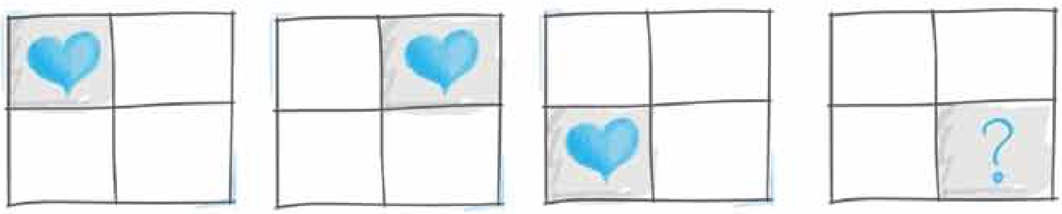
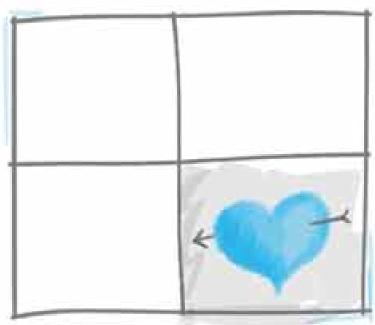
به جای مقدمهٔ ناشر

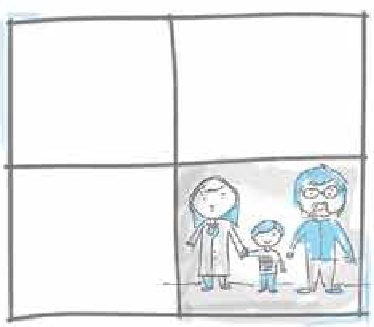
تست هوش عاطفی ـ هندسی



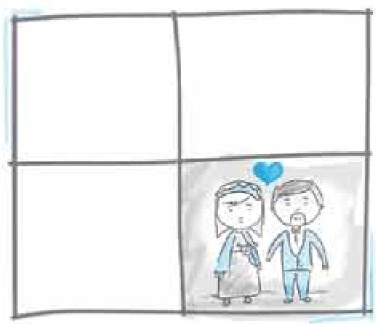
۱)



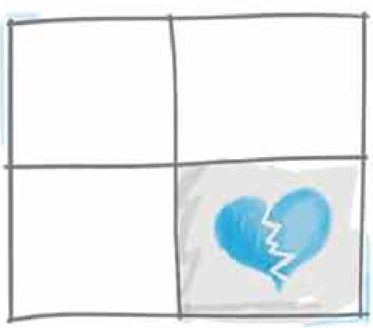
۲)



۳)



۴)



هندسه یعنی هارمونی. می‌گویند اگر قلبت با این دنیا هم‌نوا و هم‌ریتم باشد، یک اتفاق‌های خوبی برای خودت و آدم‌های دور و برت می‌افتد

قلبت را جای چیزهایی که خوب نیست نکن!

تقدیم به همهٔ دانش‌آموزان و معلم‌های خوب ایران

مقدمهٔ مولفان

به کتاب هندسه ۱ خیلی‌سبز خوش آمدید.

نحوهٔ استفاده از کتاب:

الف) اگر به مدرسه یا کلاس می‌روید در مورد استفاده از کتاب حتماً از معلمتان بپرسید. ما به شدت اعتقاد داریم که «درس معلم زمزمهٔ محبت و موفقیت است»، با راهنمایی معلمتان در مورد ترتیب خواندن درس‌نامه‌ها و حل‌کردن تست‌ها و بررسی پاسخ‌ها، برنامه‌ریزی و اجرا کنید.

ب) اگر به شکل خودآموز از کتاب استفاده می‌کنید توصیهٔ ما این است که: ۱) اول درس‌نامه را خوب و کامل بخوانید. ۲) چیزهایی از درس‌نامه که مهم است را مشخص کنید، یا برای خودتان یادداشت بردارید و خلاصه کنید. ۳) یک بار دیگر فقط تست‌های درس‌نامه را حل کنید. ۴) بروید سراغ تست‌ها، پاسخ تست‌ها را اول از پاسخنامهٔ کلیدی چک کنید و بعد بروید پاسخ‌های تشریحی را بخوانید.

ساختار کتاب:

درس‌نامه:

۱) در درس‌نامه آیکن‌های **نکته**، **تذکر** و **یادآوری** داریم:

نکته نشان‌دهندهٔ نکته‌ای است که یا یادگرفتنش لازم است یا باعث می‌شود تست را سریع‌تر و بهتر حل کنید.

تذکر نشان‌دهندهٔ یک اشارهٔ کوچک به مطلب، مفهوم، توضیح یا مثالی است که باعث می‌شود مطلب را بهتر بفهمید و یا برای جلوگیری از اشتباه‌فهمیدن یک مطلب است.

یادآوری نشان‌دهندهٔ یک تعریف، فرمول، مقدار یا ... از درس‌های قبلی یا سال‌های قبل است.

۲) در درس‌نامهٔ کتاب سعی کرده‌ایم از جدول، دسته‌بندی و هر چیزی که باعث می‌شود درس را بهتر و مؤثرتر یاد بگیرید استفاده کنیم. حواستان باشد که برای بررسی بعضی از جدول‌ها باید حسابی وقت بگذارید.

۳) تک‌تک مثال‌ها و تست‌های درس‌نامه به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که اولاً کاربرد نکته‌ها و مفاهیم گفته‌شده را ببینید و یاد بگیرید و ثانیاً مفاهیم و تمارین کتاب درسی و هر آن‌چه که به فهم بیشتر مطالب کتاب درسی کمک می‌کند را دیده باشید. نمونه‌های اصلی و پرتکرار تست‌های کنکور را ببینید. باز هم توصیه می‌کنیم بعد از این‌که درس‌نامهٔ هر درس را خوب و کامل خواندید برگردید و یک بار دیگر تست‌های درس‌نامه را حل کنید.

تست‌ها:

۱) تست‌ها را با وسواس خیلی زیادی چیده‌ایم تا روند تسلط شما بر مطالب آسان‌تر شود، پس حتماً سعی کنید با همان ترتیب تست‌ها را حل کنید.

۲) تمامی تمارین و مثال‌های کتاب درسی و کنکور سال‌های اخیر را در کتاب خواهید دید، حتماً توجه ویژه‌ای به آن‌ها داشته باشید.

۳ به شدت به تغییر فضای تست‌های کنکور توجه داشته‌ایم و سعی کردیم تا حد امکان شما را با ذائقهٔ طراحان کنکور در سال‌های اخیر آشنا کنیم.

۴ در حل تست‌ها چه در درس‌نامه و چه در پاسخ‌ها نمادهای راه | I، راه | II و ... را داریم که نشان‌دهندهٔ روش‌های مختلف حل یک تست است. معمولاً در راه | I متداول‌ترین راه‌حل و یا سریع‌ترین آن‌ها آمده است.

اشارات:

۱ در انتهای هر کدام از فصل‌ها یک آزمون داریم. توصیهٔ شدید و اکید داریم که تا وقتی همهٔ مطالب فصل را خوب یاد نگرفته‌اید و تست‌های فصل را حل و دوره نکرده‌اید سراغ آزمون نروید.

۲ توصیهٔ ما برای استفاده از پاسخ‌نامه این است:

الف تعداد مشخصی تست برای یک نشست انتخاب و حل کنید (مثلاً ۳۰تا).

ب درستی پاسخ‌ها را از روی پاسخ‌نامهٔ کلیدی بررسی کنید.

پ برگردید و سعی کنید تست‌هایی را که جواب نداده‌اید یا غلط زده‌اید دوباره حل کنید.

ت بروید سراغ پاسخ‌نامهٔ تشریحی، اول پاسخ تست‌هایی را که جواب نداده‌اید و یا غلط زده‌اید ببینید و بعد از این‌که این‌ها را خوب فهمیدید و یاد گرفتید شروع کنید از اول نگاهی به همهٔ پاسخ‌ها بیندازید. بررسی راه | I، راه | II، نکته ها و تذکر ها باعث می‌شود به همهٔ نکته‌ها و ریزه‌کاری‌های درس مسلط شوید.

و حرف آخر هم این‌که:

- برای این‌که این کتاب بهترین باشد کلی کار کرده‌ایم. به نظر خودمان خیلی خوب شده است 🙂 و امیدواریم نظر شما هم همین باشد.
- اگر اشتباه، غلط، جابه‌جایی یا ... در کتاب دیدید حتماً برایمان بفرستید تا هم اصلاح و هم تشکر کنیم.
- تشکر بسیار ویژه از دکتر کمیل نصری برای تمام دلسوزی‌هایش و شرایط فوق‌العاده‌ای که در روند تألیف برایمان ایجاد کرده.
- از مهندس نوید شاهی عزیز که در تمام مراحل کتاب با وسواس و دقت بی‌نظیرشان همراه ما بودند تشکر می‌کنیم.
- از تمامی دوستان و همکارانمان در انتشارات خیلی‌سبز، خصوصاً خانم الهه آرانی و خانم ملیکا مهری که زحمت پیگیری تمام امور این کتاب را داشتند، تشکر می‌کنیم.

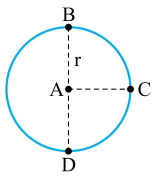
فهرست

فصل ۱ ترسیم‌های هندسی و استدلال

درس اول ترسیم‌های هندسی

برای رسم شکل‌های هندسی، معمولاً از تعریف آن‌ها و ویژگی نقاط روی شکل کمک می‌گیریم. در این بخش، با ترسیم شکل‌های سادهٔ هندسی آشنا می‌شویم.
مجموعه نقاطی از صفحه که دارای یک ویژگی مشترک هستند را مکان هندسی می‌نامیم.

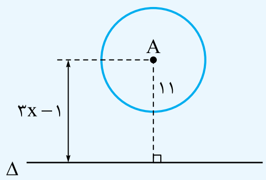
مجموعه نقاط با فاصلهٔ ثابت از یک نقطه



مجموعه نقاطی از صفحه که از نقطهٔ ثابت A به فاصلهٔ r باشند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع r قرار می‌گیرند:
پس برای ترسیم مجموعه نقاطی مانند M که در ویژگی $AM = r$ صدق می‌کنند، باید دایره‌ای به مرکز A و شعاع r رسم کنیم.

