند مقدار k، جواب معادله $\frac{5-t}{3+2t} = \frac{7t+1}{k^2-(2t+1)^2}$ برابر ۴ است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ مقداری از k

(خارج ۱۴۰۱)

۱۴۰- به ازای چند مقدار m، $x=2$ جواب معادله $\frac{x+1}{x-3} - \frac{2}{x} = \frac{2m^2}{x(x-3)}$ است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ مقداری از m

(خارج ۹۸)

۱۴۱- به ازای کدام مقدار a، معادله $\frac{f}{a-2x} + \frac{a}{x+1} = \frac{a}{x}$ ، دارای جواب $x=1$ است؟

- (۱) -۴، ۲ (۲) -۲، ۴ (۳) ۲، ۴ (۴) -۲، ۳

(سراسری ۹۸)

۱۴۲- به ازای کدام مقدار a، معادله $1 - \frac{x-2}{ax-5} = \frac{a+2}{x-1}$ ، دارای جواب $x=3$ است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ ، -۲ (۲) $-\frac{1}{3}$ ، ۲ (۳) $-\frac{2}{3}$ ، ۱ (۴) $\frac{2}{3}$ ، ۱

⊖ اگر بحث روی مجموع حاصل ضرب یا اختلاف ریشه‌ها شد، باید معادله گویا را به یک معادله درجه دوم تبدیل کنید و از روابط $P = \frac{c}{a}$ ، $S = \frac{-b}{a}$ و $M = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ استفاده کنید.

⊖ ۱۴۳- در معادله $\frac{x}{x-2} + \frac{1}{x} = 3$ ، حاصل ضرب ریشه‌ها کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) ۱ (۴) ۲

(خارج ۹۶)

⊖ ۱۴۴- ریشه‌های معادله $\frac{x^2+1}{x+4} - \frac{11x-1}{x+4} + x = 0$ چگونه‌اند؟

- (۱) یک جواب مورد قبول (۲) دو جواب مساوی (۳) دو جواب قرینه (۴) دو جواب وارون هم

(خارج ۹۹)

⊖ ۱۴۵- قدر مطلق تفاضل ریشه‌های معادله $\frac{x-3}{x-4} + \frac{1}{2x-2} = \frac{2}{3}$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) ۵ (۴) $\frac{5}{5}$

(سراسری ۱۴۰۱)

⊖ ۱۴۶- حاصل ضرب ریشه‌های معادله $\frac{x}{x-2} - \frac{3}{x+3} = 2$ کدام است؟

- (۱) -۱۸ (۲) $-\frac{6}{5}$ (۳) -۳ (۴) $-\frac{1}{5}$

(سراسری ۱۴۰۰)

⊖ ۱۴۷- اگر عبارتهای گویا تعریف شده باشند، مجموع جواب‌های معادله $\frac{4x^2 - (2-x)^2}{x+2} - \frac{7}{x} = 2$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{7}{3}$

(خارج ۱۴۰۰)

⊖ ۱۴۸- اگر عبارتهای گویا تعریف شده باشند، قدر مطلق تفاضل جواب‌های معادله $\frac{9x^2 - (x+3)^2}{2x-3} - \frac{2}{x} = 1$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{3}{2}$

⊖ ۱۴۹- مجموع معکوس ریشه‌های معادله $\frac{2}{x^2-4} + \frac{x}{x+2} = \frac{10}{x-2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

⊖ ۱۵۰- به ازای کدام مقدار m ، ریشه‌های معادله $\frac{x}{x-1} + \frac{m}{x+2} = \frac{1}{2}$ ، وارون یکدیگرند؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

⊖ ۱۵۱- مجموع ریشه‌های معادله $\frac{2x^2+1}{x^2-x} = \frac{m}{x-1} + \frac{x+6}{x}$ برابر با ۹ است. m کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) ۱۴ (۴) -۱۴

⊖ در معادله درجه دوم، اگر « $\Delta > 0$ » بود، دو ریشه حقیقی متمایز، اگر « $\Delta = 0$ » بود، یک ریشه مضاعف و اگر « $\Delta < 0$ » بود، ریشه حقیقی نداشتیم.

(کتاب درسی)

⊖ ۱۵۲- تعداد جواب‌های حقیقی معادله $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} = \frac{4}{x-2}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

⊖ ۱۵۳- به ازای چه مقادیری از a ، معادله $\frac{2x-a}{x^2+2} = \frac{-1}{3}$ ، دارای دو ریشه حقیقی متمایز است؟

- (۱) $a > \frac{7}{3}$ (۲) $a < \frac{11}{3}$ (۳) $a > \frac{-7}{3}$ (۴) $a < \frac{-11}{3}$

(سراسری ۱۴۰۰)

⊖ ۱۵۴- معادله $\frac{ax^2+2x}{x+1} = x^2-x$ ، دارای سه ریشه حقیقی متمایز است. کدام نامساوی زیر همواره برقرار است؟

- (۱) $a < -2$ (۲) $a \geq -2$ (۳) $a \leq 1$ (۴) $a < 1$

⊖ ۱۵۵- معادله $\frac{m}{x^2-6x+5} = \frac{2x}{x-5} - \frac{x+1}{x-1}$ فقط یک ریشه حقیقی دارد. بزرگ‌ترین مقدار m کدام است؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۳۶ (۳) ۴۰ (۴) ۹

مسائل معادلات گویا

⊖ ۱۵۶- ربع عددی با معکوس ۹ برابر آن عدد برابر است. اختلاف مقادیر ممکن برای این عدد کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) ۶

⊖ ۱۵۷- دو برابر معکوس عددی مثبت از نصف آن عدد سه واحد بیشتر است. این عدد کدام است؟

- (۱) $\sqrt{13}-3$ (۲) $\sqrt{13}+3$ (۳) $\sqrt{11}-1$ (۴) $\sqrt{11}+1$

⊖ دو عدد زوج متوالی $x+2$ و $x+4$ بگیرد.

(کتاب درسی)

⊖ ۱۵۸- مجموع معکوس دو عدد زوج طبیعی متوالی برابر $\frac{5}{11}$ است. عدد کوچک‌تر کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰

۱۵۹- پنج عدد زوج طبیعی متوالی داریم. اگر مجموع معکوس عدد کوچک‌تر و بزرگ‌تر با $\frac{1}{10}$ عدد وسطی برابر باشد، مجموع این اعداد کدام است؟

- ۳۰ (۱) ۴۰ (۲) ۵۰ (۳) ۶۰ (۴)

در مسائل کار مشترک، رابطه $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{C}$ فراموش نشود.