تست ۱ **فاصلهٔ نقطهٔ A از خط Δ برابر با $۳x - ۱$ است. اگر هیچ نقطه‌ای به فاصلهٔ ۱۱ از نقطهٔ A روی Δ نباشد، x کدام می‌تواند باشد؟**

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴



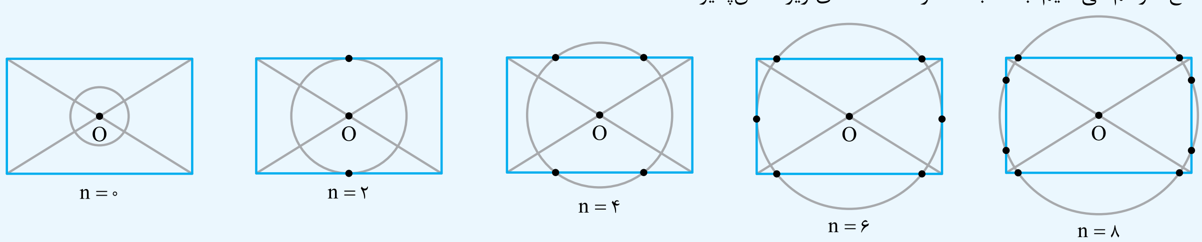
پاسخ ۱ نقاطی که از A به فاصلهٔ ۱۱ هستند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۱۱ واقع‌اند، این دایره نباید با خط Δ نقطهٔ مشترک داشته باشد، تا آن‌چه سؤال گفته اتفاق بیفتد، پس: $۳x - ۱ > ۱۱ \Rightarrow ۳x > ۱۲ \Rightarrow x > ۴$
پس در بین گزینه‌ها $x = ۵$ قابل قبول است.

از این موضوع ساده، ممکن است سؤال‌های جدی‌تری هم ببینیم، مثل تست بعد.

تست ۲ **روی محیط یک مستطیل، n نقطه وجود دارد که از محل تقاطع قطرهای آن به یک فاصله‌اند. مجموعهٔ مقادیر قابل قبول برای n، چند عضو دارد؟**

۱) ۳ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۵

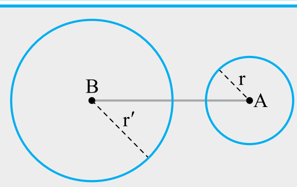
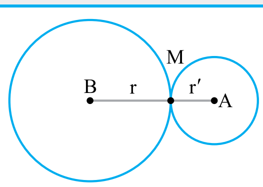
پاسخ ۴ فرض کنید قطرهای مستطیل در O متقاطع‌اند و می‌خواهیم نقاطی را پیدا کنیم که از O به فاصلهٔ r هستند، برای این منظور دایره‌ای به مرکز O و شعاع r رسم می‌کنیم. بسته به مقدار r، حالت‌های زیر امکان‌پذیر است:

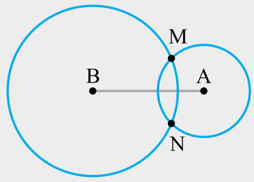
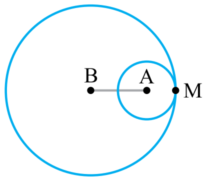
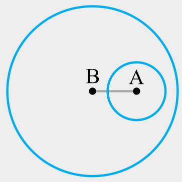


پس n، می‌تواند پنج مقدار متفاوت (۰، ۲، ۴، ۶ و ۸) را بپذیرد.

بررسی تعداد نقاط برخورد دو دایره

فرض کنید دنبال نقاطی می‌گردیم که از A به فاصلهٔ r و از B به فاصلهٔ r' هستند، در این حالت باید به تعداد نقاط برخورد دو دایره فکر کنیم. مرکز دایره‌ها A و B و شعاع آن‌ها به ترتیب r و r' و به پاره‌خط AB خط‌المرکزین دو دایره می‌گوییم.
حالت‌های زیر را داریم:

تعداد نقاط مشترک	رابطهٔ بین خط‌المرکزین و شعاع	شکل
فاقد نقطهٔ مشترک	فاصلهٔ مرکزها از جمع شعاع‌ها بیشتر است: $AB > r + r'$	
یک نقطهٔ مشترک (M)	فاصلهٔ مرکزها با جمع شعاع‌ها برابر است: $AB = r + r'$	

تعداد نقاط مشترک	رابطهٔ بین خط‌المرکزین و شعاع	شکل
دو نقطهٔ مشترک (M و N)	فاصلهٔ مرکزها بین $r'+r$ و $r-r'$ است: $\lvert r-r'\rvert < AB < r+r'$	
یک نقطهٔ مشترک (M)	فاصلهٔ مرکزها برابر اختلاف شعاع‌ها است: $AB=\lvert r-r'\rvert$	
فاقد نقطهٔ مشترک	فاصلهٔ مرکزها از اختلاف شعاع‌ها کم‌تر است: $AB<\lvert r-r'\rvert$	

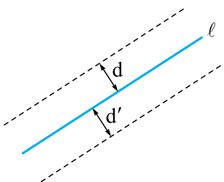
تست | **دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ $۳m-۱$ قرار دارند. اگر دو نقطه در صفحه موجود باشد که از A به فاصلهٔ ۲ و از B به فاصلهٔ ۳ باشند، کدام مقدار برای m مناسب است؟**

۱) ۰/۶ ۲) ۳ ۳) ۲/۳ ۴) ۱/۱

پاسخ ۴ | با توجه به وجود ۲ نقطه، دایره‌ها باید متقاطع باشند و شرط $\lvert r-r'\rvert < AB < r+r'$ برقرار باشد، پس داریم: $\lvert ۳-۲\rvert < ۳m-۱ < ۳+۲$؛ یعنی $۱ < ۳m-۱ < ۵$ که از آن نتیجه می‌شود $۲ < ۳m < ۶$ و بنابراین $\frac{۲}{۳} < m < ۲$؛ یعنی مقادیر بین $\frac{۲}{۳}$ تا ۲ برای m مناسب‌اند، که در گزینه‌ها ۱/۱ را انتخاب می‌کنیم.

مجموعه نقاط با فاصلهٔ ثابت از یک خط

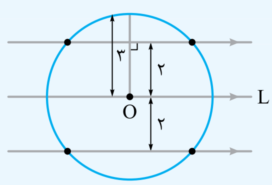
نقاطی از صفحه که به فاصلهٔ d از خط ℓ قرار داشته باشند، روی دو خط موازی ℓ در دو طرف آن هستند:



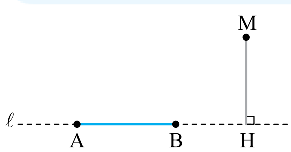
تست | **نقطهٔ O روی خط L قرار دارد. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطهٔ O به فاصلهٔ ۳ و از خط L به فاصلهٔ ۲ باشند؟**

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ ۴ | خُب نقاطی که از نقطهٔ O به فاصلهٔ ۳ هستند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۳ است و نقاطی که از خط L به فاصلهٔ ۲ هستند، دو خط موازی خط L به فاصلهٔ ۲ از آن خواهند بود. نقاط تلاقی این دو خط و دایره، هر دو ویژگی مورد نظر را دارند. (حتماً خط‌ها دایره را قطع می‌کنند؟!)



تذکر | فاصلهٔ یک نقطه، از یک پاره‌خط، در واقع فاصلهٔ آن نقطه از امتداد آن پاره‌خط است، مثلاً در شکل روبه‌رو، فاصلهٔ M از پاره‌خط AB، برابر با طول MH است.

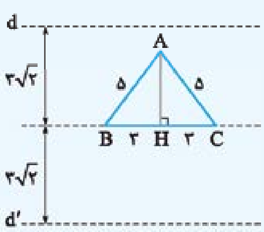


تست | **روی محیط مثلثی به طول اضلاع ۵، ۵ و ۶، چند نقطه وجود دارد که از بزرگ‌ترین ضلع، به فاصلهٔ $۳\sqrt{۲}$ باشد؟**

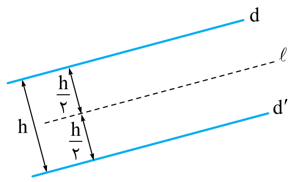
۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ ۱ | مثلث، متساوی‌الساقین است و بزرگ‌ترین ضلع آن، ضلع به طول ۶ که قاعدهٔ آن است. در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع وارد بر قاعده، میانهٔ وارد بر آن هم هست با توجه به شکل و استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH، داریم: $AH^۲=AB^۲-BH^۲=۲۵-۹=۱۶$

پس $AH=۴$. از آن‌جا که $\sqrt{۲}\simeq ۱/۴$، داریم: $AH < ۴/۲ \simeq ۳\sqrt{۲}$، یعنی نقاطی که از BC به فاصلهٔ $۳\sqrt{۲}$ هستند، روی دو خط d و d' قرار می‌گیرند که با محیط مثلث ABC، هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند.



مجموعهٔ نقاط با فاصلهٔ یکسان از دو خط موازی

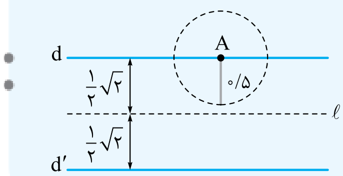


نقاطی از صفحه که از دو خط موازی d و d' به یک فاصله هستند، روی خطی مانند ℓ بین دو خط و به فاصلهٔ یکسان از آن‌ها قرار دارند.

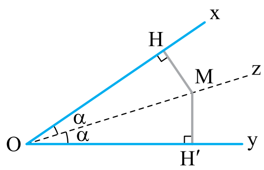
تست فاصلهٔ بین دو خط موازی d و d' برابر $\sqrt{۲}$ است. اگر A نقطه‌ای روی خط d باشد، چند نقطه در صفحه وجود دارد که از d و d' به یک فاصله و از A به فاصلهٔ $۰/۵$ باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ ۱ با توجه به این‌که $\sqrt{۲} \simeq ۱/۴$ داریم $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲} \simeq ۰/۷$، پس نقاطی که از d و d' به یک فاصله هستند، روی خطی به فاصلهٔ $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲} \simeq ۰/۷$ از هر دوی آن‌ها قرار دارند (خط ℓ) و نقاطی که از A به فاصلهٔ $۰/۵$ هستند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع $۰/۵$ قرار دارند. همان‌طور که در شکل می‌بینید، این دایره با خط ℓ نقطهٔ مشترکی ندارد.

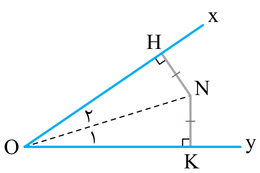


ویژگی مهم نیمساز زاویه



در شکل روبه‌رو، Oz نیمساز زاویهٔ xOy است. اگر M نقطه‌ای واقع بر Oz باشد، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OMH و OMH' بنا به حالت وتر و یک زاویهٔ حاده همنهشت هستند، پس $MH = MH'$، بنابراین:

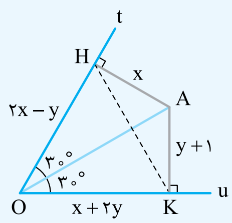
هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.