۱۶۰- علی کاری را به تنهایی در ۲۰ ساعت و ایمان به تنهایی همان کار را در ۴۰ ساعت انجام می‌دهد. اگر هر دو با هم این کار را انجام دهند، کل کار در

چند ساعت انجام می‌شود؟

- ۱۲ (۱) ۱۳/۳ (۲) ۱۵/۶ (۳) ۱۶/۳ (۴)

۱۶۱- دو کارگر کاری را با هم در ۶ روز انجام می‌دهند. اگر هر دو کارگر به تنهایی بخواهند کل کار را انجام دهند، کارگر اول ۵ روز زودتر از کارگر دوم کل

کار را تمام می‌کند. کارگر دوم به تنهایی کار را چند روزه تمام می‌کند؟

- ۱۰ (۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۲۰ (۴)

۱۶۲- دو شیر A و B به یک استخر متصل‌اند. شیر A استخر را در ثلث مدت‌زمانی که شیر B استخر را پر می‌کند، می‌تواند پر کند. اگر دو شیر را با هم باز

کنیم، استخر در ۱۵ ساعت پر می‌شود. اگر شیر A به تنهایی باز باشد، استخر در چند ساعت پر می‌شود؟

- ۱۸ (۱) ۲۰ (۲) ۲۴ (۳) ۳۰ (۴)

۱۶۳- آیدا و ندا کاری را با هم در ۲۱ روز انجام می‌دهند. اگر هر کدام به تنهایی این کار را انجام دهند، آیدا ۴۰ روز زودتر از ندا کار را انجام می‌دهد. ندا این

کار را به تنهایی در چند روز انجام می‌دهد؟

- ۶۰ (۱) ۶۴ (۲) ۷۰ (۳) ۷۲ (۴)

۱۶۴- ۱۸۰۰۰ دلار را بین چند نفر به طور یکسان تقسیم می‌کنیم. اگر به این جمع، ۳ نفر اضافه شوند و مجدد این کار را انجام دهیم، به هر نفر ۵۰۰ دلار نسبت

به حالت قبل کم‌تر می‌رسد. تعداد نفرات اولیه کدام است؟

- ۹ (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴)

۱۶۵- گلدانی نقره‌ای داریم که نسبت وزن نقره خالص به وزن مس خالص آن برابر با ۶ است. استاد قلم‌کار آن را ذوب و ۲۰۰ گرم مس به آن اضافه کرد و

(کتاب درسی)

گلدان جدیدی ساخت. اگر ۸۰ درصد وزن گلدان جدید، نقره باشد، این گلدان قبل از ذوب‌شدن چند گرم وزن داشته است؟

- ۲۴۰۰ (۱) ۲۸۰۰ (۲) ۳۲۰۰ (۳) ۳۶۰۰ (۴)

۱۶۶- یک محلول آب‌نمک ۲۵۰ کیلوگرمی با غلظت ۴ درصد داریم. ۹ کیلو نمک به آن اضافه می‌کنیم، چه قدر از آب آن را بخار کنیم تا غلظت محلول به ۱۰

درصد برسد؟

- ۵۴ (۱) ۵۹ (۲) ۶۴ (۳) ۶۹ (۴)

۱۶۷- در مستطیلی یکی از اضلاع، مربع ضلع عمود بر خود است. اگر نسبت عدد مساحت به عدد محیط آن ۴ باشد، عرض آن کدام است؟

- ۸ + $\sqrt{6}$ (۱) ۶ + $\sqrt{6}$ (۲) ۴ + ۳ $\sqrt{6}$ (۳) ۴ + ۲ $\sqrt{6}$ (۴)

۱۲۶. گزینه ۲) مخرج‌ها برابر است، پس مشکلی نیست!

$$\frac{x^2}{x-4} - \frac{2x+8}{x-4} = 2x \Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 8}{x-4} = 2x$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2x(x-4) = x^2 - 2x - 8$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 8x = x^2 - 2x - 8 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه با جمله مشترک}} (x-2)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \checkmark \\ x_2 = 4 \times \end{cases}$$

$x = 4$ مخرج کسرهای معادله اولیه را صفر می‌کند، پس قابل قبول نیست و تنها جواب معادله $x = 2$ است. تفاضل معکوس جواب (یعنی $\frac{1}{2}$) از خود جواب (یعنی ۲) برابر است با:

$$2 - \frac{1}{2} = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$$

۱۲۷. گزینه ۴) دو طرف معادله را در $x-4$ ضرب می‌کنیم:

$$x(x-4) + \frac{2x-1}{x-4} (x-4) = -2(x-4)$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 2x - 1 = -2x + 8$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 1 = -2x + 8 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

دو جواب به دست آمده قرینه هم‌اند. (البته هر دو قابل قبول هم هستند!)
۱۲۸. گزینه ۱) برای حل این معادله، اول باید از شر مخرج‌ها خلاص شویم.

کافی است طرفین را در $(x-2)$ ضرب کنیم:

$$2x + \frac{x^2 - 4x}{x-2} - \frac{x-6}{x-2} = 0$$

$$\xrightarrow{\times(x-2)} 2x(x-2) + \frac{x^2 - 4x}{x-2} (x-2) - \frac{x-6}{x-2} (x-2) = 0$$

$$= 0 \Rightarrow 2x(x-2) + (x^2 - 4x) - (x-6) = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 4x + x^2 - 4x - x + 6 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 9x + 6 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 3} x^2 - 3x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه با اتحاد جمله مشترک}} (x-1)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \checkmark \\ x = 2 \times \end{cases}$$

چون $x = 2$ مخرج کسرهای صفر می‌کند؛ پس قابل قبول نیست و تنها جواب معادله، $x = 1$ است.

۱۲۹. گزینه ۱) همه عبارتها را به سمت راست تساوی می‌بریم تا معادله به

$$\text{شکل } \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} - 4 = 0 \text{ درآید.}$$

حالا کافیست دو طرف تساوی را در $(x-1)(x+1)$ ضرب کنیم:

$$\frac{x+1}{x-1} (x-1)(x+1) + \frac{x-1}{x+1} (x-1)(x+1) - 4(x-1)(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + (x-1)^2 - 4(x^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1 - 4x^2 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow -2x^2 + 6 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها: } \sqrt{3} \times (-\sqrt{3}) = -3$$

۱۳۰. گزینه ۲) اول مخرج کسرهای را تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4} = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x-5)(x+4)}$$

مساحت قسمت رنگی از مساحت مربع $18 + 6\pi$ واحد مربع بیشتر است، پس:

$$S_{\text{مربع رنگی}} - S_{\text{مربع}} = 18 + 6\pi \Rightarrow \pi x^2 + 12x^2 - 9x^2 = 18 + 6\pi$$

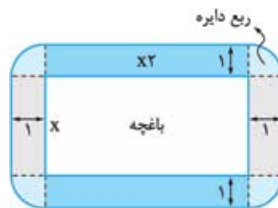
$$\Rightarrow \underbrace{\pi x^2 + 3x^2}_{\text{فاکتوراز } x^2} = \underbrace{18 + 6\pi}_{\text{فاکتوراز ۶}} \Rightarrow (\pi + 3)x^2 = 6(3 + \pi)$$

$$\Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \sqrt{6}$$

ضلع مربع را $3x$ گرفته بودیم که می‌شود $3\sqrt{6}$.

حالا قطر مربع را پیدا می‌کنیم:

$$\text{قطر} = \text{ضلع} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{6} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{12} = 3(2\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$$



۱۲۳. گزینه ۲) برای سؤال

شکل می‌کشیم:

• مساحت قسمت محصورشده

(رنگی) را حساب می‌کنیم:

$$S_{\text{رنگی}} = S_{\text{مستطیل پایین}} + S_{\text{مستطیل بالا}}$$

$$+ S_{\text{دایره}} \times 4 + S_{\text{مستطیل چپ}} + S_{\text{مستطیل راست}}$$

$$= (2x)(1) + (2x)(1) + (x)(1) + (x)(1) + \pi(1)^2$$

$$= 2x + 2x + x + x + \pi = 6x + \pi$$

• مساحت باغچه هم برابر با $2x(x) = (2x)(x)$ است.

• مساحت قسمت رنگی، $1 + \frac{\pi}{18}$ برابر مساحت باغچه است، پس:

$$S_{\text{رنگی}} = (1 + \frac{\pi}{18})S_{\text{باغچه}} \Rightarrow 6x + \pi = (1 + \frac{\pi}{18})2x^2$$

$$\Rightarrow 6x + \pi = 2x^2 + \frac{x^2}{9}\pi$$

سعی کنیم ضریب π را در دو طرف یکسان کنیم.

ضریب π در سمت راست و چپ به ترتیب $\frac{x^2}{9}$ و ۱ است:

$$\frac{x^2}{9} = 1 \Rightarrow x^2 = 9 \xrightarrow{x > 0} x = 3$$

به ازای $x = 3$ ، تساوی $6x + \pi = 2x^2 + \frac{x^2}{9}\pi$ هم برقرار است؛ پس $x = 3$

جواب است. در نتیجه طول که $2x$ بود برابر با ۶ می‌شود.

۱۲۴. گزینه ۱) طرفین وسطین می‌کنیم:

$$\frac{x+1}{2x-3} = \frac{3}{x-1} \Rightarrow \underbrace{(x+1)(x-1)}_{\text{مزدوج}} = 3(2x-3) \Rightarrow x^2 - 1 = 6x - 9$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (x-2)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

۱۲۵. گزینه ۳) دو طرف را در $3 \times x$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{1}{10} \xrightarrow{\times(30x)} 30 \times \frac{1}{2x} + 30 \times \frac{1}{3x} = 30 \times \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{30}{2} + \frac{30}{3} = 3x \Rightarrow 15 + 10 = 3x$$

$$\Rightarrow 25 = 3x \Rightarrow x = \frac{25}{3} = 8 \frac{1}{3}$$

پس x بین ۸ و ۹ است.

۱۳۳. گزینه ۳ ضرب $2x+1$ و $4x-3$ به احتمال زیاد $8x^2-2x-3$ می‌شود که اگر چک کنیم، می‌بینیم همان می‌شود! مخرج تمام کسرها را تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{x}{2x+1} + \frac{1}{4x-3} = \frac{4x}{(2x+1)(4x-3)}$$

همه کسرها را در $(2x+1)(4x-3)$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{x}{2x+1} \cdot \frac{(2x+1)(4x-3)}{(2x+1)(4x-3)} + \frac{1}{4x-3} \cdot \frac{(2x+1)(4x-3)}{(2x+1)(4x-3)}$$

$$= \frac{4x}{(2x+1)(4x-3)} \cdot \frac{(2x+1)(4x-3)}{(2x+1)(4x-3)}$$

$$\Rightarrow x(4x-3) + 1(2x+1) = 4x$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 3x + 2x + 1 = 4x \Rightarrow 4x^2 - 5x + 1 = 0$$

در معادله بالا، رابطه $a+b+c=0$ بین ضرایب برقرار است، پس ریشه‌های معادله 1 و $X_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{4}$ هستند.

نسبت X_1 به X_2 برابر است با: $\frac{X_1}{X_2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$

۱۳۴. گزینه ۳ صورت و مخرج کسر سمت چپ را تجزیه و ساده می‌کنیم:

$$\frac{x^2-1}{x^2-2x+2} + \frac{x+7}{x+2} = 6 \Rightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} + \frac{x+7}{x+2} = 6$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x-2} + \frac{x+7}{x+2} = 6$$

دو طرف را در $(x-2)(x+2)$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{x+1}{x-2} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)} + \frac{x+7}{x+2} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= 6(x-2)(x+2) \Rightarrow (x+1)(x+2) + (x+7)(x-2)$$

$$= 6(x-2)(x+2) \Rightarrow x^2 + 3x + 2 + x^2 + 5x - 14 = 6x^2 - 24$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 8x - 12 = 0 \xrightarrow{:4} x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 3 \checkmark \\ X_2 = -1 \checkmark \end{cases}$$

چون مخرج را صفر نمی‌کنند، هر دو قابل قبول اند. اختلافشان برابر است با: $X_1 - X_2 = 3 - (-1) = 4$

۱۳۵. گزینه ۱ در صورت از $2x$ و در مخرج از x فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{2x^2 + 22x^2 + 36x}{x^2 - 7x^2 - 18x} = 20 \Rightarrow \frac{2x(x^2 + 11x + 18)}{x(x^2 - 7x - 18)} = 20$$

صورت و مخرج را با اتحاد جمله‌مشترب، تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{x(x+9)(x+2)}{(x-9)(x+2)} = 20 \Rightarrow \frac{x+9}{x-9} = 20$$

$$\frac{x+9}{x-9} = \frac{10}{1} \Rightarrow 10x - 90 = x + 9 \Rightarrow 9x = 99 \Rightarrow x = 11$$

تمام عبارتهای صورت و مخرج کسرها تجزیه می‌شوند:

۱۳۶. گزینه ۴

$$\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+1} = \frac{4x^2-9}{4x^2-9}$$

اتحاد مزدوج اتحاد مربع

$$\frac{x^2-1}{x^2-2x+1} = \frac{2x^2+2x}{2x^2+2x}$$

فاکتور از x اتحاد مزدوج

$$\Rightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(2x-3)(2x+3)}{x(2x+3)} \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} = \frac{2x-3}{x}$$

هر سه کسر را در $(x-5)(x+4)$ ضرب می‌کنیم تا مخرج کسرها از بین برود:

$$\frac{x-2}{x-5} \cdot \frac{(x-5)(x+4)}{(x-5)(x+4)} + \frac{x-1}{x+4} \cdot \frac{(x-5)(x+4)}{(x-5)(x+4)}$$

$$= \frac{x^2-6x+5}{(x-5)(x+4)} \cdot \frac{(x-5)(x+4)}{(x-5)(x+4)}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)(x+4) + (x-1)(x-5)}{(x-5)(x+4)} = \frac{x^2-6x+5}{(x-5)(x+4)}$$

اتحاد جمله‌مشترب اتحاد جمله‌مشترب

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 8 + x^2 - 6x + 5 = x^2 - 6x + 5$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 8 - x^2 - 6x + 5 = x^2 - 6x + 5 - x^2 - 6x + 5 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$$

ضرب جمع

$$\xrightarrow{\text{تجزیه با اتحاد جمله‌مشترب}} (x+4)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \times \\ x = 2 \checkmark \end{cases}$$

جواب $x = -4$ مخرج کسر دوم را صفر می‌کند، پس قابل قبول نیست و تنها جواب معادله $x = 2$ است؛ پس معادله فقط یک جواب مثبت دارد.

۱۳۱. گزینه ۳ دو طرف تساوی را در $(x-3)(x+1)$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{2x+1}{x-3} \cdot \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+1)} - \frac{x+4}{x+1} \cdot \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+1)}$$

$$= 4(x-3)(x+1) \Rightarrow (2x+1)(x+1) - (x+4)(x-3)$$

$$= 4(x^2-2x-3) \Rightarrow (2x^2+2x+x+1) - (x^2+x-12)$$

$$= 4x^2-8x-12 \Rightarrow 2x^2+2x+x+1-x^2-x-12$$

$$= 4x^2-8x-12 \Rightarrow x^2+2x+13 = 4x^2-8x-12$$

$$\Rightarrow 3x^2-10x-25 = 0$$

اول Δ را حساب می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(3)(-25) = 100 + 300 = 400$$

حالا جواب‌ها:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{400}}{2(3)} = \frac{10 \pm 20}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{10+20}{6} = \frac{30}{6} = 5 \\ X_2 = \frac{10-20}{6} = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

هیچ کدام از اعداد 5 و $-\frac{5}{3}$ ، مخرج کسرها را صفر نمی‌کنند.