حالا فرض کنید نقطه‌ای مانند N داریم که می‌دانیم از دو ضلع زاویهٔ xOy به یک فاصله است. اگر از N به O وصل کنیم، این بار دو مثلث ONH و ONK بنا به حالت وتر و یک ضلع زاویهٔ قائمه همنهشت هستند، پس $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$، بنابراین:

هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

تست در شکل روبه‌رو فاصلهٔ بین دو نقطهٔ H و K کدام است؟



۱) ۱/۵

۲) ۲

۳) ۲/۵

۴) ۳

پاسخ ۳ نقطهٔ A روی نیمساز زاویهٔ xOy قرار دارد، پس دو مثلث OAH و OAK بنا به حالت وتر و یک زاویهٔ حاده همنهشت هستند و داریم:

$$\begin{cases} AH = AK \Rightarrow x = y + ۱ \\ OH = OK \Rightarrow ۲x - y = x + ۲y \Rightarrow x = ۳y \end{cases} \Rightarrow ۳y = y + ۱ \Rightarrow y = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{x=۳y} x = \frac{۳}{۲}$$

به دلیل آن‌که $OH = OK$، مثلث OHK متساوی‌الساقین است و از آن‌جا که یکی از زاویه‌های آن $H\hat{O}K = ۶۰^\circ$ است، این مثلث متساوی‌الاضلاع است، پس:

$$HK = OK = x + ۲y = \frac{۳}{۲} + \frac{۲}{۲} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

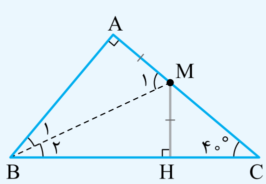
در تست قبل، نیمساز به وضوح دیده می‌شد، اما موضوع تست بعد، این است که بدانید اگر نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله بود، بر نیمساز آن زاویه واقع است.

تست در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ, \hat{C} = ۴۰^\circ)$ نقطهٔ M روی ضلع AC قرار دارد. از نقطهٔ M عمودی بر BC رسم می‌کنیم تا آن را در H قطع کند. اگر $MH = AM$، آن‌گاه زاویهٔ AMB چند درجه است؟

۱) ۶۵° ۲) ۱۰۰° ۳) ۱۱۵° ۴) ۷۵°

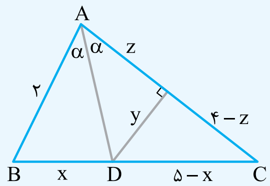
پاسخ ۱ به شکل خیره شوید! در واقع فاصلهٔ نقطهٔ M از ضلع‌های AB و BC برابر است، پس M روی نیمساز زاویهٔ B قرار دارد، بنابراین $\hat{B}_۱ = \hat{B}_۲ = \frac{۵۰^\circ}{۲} = ۲۵^\circ$، پس زاویهٔ $M_۱$ برابر است با:

$$\overset{\Delta}{ABM} : \hat{M}_۱ = ۹۰^\circ - ۲۵^\circ = ۶۵^\circ$$



توجه خاصیت نیمساز، بسیار مستعد این است که در تست‌ها، با مساحت ترکیب شود، پاسخ تست بعد را خوب بخوانید تا دستتان بیاید این مدل سؤال‌ها چه جوری هستند.

تست ۱ در شکل روبه‌رو فاصلهٔ نقطهٔ A از BC، چند برابر y است؟



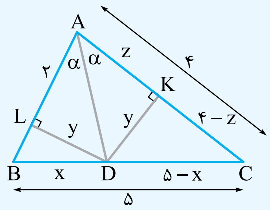
۱) ۱/۲

۲) ۱/۳

۳) ۱/۴

۴) ۱/۵

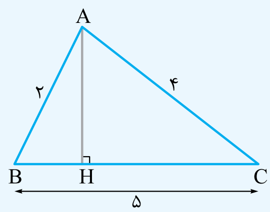
پاسخ ۱ با توجه به شکل، AD نیمساز زاویهٔ A است، پس D از AB و AC به یک فاصله است، یعنی $DK = DL = y$ و داریم:



$$S(ABC) = S(ABD) + S(ACD) \Rightarrow S(ABC) = \frac{۱}{۲}DL.AB + \frac{۱}{۲}DK.AC$$

$$\Rightarrow S(ABC) = \frac{۱}{۲}y(۲) + \frac{۱}{۲}y(۴) = y + ۲y = ۳y$$

فاصلهٔ A از BC، همان طول ارتفاع AH در مثلث ABC است، پس داریم:

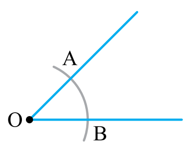


$$S(ABC) = \frac{۱}{۲}AH.BC \Rightarrow ۳y = \frac{۱}{۲}AH \times ۵ \Rightarrow AH = \frac{۶}{۵}y = ۱/۲y$$

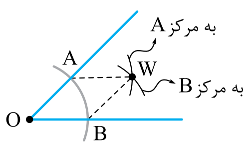
روش رسم نیمساز با خط‌کش و پرگار

برای رسم نیمساز یک زاویه، با خط‌کش و پرگار، با روشی که کتاب درسی گفته است، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

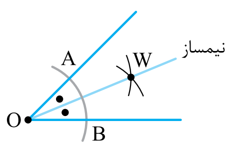
گام اول: به مرکز زاویه (O) و شعاع دلخواه، کمانی می‌زنیم تا اضلاع زاویه را در A و B قطع کند.



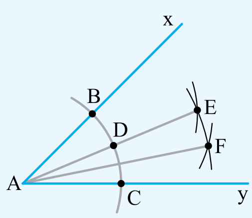
گام دوم: به مرکز A و B، دو کمان با شعاع مساوی می‌زنیم تا یکدیگر را در W قطع کنند. (دقت کنید شعاع این دو کمان باید از نصف طول AB بیشتر باشد تا همدیگر را قطع کنند.)



گام سوم: بالأخره از رأس زاویه به محل تلاقی (W) وصل می‌کنیم. OW نیمساز زاویهٔ O است.



تست ۲ در شکل روبه‌رو، کمان‌هایی به شعاع برابر و به مرکزهای A، B، C و D رسم شده‌اند. اگر $F\hat{A}C = ۱۷°$، آن‌گاه زاویهٔ BAF چند درجه است؟



۱) ۳۴

۲) ۴۲/۵

۳) ۴۷/۵

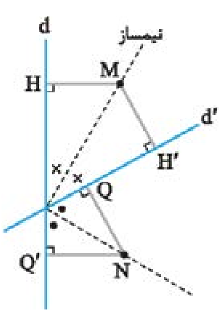
۴) ۵۱

پاسخ ۴ بنا به آن‌چه در مورد روش نیمساز گفتیم، AE نیمساز زاویهٔ BAC و AF نیمساز زاویهٔ EAC است، پس اگر $F\hat{A}C = ۱۷°$، آن‌گاه $D\hat{A}F = ۱۷°$ و $D\hat{A}C = B\hat{A}E = ۲ \times ۱۷° = ۳۴°$، پس:

$$BAF = B\hat{A}E + D\hat{A}F = ۳۴° + ۱۷° = ۵۱°$$

مجموعه نقاطی که از دو خط متقاطع، به یک فاصله‌اند.

هر نقطه روی نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط متقاطع d و d′، از این دو خط به یک فاصله است.

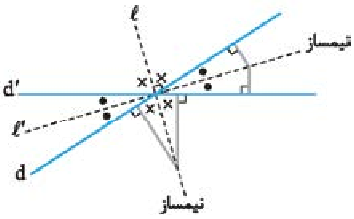


همان‌طور که در شکل می‌بینید، برای دو خط متقاطع، دوتا خط نیمساز (یکی برای زاویهٔ کوچک و یکی برای زاویهٔ بزرگ) رسم می‌شود، این دو نیمساز بر هم عمودند و هر نقطه روی آن‌ها از دو خط d و d′ به یک فاصله است. مثلاً نقطهٔ M و نقطهٔ N چون روی نیمساز هستند، از دو خط d و d′ به یک فاصله‌اند:

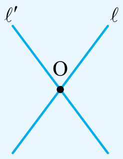
M روی نیمساز است. $\Leftrightarrow MH = MH'$

N روی نیمساز است. $\Leftrightarrow NQ = NQ'$

نکته برای پیداکردن نقاطی که از دو خط متقاطع d و d′ به یک فاصله‌اند، نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط را رسم می‌کنیم:
دقت کنید که این دو نیمساز (یعنی دو خط ℓ و ℓ') بر هم عمودند.

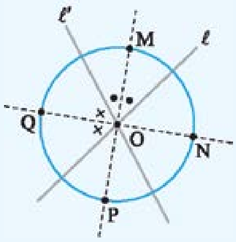


تست در شکل روبه‌رو، چند نقطه وجود دارد که از ℓ و ℓ' به یک فاصله و از نقطهٔ O به فاصلهٔ ۲ باشند؟



۱) ۲
۲) ۴
۳) ۸
۴) بی‌شمار

پاسخ ۲ نقطه یا نقاط مورد نظر باید روی یکی از نیمسازهای ℓ و ℓ' باشد و روی دایره به مرکز O و شعاع ۲ هم باشد.
با توجه به شکل، ۴ نقطهٔ Q ،P ،N و M جواب هستند. (راستی این نقاط رئوس یک مربع به قطر ۴ هستند.)



ویژگی مهم عمودمنصف یک پاره‌خط

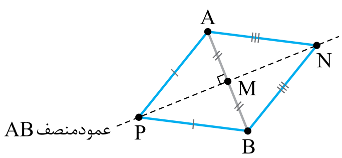
اگر دنبال نقاطی می‌گردیم که از دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ مساوی باشند، کافی است عمودمنصف پاره‌خط AB را بکشیم. هر نقطه روی این عمودمنصف جواب ما است؛ پس:

نقاطی که از A و B به یک فاصله باشند، روی عمودمنصف AB هستند.

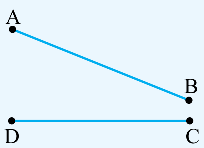
$$NA = NB, MA = MB, PA = PB$$

ضمن آن‌که:

هر نقطه‌ای که روی عمودمنصف AB باشد، از A و B به یک فاصله است.