۱۳۲. گزینه ۴ دو طرف تساوی را در $2(x+2)(x-2)$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{2x-1}{x+2} \cdot \frac{2(x+2)(x-2)}{2(x+2)(x-2)} - \frac{x-3}{x-2} \cdot \frac{2(x+2)(x-2)}{2(x+2)(x-2)}$$

$$\xrightarrow{\times 2(x+2)(x-2)} 2(x-2)(2x-1) - 2(x+2)(x-3)$$

$$= 2(x+2)(x-2)$$

$$\Rightarrow 2(2x^2-x-4x+2) - 2(x^2-x-6) = 2(x^2-4)$$

$$\Rightarrow 6x^2-15x+6-2x^2+2x+12 = 2x^2-8$$

$$\Rightarrow x^2-12x+32 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه با اتحاد جمله‌مشترب}} (x-4)(x-8) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 \checkmark \\ x = 8 \checkmark \end{cases}$$

ریشه‌های به دست آمده، مخرج کسرها را صفر نمی‌کنند؛ پس هر دو ریشه قابل قبول اند و مجموعشان برابر با 12 است.



۱۴۲. گزینه ۲ $x = 3$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$\frac{x-2}{ax-5} = \frac{a+2}{x-1} - 1 \xrightarrow{x=3} \frac{3-2}{3a-5} = \frac{a+2}{3-1} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3a-5} = \frac{a+2}{2} - 1$$

در سمت راست جای ۱، $\frac{2}{2}$ می‌نویسیم:

$$\frac{1}{3a-5} = \frac{a+2}{2} - \frac{2}{2} \Rightarrow \frac{1}{3a-5} = \frac{a+2-2}{2} \Rightarrow \frac{1}{3a-5} = \frac{a}{2}$$

$$2a^2 - 5a = 2 \Rightarrow \underbrace{2a^2}_A - \underbrace{5a}_B - \underbrace{2}_C = 0$$

طرفین وسطین می‌کنیم:
دلته را حساب می‌کنیم:

$$\Delta = B^2 - 4AC = (-5)^2 - 4(2)(-2) = 25 + 16 = 41$$

ریشه‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$a = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2(2)} = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{12}{6} = 2 \\ a = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

۱۴۳. گزینه ۳ مخارج تجزیه نمی‌شوند. تمام کسرها را در $x(x-2)$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{x}{x-2} + \frac{1}{x} = 3 \xrightarrow{\text{طرفین ضریب } x(x-2)} \frac{x}{x-2} \cdot x(x-2) + \frac{1}{x} \cdot x(x-2)$$

$$= 3x(x-2) \Rightarrow x^2 + (x-2) = 3x(x-2)$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 3(x^2 - 2x) \Rightarrow x^2 + x - 2 = 3x^2 - 6x$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 7x + 2 = 0$$

حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم برابر با $\frac{c}{a}$ است، پس: $\frac{c}{a} = \frac{2}{2} = 1$

۱۴۴. گزینه ۴ دو طرف معادله را در $x+4$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{x^2+1}{x+4} - \frac{11x-1}{x+4} + x(x+4) = 0 \cdot (x+4)$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 - (11x - 1) + x(x+4) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 - 11x + 1 + x^2 + 4x = 0 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 2 = 0$$

نیازی به حل این معادله نیست. حاصل ضرب ریشه‌های این معادله برابر است با:

$$P = \frac{c}{a} = \frac{2}{2} = 1$$

چون ضرب ریشه‌ها ۱ است، پس دو ریشه وارون هم‌اند.

۱۴۵. گزینه ۲ اول باید مخارج را تجزیه کنیم. فقط در کسر وسط،

$$\frac{x-3}{x-4} + \frac{1}{2(x-1)} = \frac{2}{3}$$

می‌توانیم از ۲ فاکتور بگیریم:
در سمت چپ تساوی، مخارج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{2(x-1)(x-3) + (x-4)(1)}{2(x-1)(x-4)} = \frac{2}{3}$$

ادامه می‌دهیم:

$$\frac{2(x^2 - 4x + 3) + x - 4}{2(x^2 - 5x + 4)} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2x^2 - 8x + 6 + x - 4}{2x^2 - 10x + 8} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2 - 7x + 2}{2x^2 - 10x + 8} = \frac{2}{3}$$

طرفین وسطین می‌کنیم:

$$3(2x^2 - 7x + 2) = 2(2x^2 - 10x + 8)$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 21x + 6 = 4x^2 - 20x + 16 \Rightarrow 2x^2 - x - 10 = 0$$

طرفین وسطین می‌کنیم:

$$(2x-3)(x+1) = x(x-1) \Rightarrow 2x^2 + 2x - 3x - 3 = x^2 - x$$

$$\Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

اختلاف جواب‌ها برابر است با:

$$\sqrt{3} - (-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

۱۳۷. گزینه ۱ مخارج کسر را ساده می‌کنیم:

$$\frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2+1)} + \frac{8}{x+1} = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow \frac{1}{(x-1)(x+1)} + \frac{8}{x+1} = \frac{x+1}{x-1}$$

دو طرف را در $(x-1)(x+1)$ ضرب می‌کنیم:

$$1 + 8(x-1) = (x+1)^2 \Rightarrow 1 + 8x - 8 = x^2 + 2x + 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

نسبت جواب بزرگ‌تر به کوچک‌تر برابر است با:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{4}{2} = 2$$

۱۳۸. گزینه ۲ چون $x = 1$ جواب معادله است، پس آن را در معادله جای گذاری می‌کنیم:

$$\frac{x+1}{x+a} = \frac{a}{x} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری } x=1} \frac{1+1}{1+a} = \frac{a}{1} \Rightarrow \frac{2}{1+a} = \frac{a}{1}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} a(1+a) = 2(1) \Rightarrow a + a^2 = 2 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0$$

معادله درجه دوم به دست آمده را با استفاده از اتحاد جمله مشترک تجزیه و حل می‌کنیم:

$$a^2 + 1a - 2 = 0 \Rightarrow (a+2)(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a+2=0 \Rightarrow a=-2 \checkmark \\ a-1=0 \Rightarrow a=1 \checkmark \end{cases}$$

ضرب جمع

۱۳۹. گزینه ۲ جای t ، ۴ قرار می‌دهیم:

$$\frac{5-t}{3+2t} = \frac{7t+1}{k^2-(2t+1)^2} \xrightarrow{t=4} \frac{5-4}{3+2(4)} = \frac{7(4)+1}{k^2-(2(4)+1)^2}$$

$$\frac{1}{11} = \frac{29}{k^2-81} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} k^2 - 81 = 319$$

$$\Rightarrow k^2 = 400 \Rightarrow k = \pm\sqrt{400} = \pm 20$$

پس k ، دو مقدار دارد.

۱۴۰. گزینه ۲ $x = 2$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$\frac{x+1}{x-3} - \frac{2}{x} = \frac{2m^2}{x(x-3)} \xrightarrow{x=2} \frac{2+1}{2-3} - \frac{2}{2} = \frac{2m^2}{2(2-3)}$$

$$\Rightarrow -3 - 1 = \frac{2m^2}{-2} \Rightarrow -4 = -m^2 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$$

پس m دو مقدار دارد.

۱۴۱. گزینه ۲ $x = 1$ را در معادله قرار می‌دهیم و معادله به دست آمده

$$\frac{4}{a-2x} + \frac{a}{x+1} = \frac{a}{x} \xrightarrow{x=1} \frac{4}{a-2} + \frac{a}{2} = \frac{a}{1}$$

دو طرف تساوی را در $2(a-2)$ ضرب می‌کنیم:

$$2(a-2) \cdot \frac{4}{a-2} + 2(a-2) \cdot \frac{a}{2} = 2(a-2)a$$

$$\Rightarrow 8 + a^2 - 2a = 2a^2 - 4a \Rightarrow a^2 - 2a - 8 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه با اتحاد جمله مشترک}} (a-4)(a+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = -2 \end{cases}$$

دلتا را حساب می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2)(-10) = 1 + 40 = 41$$

اختلاف جواب‌ها برابر است با:

$$M = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{41}}{|2|} = \frac{9}{2} = 4.5$$

مخرج‌ها تجزیه نمی‌شوند: **گزینه ۱ | ۱۴۶**

$$\frac{x}{x-2} - \frac{3}{x+3} = 2$$

دو طرف تساوی را در $(x-2)(x+3)$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x-2} \cdot \frac{(x+3)}{(x+3)} - \frac{3}{x+3} \cdot \frac{(x-2)}{(x-2)} &= \frac{2(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+3)} \\ \Rightarrow x(x+3) - 3(x-2) &= 2(x-2)(x+3) \Rightarrow x^2 + 3x - 3x + 6 + 6 \\ &= 2x^2 + 2x - 12 \Rightarrow x^2 + 2x - 18 = 0 \end{aligned}$$

حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم از رابطه $P = \frac{c}{a}$ به دست می‌آید، پس

در این جا:

$$1x^2 + 2x - 18 = 0 \Rightarrow P = \frac{c}{a} = \frac{-18}{1} = -18$$

تذکره ۱ ریشه‌های مخرج معادله اولیه یعنی $x = 2$ و $x = -3$ در معادله آخر یعنی $x^2 + 2x - 18 = 0$ صدق نمی‌کنند، پس هر دو جواب معادله $x^2 + 2x - 18 = 0$ قابل قبول اند.

گزینه ۳ | ۱۴۷ صورت کسر اول را با اتحاد مزدوج تجزیه و کسر را ساده

می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{4x^2 - (2-x)^2}{x+2} &= \frac{(2x)^2 - (2-x)^2}{x+2} \\ &= \frac{(2x+2-x)(2x-2+x)}{x+2} = \frac{(x+2)(3x-2)}{x+2} = 3x-2 \end{aligned}$$

الان معادله به شکل روبه‌رو درآمده است:

دو طرف را در x ضرب می‌کنیم:

$$3x^2 - 2x - 7 = 2x \Rightarrow 3x^2 - 4x - 7 = 0$$

مجموع ریشه‌های معادله درجه دو از رابطه $S = \frac{-b}{a}$ به دست می‌آید که این‌جا برابر با $S = \frac{4}{3}$ می‌شود.

گزینه ۴ | راه ۱ | ۱۴۸ صورت کسر اول را با اتحاد مزدوج تجزیه و کسر

را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{9x^2 - (x+3)^2}{2x-3} &= \frac{(3x)^2 - (x+3)^2}{2x-3} \\ &= \frac{(3x+x+3)(3x-x-3)}{2x-3} = \frac{(4x+3)(2x-3)}{2x-3} = 4x+3 \end{aligned}$$

الان معادله به شکل روبه‌رو درآمده است:

دو طرف را در x ضرب می‌کنیم:

$$4x^2 + 3x - 2 = x \Rightarrow 4x^2 + 2x - 2 = 0 \xrightarrow{+2} 2x^2 + x - 1 = 0$$

در معادله بالا، رابطه $a + c = b$ ، بین ضرایب برقرار است؛ پس ریشه‌های معادله

برابر است با: $x_2 = \frac{-c}{a} = \frac{1}{2}$ و $x_1 = -1$

$$|x_2 - x_1| = \left| \frac{1}{2} - (-1) \right| = \frac{3}{2}$$

راه ۲ | ۱۱ اختلاف جواب‌های معادله $2x^2 + x - 1 = 0$ را می‌توانستیم از رابطه

به دست آوریم:

$$M = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{1^2 - 4(2)(-1)}}{|2|} = \frac{\sqrt{9}}{2} = \frac{3}{2}$$

گزینه ۲ | ۱۴۹ مخرج‌ها را تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{2}{x^2-4} + \frac{x}{x+2} = \frac{10}{x-2} \Rightarrow \frac{2}{(x-2)(x+2)} + \frac{x}{x+2} = \frac{10}{x-2}$$

دو طرف را در $(x-2)(x+2)$ ضرب می‌کنیم:

$$2 + x(x-2) = 10(x+2) \Rightarrow 2 + x^2 - 2x = 10x + 20$$

$$\Rightarrow x^2 - 12x - 18 = 0$$

در معادله $x^2 - 12x - 18 = 0$ ، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} S = \frac{-b}{a} = 12 \\ P = \frac{c}{a} = -18 \end{cases}$$

اگر ریشه‌ها را x_1 و x_2 بگیریم، مجموع معکوس ریشه‌ها برابر است با:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{S}{P} = \frac{12}{-18} = -\frac{2}{3}$$

گزینه ۱ | ۱۵۰ دو طرف معادله را در $2(x-1)(x+2)$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{x}{x-1} + \frac{m}{x+2} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2(x-1)(x+2)} 2(x+2)x + 2m(x-1)$$

$$= (x-1)(x+2) \Rightarrow 2x^2 + 4x + 2mx - 2m = x^2 + x - 2$$

$$\Rightarrow 1x^2 + (2+2m)x + (2-2m) = 0$$

برای آن‌که ریشه‌های معادله، وارون هم باشند باید حاصل ضربشان ۱ باشد:

$$P = 1 \Rightarrow \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow 2 - 2m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

گزینه ۱ | ۱۵۱ مخرج‌ها را تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{2x^2+1}{x(x-1)} = \frac{m}{x-1} + \frac{x+6}{x}$$

دو طرف را در $x(x-1)$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{x(x-1)}{x(x-1)} \cdot \frac{2x^2+1}{x(x-1)} = \frac{x(x-1)}{x-1} \cdot \frac{m}{x-1} + \frac{x(x-1)}{x} \cdot \frac{x+6}{x}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 1 = mx + x^2 + 6x - x - 6$$

$$\Rightarrow x^2 - mx - 5x + 7 = 0 \Rightarrow 1x^2 + (-m-5)x + 7 = 0$$

مجموع ریشه‌های معادله بالا برابر ۹ است، پس:

$$S = \frac{-b}{a} \Rightarrow 9 = \frac{-(-m-5)}{1} \Rightarrow 9 = m+5 \Rightarrow m = 4$$

گزینه ۱ | ۱۵۲ مخرج کسرها قابل تجزیه کردن نیست. مخرج مشترک آن‌ها

به صورت حاصل ضرب مخرج سه کسر است، پس طرفین را در آن یعنی در

$(x-1)(x+3)(x-2)$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{3}{x-1} \cdot \frac{(x-1)(x+3)(x-2)}{(x-1)(x+3)(x-2)} - \frac{2}{x+3} \cdot \frac{(x-1)(x+3)(x-2)}{(x-1)(x+3)(x-2)}$$

$$= \frac{3}{x-1} \cdot (x-1)(x+3)(x-2) - \frac{2}{x+3} \cdot (x-1)(x+3)(x-2)$$

$$\Rightarrow \frac{3(x+3)(x-2)}{\text{جمله مشترک}} - \frac{2(x-1)(x-2)}{\text{جمله مشترک}} = \frac{4(x-1)(x+3)}{\text{جمله مشترک}}$$

$$\Rightarrow 3(x^2 + x - 6) - 2(x^2 - 2x + 2) = 4(x^2 + 2x - 3)$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3x - 18 - 2x^2 + 4x - 4 = 4x^2 + 8x - 12$$

$$\Rightarrow x^2 + 9x - 22 = 4x^2 + 8x - 12$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 8x - 12 - x^2 - 9x + 22 = 0 \Rightarrow 3x^2 - x + 10 = 0$$