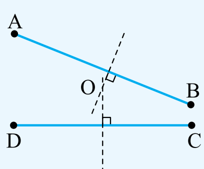


تست دو پاره‌خط AB و DC مطابق شکل در نظر گرفته شده‌اند. چند نقطه وجود دارد که از نقاط A و B به یک فاصله و از نقاط C و D هم به یک فاصله باشد؟



۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

پاسخ ۲ نقاطی که از دو سر پاره‌خط AB فاصله‌های مساوی دارند، همگی روی عمودمنصف این پاره‌خط قرار دارند و نقاطی هم که از دو سر پاره‌خط DC به یک فاصله‌اند، روی عمودمنصف پاره‌خط DC قرار دارند؛ پس نقطه‌ای را می‌خواهیم که هم روی عمودمنصف AB باشد، هم روی عمودمنصف DC باشد.
تنها نقطه با این ویژگی، محل برخورد عمودمنصف‌هاست؛ پس فقط یک نقطه با این ویژگی وجود دارد.



توجه خاصیت عمودمنصف پاره‌خط، خوراکِ ترکیب شدن با مسائل محاسبهٔ زاویهٔ مجهول است، مثلاً تست زیر را ببینید که مشابه آن را در کنکورهای اخیر هم داشته‌ایم.

تست در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC, \hat{A} = ۱۱۲^\circ)$، عمودمنصف ضلع AC، قاعدهٔ BC را در نقطهٔ P قطع کرده است. زاویهٔ APB چند درجه است؟

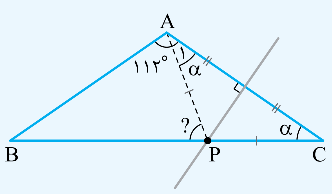
۱) ۶۸
۲) ۷۰
۳) ۷۲
۴) ۷۴

پاسخ ۱ شکل را خوب نگاه کنید!

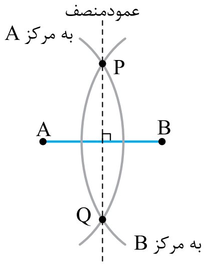
نقطهٔ P روی عمودمنصف ضلع AC است، پس از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است، یعنی $PA = PC$ و در نتیجه $\hat{A}_1 = \hat{C} = \alpha$ است. در مثلث اصلی با توجه به $\hat{B} = \hat{C}$ و $\hat{A} = ۱۱۲^\circ$ داریم:

$$\hat{B} = \hat{C} = \frac{۱۸۰^\circ - ۱۱۲^\circ}{۲} = ۳۴^\circ \Rightarrow \alpha = ۳۴^\circ$$

پس: $\overset{\Delta}{APC}$ زاویهٔ خارجی در $= A\hat{P}B = \hat{C} + \hat{A}_1 = ۲\alpha = ۲ \times ۳۴^\circ = ۶۸^\circ$



روش رسم عمودمنصف با خط‌کش و پرگار ترسیم خط‌های موازی و عمود



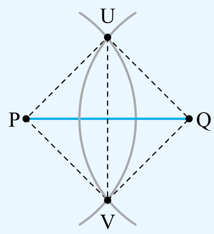
برای رسم عمودمنصف پاره‌خط AB با خط‌کش و پرگار به روشی که کتاب درسی گفته، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

گام اول: پرگار را به اندازهٔ بیش از نصف AB باز می‌کنیم.

گام دوم: به مرکزهای A و B دو کمان می‌زنیم تا یکدیگر را در P و Q قطع کنند.

گام سوم: نقاط برخورد این کمان‌ها را به هم وصل می‌کنیم. PQ عمودمنصف پاره‌خط AB است.

مثلاً برای رسم عمودمنصف پاره‌خط AB به طول ۸ باید دو کمان با شعاع بیش از ۴ بزنیم و نقاط برخورد را به هم وصل کنیم.



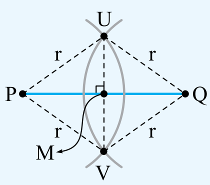
تست ۹ در شکل روبه‌رو، دو کمان با شعاع‌های برابر ولی بیشتر از نصف PQ به مرکزهای P و Q رسم شده‌اند. کدام گزینه را در حالت کلی، نمی‌توان پذیرفت؟

۱) UV عمودمنصف PQ است.

۲) PQ عمودمنصف UV است.

۳) PUQV مربع است.

۴) دو مثلث PUQ و PVQ همنهشت‌اند.

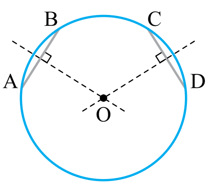


پاسخ ۳ با توجه به شکل، U و V هر دو از دو سر پاره‌خط PQ به یک فاصله‌اند، پس روی عمودمنصف PQ قرار دارند و با وصل‌کردن آن‌ها به هم، عمودمنصف به دست می‌آید (۱).

دو مثلث PUQ و PVQ به حالت (ض ض ض) با هم همنهشت‌اند (۴).

در مثلث متساوی‌الساقین PUV، PM ارتفاع وارد بر قاعده است، پس بر عمودمنصف قاعده واقع است، یعنی PQ عمودمنصف UV است (۲).

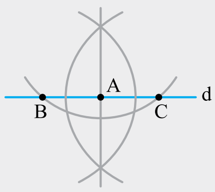
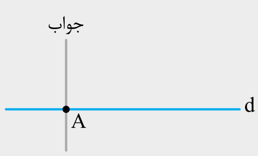
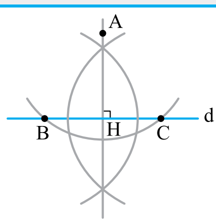
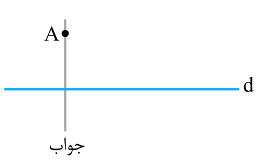
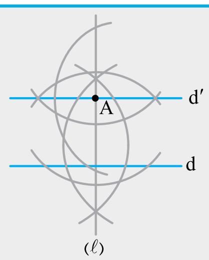
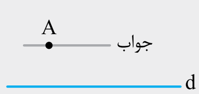
اما چهارضلعی PUQV لوزی است، چون چهار ضلع آن با هم مساوی هستند ولی دلیلی برای مربع‌بودن آن نداریم.



مثال میدان یک شهر به صورت دایره است. می‌خواهیم مرکز آن را یافته و در آن‌جا مجسمه‌ای قرار دهیم. به کمک وسایل ترسیم و ترسیم‌های مقدماتی، مرکز این دایره را بیابید.

پاسخ می‌دانیم که مرکز دایره روی عمودمنصف‌های وترهای آن قرار دارد. دو وتر دلخواه AB و CD (که باهم موازی نباشند) را می‌کشیم و عمودمنصف‌های آن‌ها را رسم می‌کنیم، محل برخورد این عمودمنصف‌ها مرکز دایره را نشان می‌دهد.

حالا که رسم عمودمنصف را یاد گرفتیم، می‌توانیم رسم‌های زیر را انجام دهیم:

هدف	شرح مراحل	تعداد استفاده از خط‌کش و پرگار	شکل	جواب
الف) رسم خطی عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی آن.	به مرکز A و شعاع دلخواه کمان می‌زنیم تا خط d را در B و C قطع کند. حالا عمودمنصف BC را می‌کشیم.	۴ (۳ کمان و یک خط)		
ب) رسم خطی عمود بر یک خط از نقطه‌ای بیرون آن.	به مرکز A و شعاع بزرگ‌تر از AH کمان می‌زنیم تا خط d را در B و C قطع کند. حالا عمودمنصف BC را می‌کشیم.	۴ (۳ کمان و یک خط)		
پ) رسم خطی موازی یک خط از نقطه‌ای بیرون آن.	ابتدا مانند حالت (ب)، از نقطهٔ A عمودی به خط d رسم می‌کنیم (ℓ). حالا از روی نقطهٔ A عمودی بر خط (ℓ) رسم می‌کنیم. d' جواب نهایی است.	۸ (۶ کمان و ۲ خط)		

تست ۲ **در رسم خطی موازی با خط داده‌شده از یک نقطهٔ غیرواقع بر آن، کدام‌یک از موارد زیر به کار نمی‌رود؟**

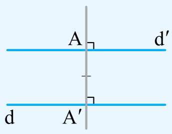
۱) دو خط موازی با یک خط، با هم موازی‌اند. ۲) در صفحه، دو خط عمود بر یک خط، با هم موازی‌اند.

۳) از یک نقطه روی یک خط، می‌توان خطی عمود بر آن رسم کرد. ۴) از یک نقطهٔ غیرواقع بر یک خط، می‌توان خطی عمود بر آن رسم کرد.

پاسخ ۱ نقطهٔ A و خط d در صفحه را در نظر می‌گیریم، ابتدا از نقطهٔ A خطی بر d عمود کرده و نقطهٔ تقاطع را A' می‌نامیم (۴). سپس از نقطهٔ A، خط d' را عمود بر AA' رسم می‌کنیم (۳).

دو خط d و d' هر دو بر خط AA' عمود هستند؛ بنابراین با هم موازی‌اند (۲).

تنها از مورد بیان‌شده در (۱) استفاده نشده است.

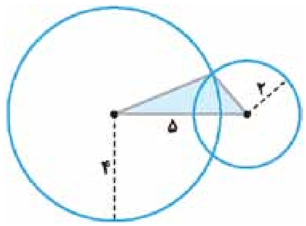


رسم مثلث

دقت کنید که مسائل ترسیم بسیار متنوع و بعضی از آن‌ها بسیار سخت هستند. ما در این قسمت فقط یک سری حالت خاص را که با معلومات کتاب درسی قابل حل هستند، بررسی می‌کنیم، اما بدانید که مسائل رسم، محدود به این حالت‌ها نیستند و بسیار گسترده‌تر هستند!

در ابتدا چند حالت ساده‌تر در رسم مثلث را بررسی می‌کنیم و سپس به سراغ حالت‌های دشوارتر می‌رویم.

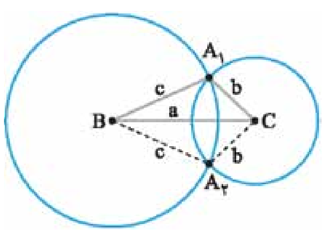
۱. ترسیم مثلث با داشتن طول اضلاع



اگر بخواهیم مثلثی با طول اضلاع ۲، ۴ و ۵ بکشیم چه کار می‌کنیم؟

پاره‌خطی به طول یک ضلع می‌کشیم، مثلاً به طول ۵:

سپس از یک سر آن باید دایره به شعاع ۲ و از سر دیگر دایره به شعاع ۴ رسم کنیم، محل برخورد این دو دایره، رأس سوم مثلث است:



حالا اگر اضلاع مثلث a، b و c باشند، ابتدا پاره‌خطی به طول ضلع a می‌کشیم. سپس به مرکز یک سر پاره‌خط دایره به شعاع b و به مرکز سر دیگر پاره‌خط دایره به شعاع c می‌زنیم، محل برخورد این دو دایره رأس سوم مثلث است.