برای آن که معادله اولیه ما فقط یک جواب داشته باشد، چند حالت داریم:

$$(۱) \text{ دلتای معادله } x^2 + 2x + 5 - m = 0 \text{ صفر باشد:}$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 2^2 - 4(1)(5 - m) = 0 \Rightarrow 4 - 20 + 4m = 0$$

$$\Rightarrow 4m = 16 \Rightarrow m = 4$$

(۲) یکی از جوابهای معادله $x^2 + 2x + 5 - m = 0$ همان ریشههای مخرج باشند:

$$x = 1 \text{ ریشه معادله درجه دوم باشد: (الف)}$$

$$1^2 + 2(1) + 5 - m = 0 \Rightarrow 8 - m = 0 \Rightarrow m = 8$$

$$x = 5 \text{ ریشه معادله درجه دوم باشد: (ب)}$$

$$5^2 + 2(5) + 5 - m = 0 \Rightarrow 40 - m = 0 \Rightarrow m = 40$$

پس به ازای $m = 4$ ، $m = 8$ ، و $m = 40$ ، معادله یک ریشه دارد و بزرگترین مقدار m ، ۴۰ است.

$$۱۵۶. \text{ گزینه ۲} \text{ عدد مورد نظر را } x \text{ می‌گیریم. ربع آن می‌شود } \frac{x}{4}.$$

معکوس ۹ برابرش هم می‌شود $\frac{1}{9x}$ با $\frac{x}{4}$ برابر است، پس:

$$\frac{x}{4} = \frac{1}{9x} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 9x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{9}} = \pm \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} - \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \text{ اختلاف مقادیر } x \text{ برابر است با:}$$

$$۱۵۷. \text{ گزینه ۱} \text{ مسئله را به زبان ریاضی می‌نویسیم.}$$

عدد مورد نظر را x می‌گیریم. ۲ برابر معکوشش می‌شود $2\left(\frac{1}{x}\right)$ یا $\frac{2}{x}$.

۳ واحد بیشتر از نصف آن عدد می‌شود $\frac{x}{2} + 3$.

دو مقدار بالا با هم برابرند:

$$\frac{2}{x} = \frac{x}{2} + 3 \xrightarrow{\text{ضربدر ۲}} 4 = x^2 + 6x \Rightarrow x^2 + 6x - 4 = 0$$

دلتا را حساب می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4(1)(-4) = 36 + 16 = 52$$

ریشه‌ها برابر است با:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{52}}{2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{13}}{2}$$

$$= \frac{-6}{2} \pm \frac{2\sqrt{13}}{2} = -3 \pm \sqrt{13}$$

مقدار مثبت x برابر با $-3 + \sqrt{13}$ است.

$$۱۵۸. \text{ گزینه ۱} \text{ دو عدد زوج متوالی را } x \text{ و } x+2 \text{ می‌گیریم. معکوس این}$$

دو عدد به ترتیب $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{x+2}$ است.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{12} \text{ مجموع معکوس این دو عدد برابر } \frac{5}{12} \text{ است، پس:}$$

دو طرف معادله را در $12x(x+2)$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{1}{x} \cdot 12x(x+2) + \frac{1}{x+2} \cdot 12x(x+2) = \frac{5}{12} \cdot 12x(x+2)$$

$$\Rightarrow 12(x+2) + 12x = 5x(x+2)$$

$$\Rightarrow 12x + 24 + 12x = 5x^2 + 10x$$

$$\Rightarrow 24x + 24 = 5x^2 + 10x \Rightarrow 5x^2 - 14x - 24 = 0$$

دلتای معادله را حساب می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4(5)(-24) = 196 + 480 = 676$$

معادله درجه دوم به دست آمده را با روش کلی حل می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(3)(10) = 1 - 120 = -119$$

چون دلتای معادله منفی شده، پس معادله جواب حقیقی ندارد.

$$۱۵۳. \text{ گزینه ۳} \text{ معادله را طرفین وسطین می‌کنیم:}$$

$$\frac{2x-a}{x^2+2} = \frac{-1}{3} \Rightarrow -x^2 - 2 = 6x - 3a \Rightarrow \frac{1}{a}x^2 + \frac{6}{b}x + \frac{2-3a}{c} = 0$$

برای آن که معادله درجه دوم به دست آمده، دو ریشه حقیقی متمایز داشته باشد،

باید دلتای آن مثبت باشد.

دلتا را حساب می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4(1)(2-3a) = 36 - 8 + 12a = 12a + 28$$

دلتا را بزرگتر از صفر قرار می‌دهیم:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 12a + 28 > 0 \xrightarrow{+4} 3a + 7 > 0$$

$$\Rightarrow 3a > -7 \Rightarrow a > \frac{-7}{3}$$

$$۱۵۴. \text{ گزینه ۱} \text{ معادله را طرفین وسطین می‌کنیم:}$$

$$\frac{ax^2 + 2x}{x+1} = x^2 - x \Rightarrow ax^2 + 2x = x^2 + x^2 - x^2 - x$$

$$\Rightarrow ax^2 - x^2 + 3x = 0$$

از x فاکتور می‌گیریم:

$$x(ax^2 - x^2 + 3) = 0 \Rightarrow x((a-1)x^2 + 3) = 0$$

یکی از جوابهای این معادله $x = 0$ است. تا این جا معادله ۱ جواب داشته است.

برای آن که معادله کلاً ۳ ریشه داشته باشد، باید معادله $(a-1)x^2 + 3 = 0$ هم

دو ریشه متمایز داشته باشد؛ یعنی دلتایش باید مثبت باشد:

$$\frac{(a-1)x^2 + 3}{a} = 0 \Rightarrow \frac{a-1}{a}x^2 + \frac{3}{a} = 0$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow 0^2 - 4(a-1)(3) > 0$$

$$\Rightarrow -12a + 12 > 0 \Rightarrow 12a < 12 \Rightarrow a < 1$$

ولی داستان این سؤال این جا تمام نمی‌شود!

معادله ما مخرج $x+1$ داشت؛ یعنی x حق ندارد -1 باشد.

در معادله $(a-1)x^2 + 3 = 0$ ، جای x ، -1 قرار می‌دهیم:

$$a - 1 + 3 = 0 \Rightarrow a = -2$$

این یعنی a حق ندارد -2 باشد!

پس برای a ، دو تا شرط داریم: (۱) $a < 1$ ، (۲) $a \neq -2$.

تنها گزینه‌ای که هر دو شرط بالا را دارد، $a < -2$ ، یعنی (۱) است.

$$۱۵۵. \text{ گزینه ۳} \text{ مخرج‌ها را تجزیه می‌کنیم:}$$

$$\frac{m}{(x-1)(x-5)} = \frac{2x}{x-5} - \frac{x+1}{x-1}$$

دو طرف تساوی را در $(x-1)(x-5)$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{m}{(x-1)(x-5)} = \frac{2x}{x-5} - \frac{x+1}{x-1}$$

$$- \frac{(x-1)(x-5)}{(x-1)(x-5)} \cdot \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow m = (x-1)(2x) - \frac{(x-5)(x+1)}{\text{جمله مشترک}}$$

$$\Rightarrow m = 2x^2 - 2x - (x^2 - 4x - 5)$$

$$\Rightarrow m = 2x^2 - 2x - x^2 + 4x + 5 \Rightarrow x^2 + 2x + 5 - m = 0$$

ریشه‌های معادله را پیدا می‌کنیم:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{14 \pm \sqrt{676}}{2(5)} = \frac{14 \pm 26}{10}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{14+26}{10} = \frac{40}{10} = 4 \checkmark \\ x_2 = \frac{14-26}{10} = \frac{-12}{10} = -1/2 \times \end{cases}$$

فقط $x = 4$ قابل قبول است، چون $-1/2$ عدد طبیعی محسوب نمی‌شود!

۱۵۹. گزینه ۱ پنج عدد زوج متوالی را $x-4, x-2, x, x+2, x+4$ و $x+4$ می‌گیریم.

مجموع معکوس عدد بزرگ‌تر و کوچک‌تر را حساب می‌کنیم:

$$\frac{1}{x-4} + \frac{1}{x+4} = \frac{x+4+x-4}{(x-4)(x+4)} = \frac{2x}{(x-4)(x+4)}$$

• $\frac{1}{10}$ عدد وسطی می‌شود x یا $\frac{x}{10}$.

دو مقدار بالا برابرند:

$$\frac{2x}{(x-4)(x+4)} = \frac{x}{10} \xrightarrow{\text{صورت‌ها را به } x \text{ ساده می‌کنیم.}} \frac{2}{x^2-16} = \frac{1}{10}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x^2 - 16 = 20 \Rightarrow x^2 = 36$$

$$\Rightarrow x = \pm 6 \xrightarrow{\text{طبیعی}} x = 6$$

پنج عدد به صورت مقابل درمی‌آیند:

$$\frac{x+4}{10}, \frac{x+2}{10}, \frac{x}{10}, \frac{x-2}{10}, \frac{x-4}{10}$$

$$10 + 8 + 6 + 4 + 2 = 30$$

مجموعشان برابر است با:

۱۶۰. گزینه ۲ اگر شخص اول کاری را در A ساعت (روز)، شخص دوم

همان کار را در B ساعت (روز) و هر دو با هم در C ساعت (روز) انجام دهند،

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{C}$$

آن‌گاه رابطه روبه‌رو برقرار است:

در این‌جا داریم:

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{40} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{20} + \frac{1}{40} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{2+1}{40} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{3}{40} = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{40}{3} = x \Rightarrow x = 13\frac{1}{3}$$

۱۶۱. گزینه ۳ فرض کنید کارگر دوم، کار را در x روز انجام می‌دهد. چون

کارگر اول کل کار را ۵ روز زودتر تمام می‌کند، یعنی کارگر اول کار را در $x-5$ روز تمام می‌کند.

پس می‌فهمیم که کارگر اول به تنهایی در یک روز، $\frac{1}{x-5}$ کل کار و کارگر دوم به

تنهایی در یک روز، $\frac{1}{x}$ کل کار را انجام می‌دهد. از آن‌جایی که کار در ۶ روز انجام

می‌شود، پس در یک روز، $\frac{1}{6}$ کل کار انجام می‌شود و در نتیجه مجموع

$$\frac{1}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{1}{6}$$

و $\frac{1}{x}$ باید $\frac{1}{6}$ شود و معادله به شکل روبه‌رو درمی‌آید:

$$\frac{1}{x-5} \cdot 6x(x-5) + \frac{1}{x} \cdot 6x(x-5) = \frac{1}{6} \cdot 6x(x-5)$$

$$\Rightarrow 6x + 6(x-5) = x(x-5)$$

$$\Rightarrow 6x + 6x - 30 = x^2 - 5x \Rightarrow x^2 - 17x + 30 = 0$$

معادله درجه دوم به دست آمده را با کمک اتحاد جمله‌مشتربک تجزیه و حل می‌کنیم:

$$x^2 - 17x + 30 = 0 \Rightarrow (x-15)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 15 \checkmark \\ x = 2 \times \end{cases}$$

پس کارگر دوم کل کار را در ۱۵ روز انجام می‌دهد.

۱۶۲. گزینه ۲ فرض کنیم شیر A استخر را به تنهایی در x ساعت پر

می‌کند؛ پس شیر B استخر را به تنهایی در $3x$ ساعت پر می‌کند. قبل از ادامهٔ حل، نکتهٔ زیر را بخوانید:

نکته اگر شیر A به تنهایی، استخری را در a ساعت و شیر B به

تنهایی همین استخر را در b ساعت پر کنند و زمانی که هر دو شیر با هم استخر را پر می‌کنند C بگیریم، آن‌گاه داریم:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$$

پس در این‌جا که شیر A در x ساعت و شیر B در $3x$ ساعت و هر دو با هم در

۱۵ ساعت، استخر را پر می‌کنند، داریم:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{3x} = \frac{1}{15} \Rightarrow \frac{3+1}{3x} = \frac{1}{15}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3x} = \frac{1}{15} \Rightarrow 3x = 60 \Rightarrow x = 20$$

پس شیر A به تنهایی در ۲۰ ساعت و شیر B به تنهایی در $3 \times 20 = 60$

ساعت این استخر را پر می‌کنند.

۱۶۳. گزینه ۳ فرض می‌کنیم ندا کار را در x روز انجام می‌دهد، پس آیدا

کار را در $x-40$ روز انجام می‌دهد. از معادلهٔ مربوط به مسائل کار مشترک

استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{x-40} + \frac{1}{x} = \frac{1}{21} \Rightarrow \frac{1}{x-40} + \frac{1}{x} = \frac{1}{21}$$

دو طرف را در $21x(x-40)$ ضرب می‌کنیم:

$$21x + 21(x-40) = x(x-40)$$

$$\Rightarrow 21x + 21x - 840 = x^2 - 40x \Rightarrow x^2 - 82x + 840 = 0$$

$$\Rightarrow (x-70)(x-12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 70 \checkmark \\ x = 12 \Rightarrow \text{روزهای آیدا منفی می‌شود.} \end{cases}$$

پس ندا به تنهایی کار را در ۷۰ روز انجام می‌دهد.

۱۶۴. گزینه ۱ تعداد نفرات اولیه را x و تعداد نفرات ثانویه را $x+3$

می‌گیریم. سهم هر نفر در حالت اولیه $\frac{18000}{x}$ و در حالت ثانویه $\frac{18000}{x+3}$

می‌شود. اختلاف این دو سهم باید باشد، پس:

$$500 = (\text{سهم ثانویهٔ هر نفر}) - (\text{سهم اولیهٔ هر نفر})$$

$$\Rightarrow \frac{18000}{x} - \frac{18000}{x+3} = 500 \xrightarrow{\div 500} \frac{36}{x} - \frac{36}{x+3} = 1$$

دو طرف را در $x(x+3)$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{36}{x} \cdot x(x+3) - \frac{36}{x+3} \cdot x(x+3) = 1x(x+3)$$

$$\Rightarrow 36(x+3) - 36x = x^2 + 3x$$

$$\Rightarrow 36x + 108 - 36x = x^2 + 3x$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 108 = 0 \Rightarrow (x+12)(x-9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -12 \times \\ x = 9 \checkmark \end{cases}$$

تعداد نفرات اولیه x بود که می‌شود ۹ نفر.

۱۶۹. گزینه ۴ اگر دو زوج مرتب با هم برابر باشند، مؤلفه‌های اولشان با هم

و مؤلفه‌های دومشان نیز با هم برابر است؛ پس:

$$(x-1, 5) = (-3, 2y-1) \Rightarrow \begin{cases} x-1 = -3 \Rightarrow x = -2 \\ 5 = 2y-1 \Rightarrow 6 = 2y \\ \Rightarrow y = 3 \end{cases}$$

حالا حاصل $2x - y$ را به دست می‌آوریم:

$$2x - y = 2(-2) - 3 = -4 - 3 = -7$$

۱۷۰. گزینه ۲ در نمایش پیکانی یک رابطه، اگر از هر عضو از مجموعه A

دقیقاً یک پیکان خارج شود، آن رابطه نمایشگر یک تابع است.