تذکر در شکل‌رسم شده، دو مثلث A_1BC و A_2BC بنا به حالت (ض ض ض) همنهشت هستند و در واقع یک مثلث محسوب می‌شوند.

راستی شرط این‌که دایره‌های به شعاع b و c متقاطع باشند، این است که $b+c<a$، پس می‌توان گفت:

برای آن‌که مثلثی به طول اضلاع a، b و c قابل رسم باشد، باید طول هر کدام از ضلع‌ها از مجموع دوتای دیگر کم‌تر باشد، یعنی باید نامساوی‌های $a<b+c$، $b<c+a$ و $c<a+b$ برقرار باشد.

نکته در صورتی‌که طول ضلع‌های یک مثلث را بدانیم، اگر طول بزرگ‌ترین آن‌ها از مجموع دوتای دیگر کوچک‌تر باشد، مثلث قابل رسم است، یعنی دو نامساوی دیگر خودبه‌خود برقرارند و لازم نیست برقراری آن‌ها را بررسی کنیم.

مثال **در هر کدام از حالت‌های زیر مشخص کنید مثلثی که طول سه ضلع آن داده شده است، قابل رسم است یا خیر؟**

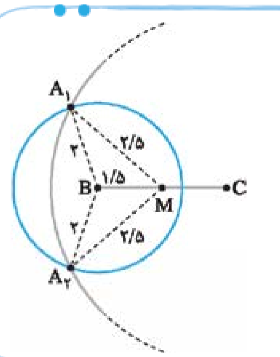
الف) ۲، ۳ و ۵ **ب) $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$ و ۳**

پاسخ الف) بزرگ‌ترین عدد از میان ۲، ۳ و ۵، عدد ۵ است که مجموع آن از دوتای دیگر کم‌تر نیست $3+2 \nless 5$، پس مثلثی به طول اضلاع ۲، ۳ و ۵ وجود ندارد.

ب) می‌دانیم $\sqrt{2} \simeq 1/4$ و $\sqrt{3} \simeq 1/7$، پس $\sqrt{3}+\sqrt{2} < 3$ و در نتیجه مثلثی به طول اضلاع $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$ و ۳ قابل رسم است.

۲. رسم مثلث با داشتن طول دو ضلع و میانهٔ وارد بر یکی از آن‌ها

با حل یک مثال، قشنگ دستتان می‌آید که در این حالت، باید چه کار کنید:



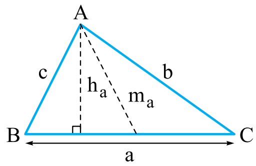
مثال **در مثلث ABC، می‌دانیم $BC=3$ و $AM=2/5$ میانهٔ وارد بر این ضلع است. اگر $AB=2$، روش رسم این مثلث را توضیح دهید و بگویید با این اطلاعات چند مثلث قابل رسم است؟**

پاسخ پاره‌خط $BC=3$ (یعنی ضلعی که میانهٔ وارد بر آن را داریم.) را در نظر می‌گیریم، با توجه به این‌که $AB=2$، رأس A روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۲ قرار دارد و با توجه به این‌که $AM=2/5$، رأس A روی دایره‌ای به مرکز M (وسط BC) و شعاع $2/5$ قرار دارد، پس نقطهٔ برخورد این دو دایره، رأس A است، همان‌طور که می‌بینید، این دو دایره در دو نقطهٔ (A_1 و A_2) متقاطع‌اند، اما به دلیل آن‌که دو مثلث A_1BC و A_2BC به حالت (ض ض ض) همنهشت هستند، مسئله **یک جواب** دارد.

۳. رسم مثلث با داشتن طول دو ضلع و ارتفاع وارد بر یکی از آن‌ها

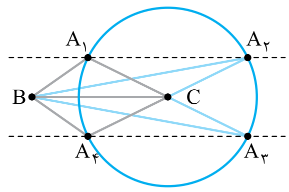
مثل حالت قبل، با حل یک مثال ببینید که در این حالت باید چه‌کار کنیم:

مثال **روش رسم مثلث ABC را با معلومات $a = ۳$ ، $b = ۲$ و $h_a = ۱$ (ارتفاع وارد بر ضلع a) توضیح دهید و بگویید با این اطلاعات، چند مثلث قابل رسم است؟**



پاسخ اول بگوییم که در هندسه قرارداد می‌کنیم که در مثلث ABC، طول هر ضلع را با حرف کوچک رأس روبه‌روی آن نشان می‌دهیم، یعنی $BC = a$ ، $AC = b$ و $AB = c$. ضمن آن‌که ارتفاع و میانه را به ترتیب با h و m نشان می‌دهیم، مثلاً منظور از h_a ارتفاع وارد بر ضلع به طول a و منظور از m_b میانهٔ وارد بر ضلع به طول b است.

حالا به سراغ حل سؤال برویم:



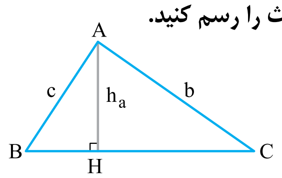
ضلع $BC = a = ۳$ (یعنی ضلعی که طول ارتفاع وارد بر آن را داریم.) را در نظر می‌گیریم. با توجه به این‌که $AC = b = ۲$ ، رأس A روی دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۲ قرار دارد و با توجه به این‌که $AH = h_a = ۱$ ، یعنی فاصلهٔ رأس A از BC برابر با ۱ است، پس رأس A روی دو خط موازی با BC و به فاصلهٔ ۱ از آن قرار دارد. همان‌طور که می‌بینید، این دو خط، دایره را در چهار نقطه قطع می‌کنند، اما به دلیل آن‌که دو مثلث A_4BC و A_1BC با هم و دو مثلث A_2BC و A_3BC نیز با هم همنهشت هستند، مسئله **دو جواب** دارد.

حالا می‌خواهیم دو حالت مشکل‌تر را بررسی کنیم. ابتدا توجه کنید که در مسائل پیش رو، به دلیل سخت‌ترشدن مسائل ترسیم، حتماً باید ابتدا مسئله را حل‌شده فرض کنیم تا اولاً تصویر درستی از آن‌چه قرار است رسم شود داشته باشیم و ثانیاً روابط موجود در شکل را بیابیم.

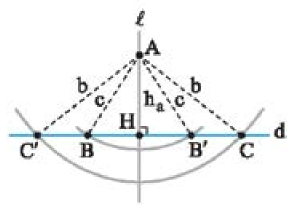
۴. رسم مثلث با معلوم‌بودن دو ضلع و ارتفاع وارد بر ضلع سوم

مثال را ببینید:

مثال **از مثلث ABC اندازهٔ ضلع‌های $AB = c$ و $AC = b$ و طول ارتفاع $AH = h_a$ معلوم است. مثلث را رسم کنید.**

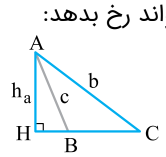


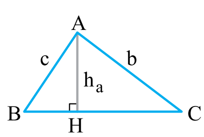
پاسخ ابتدا مسئله را حل‌شده فرض می‌کنیم؛ یعنی فرض می‌کنیم مثلث ABC با اطلاعات مذکور به صورت مقابل رسم شده است. حال باید روش ایجاد چنین مثلثی را بیابیم.



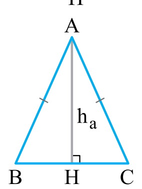
روش رسم: خط دلخواه d را در صفحه رسم می‌کنیم. از نقطهٔ دلخواه H روی خط، خط ℓ را عمود بر d خارج می‌کنیم. از H کمانی به اندازهٔ h_a می‌زنیم تا ℓ را در A قطع کند؛ سپس به مرکز A دایره‌ای به شعاع c می‌زنیم تا d را در نقاط B و B' قطع نماید. به همین ترتیب به مرکز A و این بار به شعاع b دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در C و C' قطع کند. مطابق شکل روبه‌رو، چهار مثلث ABC، $AB'C'$ ، $AB'C$ و ABC' مثلث‌های مطلوب‌اند ولی چون $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{AB'C'}$ و $\overset{\Delta}{ABC'} \cong \overset{\Delta}{AB'C}$ ، پس دو نوع مثلث ایجاد می‌شود که یک نوع، حاده‌الزاویه و نوع دیگر، منفرجه‌الزاویه است.

نکته در مثال قبل با توجه به مقادیر مختلفی که b، c و h_a دارند، حالت‌های زیر می‌تواند رخ بدهد:

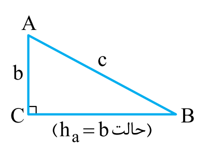


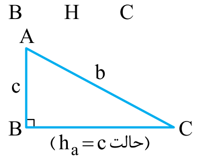


۱) اگر دو شرط $\begin{cases} b \neq c \\ h_a < b, c \end{cases}$ برقرار باشند، دو نوع مثلث **حاده‌الزاویه و منفرجه‌الزاویه** ایجاد می‌شود.

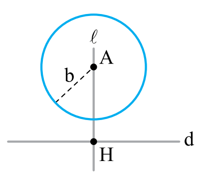


۲) اگر $\begin{cases} b = c \\ h_a < b, c \end{cases}$ ؛ یک نوع **مثلث متساوی‌الساقین** ایجاد می‌شود.





۳) اگر $\begin{cases} b \neq c \\ h_a = c \text{ یا } h_a = b \end{cases}$ یک نوع **مثلث قائم‌الزاویه** ایجاد می‌شود.



۴) اگر $h_a > b$ یا $h_a > c$ ؛ هیچ مثلثی تشکیل نمی‌شود؛ زیرا مطابق شکل، دایره‌هایی به شعاع b و c خط d را قطع نمی‌کنند یا به عبارتی دیگر، وتر هیچ‌گاه از ضلع قائمه کوچک‌تر نمی‌شود.

تذکر به کاری که در نکتهٔ صفحهٔ قبل انجام دادیم، **بحث** در تعداد جواب‌های مسئلهٔ ترسیم گفته می‌شود.

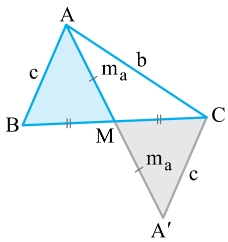
تست ۱ **در رسم مثلث ABC با معلومات $c = ۱۰$ ، $b = ۳$ و h_a ، دو نوع مثلث ایجاد شده است. h_a چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟**

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) بی‌شمار

پاسخ ۲ برای این‌که مسئله ۲ جواب متمایز داشته باشد، باید $\begin{cases} b \neq c \\ h_a < b, c \end{cases}$ لذا داریم: $h_a < ۳, h_a < ۱۰ \Rightarrow ۰ < h_a < ۳$

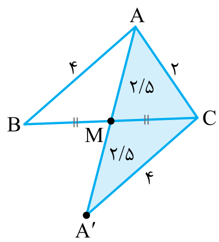
که این بازه دارای ۲ مقدار صحیح است؛ یعنی $h_a = ۱$ یا $h_a = ۲$ می‌تواند باشد؛ پس ۲ درست است.

۵. رسم مثلث با معلوم‌بودن طول دو ضلع و میانهٔ وارد بر ضلع سوم



فرض کنید می‌خواهیم مثلث ABC را با معلوم‌بودن دو ضلع b و c و میانهٔ m_a رسم کنیم. اساس کار در این حالت، این است که اگر میانهٔ m_a را از طرف نقطهٔ M به اندازهٔ خودش تا A' امتداد داده و از A' به C وصل کنیم، آن‌گاه دو مثلث ABM و $A'CM$ بنا به حالت (ض ز ض) همنهشت خواهند بود، در نتیجه $A'C = c$ ، یعنی مثلث ACA' به طول اضلاع b، c و $۲m_a$ است که طول اضلاع آن را داریم، به کمک رسم مثلث ACA' ، می‌توانیم مثلث ABC را هم رسم کنیم، مثال بعد را ببینید تا خوب دستتان بیاید.

مثال **از مثلث ABC، دو ضلع $b = ۲$ و $c = ۴$ و میانهٔ $m_a = ۲/۵$ معلوم‌اند، روش رسم مثلث را توضیح دهید و بگویید مسئله چند جواب دارد؟**



پاسخ اول مسئله را حل‌شده فرض می‌کنیم. اگر میانهٔ AM را از طرف M به اندازهٔ خودش تا A' امتداد دهیم، با توجه به آن‌چه در بالا گفتیم، مثلث $A'AC$ به طول اضلاع $AA' = ۵$ ، $AC = ۲$ و $A'C = ۴$ را داریم که قابل رسم است. (چون طول ضلع بزرگ‌تر آن از مجموع دو ضلع دیگر کم‌تر است $۵ < ۲ + ۴$)

پس مثلث $A'AC$ را با معلوم‌بودن طول سه ضلع آن رسم می‌کنیم. (روش رسم مثلث را با معلوم‌بودن طول سه ضلع آن بلدید.) حالا کافی است از رأس C به نقطهٔ M (وسط AA') وصل کرده، به اندازهٔ خودش امتداد دهید تا به نقطهٔ B برسید و از B به A وصل کنید تا مثلث ABC رسم شود.

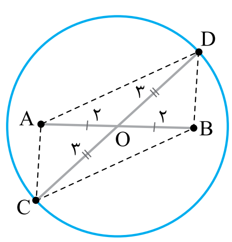
رسم مثلث ABC وابسته به رسم مثلث $A'AC$ است، چون یک مثلث $A'AC$ می‌توانیم رسم کنیم، پس یک مثلث ABC هم قابل رسم است.

رسم متوازی‌الاضلاع

در مورد ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع، در فصل سوم همین کتاب، به طور مفصل صحبت خواهیم کرد. در این قسمت از یک ویژگی متوازی‌الاضلاع که در سال نُهم آن را خوانده‌اید استفاده می‌کنیم:

ویژگی: قطرهای هر متوازی‌الاضلاع، همدیگر را نصف می‌کنند و هر چهارضلعی‌ای که قطرهای آن همدیگر را نصف کنند، متوازی‌الاضلاع است.

مثال **روش رسم متوازی‌الاضلاعی را که طول قطرهای آن ۴ و ۶ است،توضیح دهید و بگویید با این معلومات، چند متوازی‌الاضلاع می‌توان رسم کرد؟**



پاسخ ابتدا AB را به طول ۴ رسم می‌کنیم. سپس دایره‌ای به مرکز O (وسط AB) و شعاع ۳ رسم می‌کنیم. قطر دلخواه CD را نگاه کنید. با وصل‌کردن A، B، C و D به همدیگر، یک چهارضلعی به وجود می‌آید که قطرهایش منصف یکدیگرند پس متوازی‌الاضلاع است. اندازهٔ قطرهایش هم که ۴ و ۶ است.

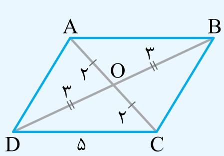
CD هر قطر دیگری از این دایره (البته غیر از قطر گذرنده از A و B!) باشد، باز هم چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاعی به طول قطرهای ۴ و ۶ است، پس با توجه به این‌که دایره بی‌شمار قطر دارد، بی‌شمار متوازی‌الاضلاع به طول قطرهای ۴ و ۶ می‌توانیم رسم کنیم.

البته خیلی‌وقت‌ها، این‌که مسئله را حل‌شده فرض کنید و یک شکل فرضی برای تحلیل سؤال رسم کنید، بسیار به شما کمک می‌کند.

تست ۲ **چند متوازی‌الاضلاع به طول قطرهای ۴ و ۶ وجود دارد که طول یکی از ضلع‌های آن ۵ باشد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

پاسخ ۳ مسئله را حل‌شده فرض می‌کنیم، باید شکل روبه‌رو را داشته باشیم.



اگر بتوانیم مثلث OCD را رسم کنیم با امتداددادن OC و OD از طرف O به اندازهٔ خودشان به ترتیب A و B پیدا می‌شوند و می‌توانیم متوازی‌الاضلاع ABCD را رسم کنیم. اما با معلوماتی که سؤال داده، مثلث OCD قابل رسم نیست چون $۳ + ۲ \not> ۵$ ، پس متوازی‌الاضلاع مورد نظر هم قابل رسم نیست.

چند چیز را هم باید یادتان باشد

(۱) اگر ضلع‌های یک متوازی‌الاضلاع با هم برابر باشند، اسم آن را می‌گذاریم لوزی. در لوزی قطرها عمودمنصف هم هستند.

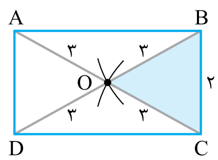
(۲) اگر زاویه‌های یک متوازی‌الاضلاع با هم برابر باشند، (یعنی هر چهارتا قائمه باشند)، اسم آن را می‌گذاریم **مستطیل**. در مستطیل قطرها با همدیگر برابرند.

(۳) مربع، متوازی‌الاضلاعی است که هر چهار زاویهٔ آن با هم برابرند (یعنی قائمه‌اند) و هر چهار ضلع آن هم با هم برابرند، پس هم خاصیت مستطیل را دارد، یعنی قطرهایش با هم برابرند و هم خاصیت لوزی را دارد، یعنی قطرهایش عمودمنصف هم هستند.

البته باز هم تأکید می‌کنیم هرچند که سال قبل این‌ها را خوانده‌اید، اما در فصل سوم همین کتاب، به طور کامل‌تر در مورد این ویژگی‌ها صحبت می‌کنیم، فعلاً در حدی که نیازمان را در مسائل ترسیم برآورده کند، این چند ویژگی را در مورد متوازی‌الاضلاع‌های خاص (یعنی مستطیل، لوزی و مربع) یادآوری کردیم.

حالا با هم مثالی در مورد رسم مستطیل حل می‌کنیم.

مثال **چگونه می‌توان مستطیلی به طول ضلع ۲ و طول قطر ۶ رسم کرد؟**

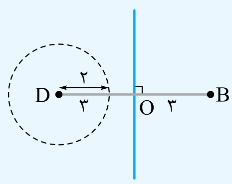


پاسخ پاره‌خط $BC = ۲$ را در نظر گرفته، به مرکزهای B و C، کمان‌هایی به شعاع ۳ رسم می‌کنیم تا همدیگر را در O قطع کنند، حالا از B به O وصل کرده، پاره‌خط حاصل را از طرف O به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا D به دست آید، به همین ترتیب با امتداد CO از طرف O به اندازهٔ خودش A به دست می‌آید. در چهارضلعی ABCD، قطرها همدیگر را نصف می‌کنند و با هم برابرند، پس این چهارضلعی مستطیل است.

یک تست هم در مورد رسم لوزی حل کنیم.

تست **چند لوزی به طول ضلع ۲ و قطر ۶ می‌توان رسم کرد؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

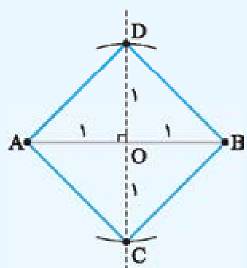


پاسخ (۱) می‌دانیم که قطرهای لوزی عمودمنصف یکدیگرند، پس ابتدا پاره‌خطی به طول ۶ می‌کشیم و عمودمنصف آن را رسم می‌کنیم. حالا دایره‌ای به مرکز D و شعاع ۲ رسم می‌کنیم. محل برخورد این دایره با عمودمنصف BD، جای دو رأس دیگر را تعیین می‌کند. اما دقت کنید که دایره‌ای به شعاع ۲ اصلاً نمی‌تواند این خط را قطع کند، پس با این اندازه‌ها لوزی قابل رسم نیست!

نکته با داشتن (۱) طول قطر مربع، (۲) طول قطرهای لوزی، (۳) طول یک ضلع و طول قطر مستطیل، (به شرط این‌که طول قطر، از طول ضلع بیشتر باشد!) این چهارضلعی‌ها به صورت منحصربه‌فرد، قابل رسم هستند.

تست **چند مربع به طول قطر ۲ می‌توان رسم کرد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار



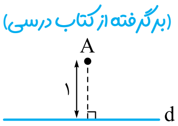
پاسخ (۱) با توجه به نکتهٔ بالا، با معلوم‌بودن طول قطر مربع، مربع به طور منحصربه‌فرد قابل رسم است. اما شاید دوست داشته باشید روش رسم را هم بدانید:

پاره‌خط $AB = ۲$ را در نظر گرفته، عمودمنصف آن را رسم می‌کنیم تا AB را در O قطع کند، حالا سوزن پرگار را روی O قرار داده، پرگار را به اندازهٔ OA (یا OB) باز می‌کنیم و کمانی رسم می‌کنیم تا عمودمنصف را در C و D قطع کند، چهارضلعی ABCD دو قطر برابر دارد که همدیگر را نصف کرده و بر هم عمودند، پس مربع است.