۱ از عدد ۱ در مجموعه A، دو پیکان خارج شده است؛ پس تابع نیست.

۲ از هر عدد مجموعه A دقیقاً یک پیکان خارج شده است؛ پس تابع است.

۳ از عدد ۳ در مجموعه A هیچ پیکانی خارج نشده است؛ پس تابع نیست.

۴ از عدد ۲ در مجموعه A، دو پیکان خارج شده است؛ پس تابع نیست.

۱۷۱. گزینه ۲ از عدد ۲ به $a-1$ و $7-a$ پیکان وارد شده.

این دو عدد باید یکسان باشند:

$$a-1 = 7-a \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

از عدد ۶ هم به $b+a$ و 10 پیکان وارد شده؛ پس:

$$b+a = 10 \xrightarrow{a=4} b+4 = 10 \Rightarrow b = 6$$

$$b-a = 6-4 = 2$$

در نتیجه:

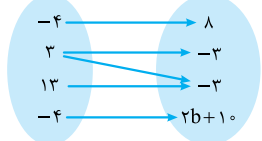
۱۷۲. گزینه ۱ از عدد ۳ دو پیکان به $a+1$ و -3 وارد شده، برای

تابع بودن، این دو عدد باید برابر باشند:

$$a+1 = -3 \Rightarrow a = -4$$

با جای‌گذاری $a = -4$ ، نمودار پیکانی به

صورت روبه‌رو درمی‌آید:



از عدد -4 به دو عدد 8 و $2b+10$ پیکان وارد شده؛ پس این دو عدد هم برابرند:

$$2b+10 = 8 \Rightarrow 2b = -2 \Rightarrow b = -1$$

حاصل $a+b$ را حساب می‌کنیم:

$$a+b = -4 + (-1) = -5$$

۱۷۳. گزینه ۲ در ۱ هیچ کدام از مؤلفه‌های اول برابر نیستند؛ پس تابع

است. ✓

۲ در مؤلفه‌های اول از زوج مرتب‌های $(2, 3)$ و $(\frac{4}{3}, 7)$ برابرند ولی مؤلفه‌های

دومشان برابر نیستند؛ پس به ازای ورودی ۲، دو خروجی ۳ و ۷ داریم، بنابراین

g تابع نیست. x

۳ در هیچ کدام از مؤلفه‌های اول برابر نیستند؛ پس تابع است. ✓

۴ در مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب $(\frac{1}{3}, 5)$ و $(\frac{1}{3}, \sqrt{25})$ با هم برابرند ولی

مؤلفه‌های دومشان هم برابرند؛ پس مشکلی برای تابع بودن ایجاد نمی‌کند. ✓

۱۷۴. گزینه ۴ دو زوج مرتب $(2, 5)$ و $(2, a)$ دارای مؤلفه‌های اول

یکسان هستند؛ پس باید مؤلفه‌های دومشان هم یکسان باشد:

$$a = 5$$

حالا $a = 5$ را جای‌گذاری می‌کنیم، مجموعه به صورت زیر درمی‌آید:

$$\{(2, 5), (-2, 3), (5, 1), (4, 1)\}$$

که هیچ‌کدام از مؤلفه‌های اولش برابر نیستند، پس اگر $a = 5$ باشد، رابطه تبدیل

به تابع می‌شود.

۱۶۵. گزینه ۲ فرض می‌کنیم وزن مس اولیه x گرم باشد، در این صورت

چون وزن نقره ۶ برابر وزن مس بوده است، پس وزن نقره آن $6x$ گرم بوده است. در

نتیجه وزن کل گلدان $6x + x = 7x$ گرم بوده است. حالا گرم مس به آن اضافه

می‌کنیم، پس وزن نقره همان $6x$ می‌ماند ولی وزن کل گلدان به $7x + 200$ گرم

می‌رسد. چون درصد وزن گلدان جدید، نقره است، پس:

$$\frac{\text{وزن نقره}}{\text{وزن گلدان}} = \frac{8\%}{100\%} \Rightarrow \frac{6x}{7x+200} = \frac{8\%}{100\%} \Rightarrow \frac{6x}{7x+200} = \frac{4}{5}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 4(7x+200) = 5(6x) \Rightarrow 28x + 800 = 30x$$

$$\Rightarrow 2x = 800 \Rightarrow x = 400$$

وزن گلدان اول $7x$ گرم بوده است که برابر است با: $7x = 7 \times 400 = 2800$

مقدار نمک اولیه موجود در محلول را حساب می‌کنیم:

$$x = 10 \Rightarrow 100x = 10000 \Rightarrow \frac{4}{100} = \frac{x}{250} \Rightarrow \frac{\text{وزن نمک}}{\text{وزن محلول}} = \text{غلظت}$$

۹ کیلو نمک به 10 کیلوی اولیه اضافه می‌شود، پس وزن نمک کل 19 می‌شود.

الان وزن محلولمان هم $250 + 9$ شده. حالا فرض می‌کنیم x کیلو از آب را بخار

می‌کنیم، پس وزن محلول $x - 259$ می‌شود.

قرار است غلظت محلول 10 درصد باشد، پس:

$$\frac{\text{نمک}}{\text{کل محلول}} = \frac{10\%}{100\%} \Rightarrow \frac{19}{259-x} = \frac{1}{10} \Rightarrow 190 = 259-x \Rightarrow x = 69$$

۱۶۷. گزینه ۴ عرض را x و طول را x^2 می‌گیریم.



محیط و مساحت را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \text{محیط} = 2 \times (x^2 + x) = 2x^2 + 2x \\ \text{مساحت} = (x^2)(x) = x^3 \end{cases}$$

نسبت مساحت به محیط ۴ است، پس:

$$\frac{\text{مساحت}}{\text{محیط}} = 4 \Rightarrow \frac{x^3}{2x^2 + 2x} = 4 \Rightarrow \frac{x^3}{2x(x+1)} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2x+2} = 4 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x^2 = 8x + 8 \Rightarrow x^2 - 8x - 8 = 0$$

دلته را حساب می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(1)(-8) = 64 + 32 = 96$$

ریشه‌ها برابر است با:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{96}}{2} = \frac{8 \pm 4\sqrt{6}}{2} = \frac{2(4 \pm 2\sqrt{6})}{2} = 4 \pm 2\sqrt{6}$$

عدد $4 - 2\sqrt{6}$ ، عددی منفی است، پس نمی‌تواند ضلع مستطیل باشد و فقط

$x = 4 + 2\sqrt{6}$ قابل قبول است.

۱۶۸. گزینه ۴ فرم کلی رابطه خطی به صورت $y = ax + b$ است. دقت

کنید که x نباید توان بگیرد و هم‌چنین زیر رادیکال برود.

۱ به خاطر وجود x^2 ، رابطه خطی نیست.

۲ به خاطر وجود \sqrt{x} ، رابطه خطی نیست.

۳ چون در مخرج کسر x داریم، رابطه خطی نیست.

۴ اگر در فرم کلی رابطه خطی $y = ax + b$ ، $a = \frac{1}{3}$ و $b = 3$ را قرار دهیم

به رابطه $y = \frac{x}{3} + 3$ می‌رسیم؛ پس این گزینه رابطه خطی را نشان می‌دهد.