پرسش‌های چهار گزینه‌ای

مجموعه نقاط با فاصلهٔ ثابت از یک نقطه

۱- در شکل زیر، فاصلهٔ A از خط d برابر با ۱ سانتی‌متر است. چند نقطه روی خط d وجود دارد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر باشد؟ (برگرفته از کتاب درسی)



۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

۲- نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ از خط d قرار دارد. می‌خواهیم مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ را طوری رسم کنیم که مساحت آن ۱۲ باشد و دو رأس آن روی خط d باشد، برای یافتن دو رأس مثلث، دایره‌ای به مرکز A و به چه شعاعی بزنیم؟

۱) ۴/۵ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۳

۳- دو نقطهٔ P و Q به فاصلهٔ چهار سانتی‌متر از هم در یک صفحه قرار دارند. چند نقطه در این صفحه وجود دارد که به فاصلهٔ دو سانتی‌متر از P و فاصلهٔ سه سانتی‌متر از Q هستند؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۴- پاره‌خط PQ به طول ۸ سانتی‌متر مفروض است. برای پیداکردن نقطه‌ای که از P به فاصلهٔ دو و از Q به فاصلهٔ شش واحد باشد، حداقل چند کمان باید رسم کنیم؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵- پاره‌خط PQ به طول a مفروض است. می‌دانیم که فقط یک نقطه وجود دارد که از P به فاصلهٔ ۲ و از Q به فاصلهٔ ۴ باشد. مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۶- اگر دو نقطه یافت شود که از نقطهٔ M به فاصلهٔ ۲ و از نقطهٔ N به فاصلهٔ ۷ باشند، فاصلهٔ بین دو نقطهٔ M و N کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

۷- نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ O واقع در این صفحه، از ۱ بیشتر و از ۳ کم‌تر است، تشکیل یک شکل هندسی می‌دهند. مساحت این شکل کدام است؟

۱) π ۲) 8π ۳) ۱ ۴) ۸

۸- فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d برابر با عدد مثبت x است. مجموعه نقاطی مانند M از خط d که در رابطهٔ $x \le AM \le \sqrt{x^2+1}$ صدق می‌کند، تشکیل چه شکلی می‌دهند؟ (آزمون خیلی‌سبز ۱۴۰۱)

۱) یک پاره‌خط ۲) دو پاره‌خط ۳) سه نقطه ۴) یک نیم‌خط

۹- در مثلث ABC، دو رأس B و C ثابت و طول میانهٔ AM برابر با ۲ است. رأس متغیر A روی کدام شکل قرار می‌گیرد؟

۱) خطی موازی با BC به فاصلهٔ ۲ از آن ۲) خطی عمود بر BC به فاصلهٔ ۲ از M

۳) دایره‌ای به قطر ۴ ۴) دایره‌ای به قطر ۲

۱۰- دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۱۰ واحد از هم قرار دارند و دو نقطهٔ P و Q به ترتیب از A و B به فاصله‌های ۶ و ۸ هستند. مساحت چهارضلعی‌ای که B، A، P و Q رأس‌های آن هستند، کدام است؟

۱) ۴۸ ۲) ۶۰ ۳) ۳۶ ۴) ۵۰

۱۱- مربعی به ضلع ۴ مفروض است. اگر A ناحیه‌ای درون مربع باشد که هر نقطهٔ درون آن ناحیه، فاصله‌اش از تمام رأس‌های مربع بیشتر از یک باشد، مساحت ناحیهٔ A کدام است؟

۱) $16-\pi$ ۲) $16-2\pi$ ۳) π ۴) $\frac{\pi}{4}$

۱۲- روی محیط مربعی به طول ضلع ۴، دو نقطه وجود دارد که از یک رأس آن به فاصلهٔ ۵ هستند. فاصلهٔ بین این دو نقطه کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) $\sqrt{3}$

مجموعه نقاط با فاصلهٔ ثابت از یک خط

۱۳- نقطهٔ A روی خط d قرار دارد. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۳ و از خط d به فاصلهٔ ۱/۵ باشد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

۱۴- مربع ABCD به ضلع $3\sqrt{2}$ مفروض است. چند نقطه روی محیط مربع وجود دارد که فاصله‌اش از قطر AC برابر با ۲ باشد؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۱۵- در مثلث ABC، دو رأس B و C ثابت‌اند. اگر طول ارتفاع AH برابر با ۲ باشد، رأس متغیر A روی کدام شکل قرار می‌گیرد؟

۱) دایره‌ای به شعاع ۲ ۲) دایره‌ای به شعاع ۱ ۳) یک خط عمود بر BC ۴) دو خط موازی با BC

۱۶- فاصلهٔ بین دو خط موازی Δ و Δ' برابر با ۴ است. نقاطی که اختلاف فاصله‌های آن‌ها از Δ و Δ' برابر با ۲ است، تشکیل چه شکلی می‌دهند؟

۱) چهار خط موازی با Δ و Δ' ۲) یک خط موازی با Δ و Δ'، بین آن‌ها

۳) دو خط موازی با Δ و Δ'، بین آن‌ها ۴) دو خط موازی با Δ و Δ' یکی بین آن‌ها، دیگری خارج آن‌ها

۱۷- دو خط Δ و Δ' متقاطع‌اند، چند نقطه در صفحهٔ این دو خط وجود دارد که از خط Δ به فاصلهٔ ۱ و از خط Δ' به فاصلهٔ ۱/۵ باشد؟

۱) بستگی به زاویهٔ بین Δ و Δ' دارد. ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۸- نقطهٔ A به فاصلهٔ ۱/۵ واحد از خط d مفرض است. چند نقطه در صفحه یافت می‌شود که از A به فاصلهٔ ۲ واحد و از d به فاصلهٔ ۴ واحد باشد؟ (آزمون خیلی‌سبز ۱۴۰۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۹- چند نقطهٔ متمایز برای رأس C در مثلث ABC واقع در صفحهٔ مختصات می‌توان یافت که فاصلهٔ رأس C از نقطهٔ A و پاره‌خط AB به ترتیب ۷ و ۵ واحد باشد؟ (خارج ریاضی ۹۹)

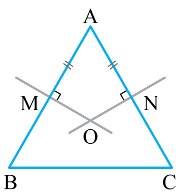
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۰- نقطهٔ M روی خط d قرار دارد. نقاطی که از M به فاصلهٔ ۲/۵ و از d به فاصلهٔ ۲ هستند، رأس‌های یک چهارضلعی هستند. مساحت این چهارضلعی کدام است؟

۱) ۱۰/۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۲/۵

ویژگی مهم نیمساز زاویه

۲۱- مثلث ABC را مطابق شکل در نظر بگیرید. اگر $AN = AM$ و از M و N عمودهایی به AB و AC رسم کنیم تا همدیگر را در O قطع کنند. نقطهٔ O همواره روی .... واقع است.



۱) میانهٔ وارد بر BC

۲) ارتفاع وارد بر BC

۳) نیمساز زاویهٔ A

۴) عمودمنصف BC

۲۲- در مثلثی وسط یکی از ضلع‌ها، از دو ضلع دیگر به یک فاصله است. این مثلث لزوماً .... است.

۱) قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ۲) قائم‌الزاویه ۳) متساوی‌الساقین ۴) متساوی‌الاضلاع

۲۳- مثلث متساوی‌الساقین ABC را که در آن $AB = AC$ در نظر بگیرید، روی خطی که ضلع BC بر آن واقع است، چند نقطه وجود دارد که از دو ضلع AB و AC یا امتدادهای آن‌ها به یک فاصله باشد؟

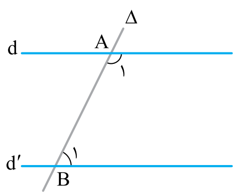
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

۲۴- در مثلث ABC، نیمسازهای دو زاویهٔ داخلی A و B در نقطهٔ O متقاطع‌اند. کدام گزینه در مورد نقطهٔ O درست است؟

۱) می‌تواند بیرون مثلث ABC باشد. ۲) می‌تواند روی محیط مثلث ABC باشد.

۳) از هر سه رأس مثلث ABC به یک فاصله است. ۴) از هر سه ضلع مثلث ABC به یک فاصله است.

۲۵- دو خط ثابت d و d' موازی‌اند. خط متغیر Δ، این خطوط را به ترتیب در A و B قطع کرده است. نقطهٔ تلاقی نیمساز زاویه‌های A_1 و B_1 همواره روی .... است.



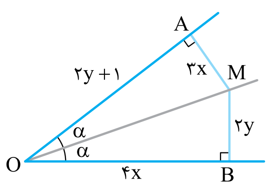
۱) خطی متقاطع با d و d'. ۲) خطی موازی با d و d'.

۳) خط عمود بر d و d'. ۴) دو خط موازی با d و d'.

۲۶- درون چهارضلعی محدب ABCD، چند نقطه وجود دارد که از سه ضلع AB، BC و CD به یک فاصله باشد؟

۱) دقیقاً یک ۲) حداقل یک ۳) حداکثر یک ۴) هیچ

۲۷- با توجه به شکل روبه‌رو، طول OM کدام است؟



۱) ۵

۲) ۱۰

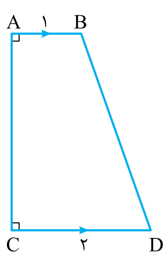
۳) $۵\sqrt{۲}$

۴) $۱۰\sqrt{۲}$

۲۸- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که در آن $\hat{A} = ۹۰^\circ$، نیمساز زاویهٔ داخلی B، ضلع AC را در D قطع می‌کند. اگر $AD = ۳$ و $CD = ۵$، آن‌گاه اختلاف طول‌های دو ضلع AB و BC کدام است؟ (آزمون خیلی‌سبز ۱۴۰۱)

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

۲۹- در شکل روبه‌رو، نیمسازهای دو زاویهٔ B و D روی AC همدیگر را قطع می‌کنند؛ طول AC کدام است؟ (آزمون خیلی‌سبز ۱۴۰۱)



۱) $\sqrt{۵}$

۲) $۲\sqrt{۲}$

۳) ۳

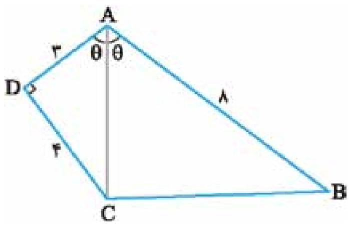
۴) $۱+\sqrt{۲}$

۳۰- مساحت مثلث ABC به اضلاع $AB = ۲$ و $AC = ۳$ برابر با ۲ است. اگر نیمساز داخلی زاویهٔ A، ضلع BC را در D قطع کند، فاصلهٔ D از ضلع AB کدام است؟

۱) ۰/۸ ۲) ۱ ۳) ۰/۹ ۴) ۰/۷۵

۳۱- در مثلث قائم‌الزاویهٔ به اضلاع قائم ۳ و ۷، طول نیمساز زاویهٔ قائمه کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۵)

۱) $۱/۴\sqrt{۲}$ ۲) ۲/۱ ۳) ۲/۸ ۴) $۲/۱\sqrt{۲}$



۳۲- در شکل مقابل، قطر AC نیمساز زاویهٔ A است. مساحت چهارضلعی ABCD کدام است؟

۱) ۱۸
۲) ۲۰
۳) ۲۲
۴) ۳۰

روش رسم نیمساز با خط‌کش و پرگار

۳۳- برای رسم نیمساز زاویهٔ $t\hat{O}u = 60^\circ$، ابتدا کمانی به شعاع R رسم کرده‌ایم که Ot و Ou را به ترتیب در T و U قطع کند. شعاع کمان‌هایی که به مرکزهای T و U رسم می‌شوند، باید حتماً بیش از .... باشند.

۱) $\frac{R}{2}$ ۲) R ۳) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ ۴) $R\sqrt{2}$

۳۴- به مرکز O کمان دلخواهی رسم می‌کنیم تا دو ضلع زاویهٔ xOy را در نقاط A و B قطع کند. حال به مراکز A و B کمان‌هایی با طول بیشتر از نصف AB رسم می‌کنیم تا این کمان همدیگر را در نقطهٔ C درون زاویه قطع کنند. در این صورت کدام گزینه درست نیست؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) OC از وسط AB می‌گذرد. ۲) مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.
۳) OC نیمساز زاویهٔ xOy است. ۴) OC عمود بر پاره‌خط AB است.

مجموعه نقاطی که از دو خط متقاطع به یک فاصله‌اند.

۳۵- مرکز دایره‌هایی که بر دو خط متقاطع مماس هستند، تشکیل چه شکلی می‌دهند؟

۱) یک دایره ۲) یک خط ۳) دو خط عمود بر هم ۴) دو خط موازی

۳۶- روی محیط یک چهارضلعی محدب، چند نقطه وجود دارد که از قطرهای آن به یک فاصله باشد؟

۱) بی‌شمار ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۴

۳۷- دو خط متقاطع d و d' و نقطهٔ A را در نظر می‌گیریم. اگر بدانیم k نقطه وجود دارد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ r و از دو خط d و d' به یک فاصله است، چند مقدار قابل قبول برای k امکان‌پذیر است؟ $(r > 0)$

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

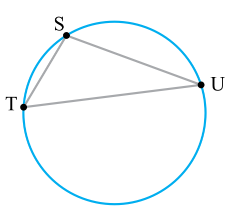
ویژگی مهم عمودمنصف یک پاره‌خط

۳۸- خط d و پاره‌خط AB بر هم عمود نیستند. چند نقطه روی خط d وجود دارد که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

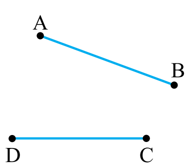
۳۹- تعداد نقاطی که از خط مفروض d به فاصلهٔ واحد و از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشند، کدام نمی‌تواند باشد؟ (آزمون خیلی‌سبز ۱۴۰۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار



۴۰- مطابق شکل، رأس‌های مثلث STU روی محیط یک دایره واقع‌اند. مرکز این دایره نقطهٔ .... است. (برگرفته از کتاب درسی)

۱) برخورد نیمسازهای دو زاویهٔ خارجی T و U
۲) روی نیمساز زاویهٔ TSU واقع
۳) برخورد عمودمنصف‌های TU و TS
۴) امتداد میانهٔ وارد بر TU واقع



۴۱- دو پاره‌خط AB و CD را مطابق شکل مقابل در نظر بگیرید. نقطه‌ای را که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد و از دو نقطهٔ C و D نیز به یک فاصله باشد، O می‌نامیم. اگر نقطهٔ O روی عمودمنصف BC باشد، کدام گزینه همواره صحیح است؟

۱) AC و BC بر یکدیگر عمودند. ۲) نقطهٔ O از دو پاره‌خط AB و CD به یک فاصله است.
۳) نقاط A، B، C و D روی یک دایره واقع‌اند. ۴) نقطهٔ O از دو پاره‌خط AD و BC به یک فاصله است.

۴۲- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = 90^\circ)$، نیمساز زاویهٔ B و عمودمنصف وتر در نقطهٔ N روی ضلع AC متقاطع‌اند. تفاضل دو زاویهٔ حادهٔ این مثلث چند درجه است؟ (آزمون خیلی‌سبز ۱۴۰۲)

۱) صفر ۲) ۲۲/۵ ۳) ۱۵ ۴) ۳۰

۴۳- مثلث ABC یک مثلث حاده‌الزاویه است. عمودمنصف ضلع BC و نیمساز زاویهٔ B در نقطهٔ M خارج مثلث متقاطع‌اند. کدام گزینه درست است؟ (خارج ریاضی ۱۴۰۰)

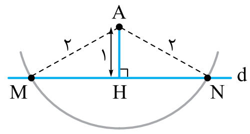
۱) $\hat{A} > \hat{B}$ ۲) $\hat{B} < \hat{A}$ ۳) $\hat{B} > 2\hat{C}$ ۴) $\hat{B} < 2\hat{C}$

۴۴- در مثلث متساوی‌الساقین ABC، نقطهٔ M وسط ساق AB و عمودمنصف آن، ساق AC را در نقطهٔ N قطع می‌کند. اگر $N\hat{B}C = 54^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ $M\hat{N}B$ چند درجه است؟ (ریاضی نوبت اول ۱۴۰۲)

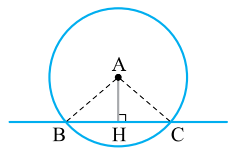
۱) ۴۸ ۲) ۵۶ ۳) ۶۶ ۴) ۷۸

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

۱. گزینه ۳ به مرکز A دایره‌ای به شعاع ۲ رسم می‌کنیم. همان‌طور که می‌بینید، این دایره خط d را در ۲ نقطه قطع می‌کند.



۲. گزینه ۲ اگر مسئله را حل‌شده فرض و شکل مثلث را رسم کنیم، از آن‌جا که مساحت مثلث برابر ۱۲ واحد است، پس داریم:



$$S=۱۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}(AH)(BC)=۱۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}(۴)(BC)=۱۲$$

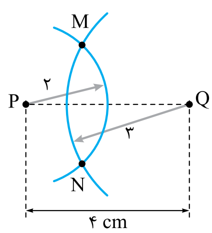
$$\Rightarrow BC=۶ \xrightarrow{\text{مثلث متساوی‌الساقین است.}} BH=HC=۳$$

حالا در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB می‌توانیم بنویسیم:

$$AH^۲+BH^۲=AB^۲ \Rightarrow ۱۶+۹=AB^۲ \Rightarrow AB=۵$$

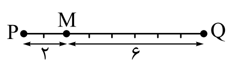
پس طول ضلع $AB=AC$ برابر ۵ است و بنابراین باید دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۵ رسم کنیم.

۳. گزینه ۳ می‌دانیم نقاطی که به فاصلهٔ r از نقطهٔ O هستند روی محیط دایره‌ای به مرکز O و شعاع r قرار دارند؛ پس برای یافتن نقاط به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از نقطهٔ P کمانی به مرکز P و شعاع ۲ سانتی‌متر رسم می‌کنیم و برای یافتن نقاط به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از نقطهٔ Q کمانی به مرکز Q و به شعاع ۳ سانتی‌متر رسم می‌کنیم.



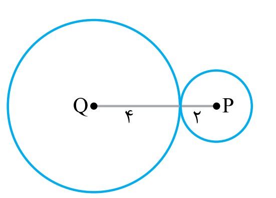
با توجه به شکل، این دو کمان یکدیگر را در دو نقطهٔ M و N قطع می‌کنند؛ پس دو نقطه با این ویژگی‌ها داریم.

۴. گزینه ۱ چون مجموع ۲ و ۶ می‌شود ۸، پس فقط یک نقطه روی پاره‌خط PQ وجود دارد که این ویژگی را داشته باشد:

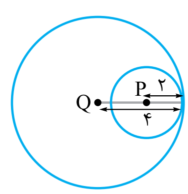


این نقطهٔ M را می‌توانیم با رسم کمانی به مرکز P و شعاع ۲ یا کمانی به مرکز Q و شعاع ۶ پیدا کنیم، پس رسم یک کمان کافی است.

۵. گزینه ۲ با توجه به شکل‌های زیر، برای این‌که فقط یک نقطه وجود داشته باشد که از P به فاصلهٔ ۲ و از Q به فاصلهٔ ۴ باشد باید دایره به مرکز Q و به شعاع ۴ و دایرهٔ دیگر به مرکز P و به شعاع ۲ فقط در یک نقطه بر هم مماس باشند. در حالت (الف) $a=PQ=۴+۲=۶$ و در حالت (ب) $a=PQ=۴-۲=۲$ است؛ پس مجموع مقدارهای ممکن برای x برابر است با $۶+۲=۸$.

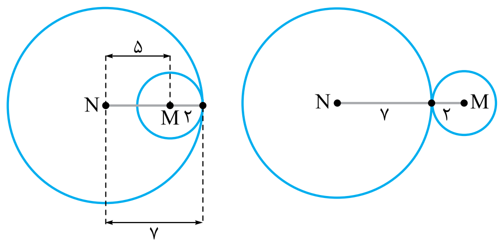


(الف)

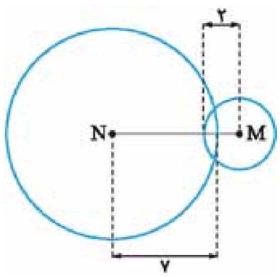


(ب)

۶. گزینه ۳ شکل‌های زیر را ببینید:

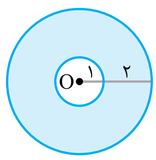


اگر فاصلهٔ بین M و N، ۵ یا ۹ باشد، آن‌گاه دایره‌ای به مرکز M و شعاع ۲ با دایرهٔ به مرکز N و شعاع ۷، در یک نقطه مشترک‌اند؛ پس باید فاصلهٔ بین M و N، عددی بین ۵ و ۹ باشد تا این دو دایره همدیگر را در دو نقطه قطع کنند:



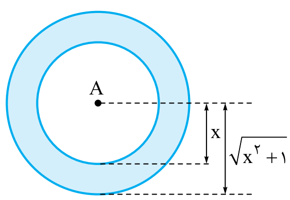
پس فقط ۳ می‌تواند درست باشد.

۷. گزینه ۲ با توجه به شکل، نقاطی که فاصله‌شان از O بیشتر از ۱ و کم‌تر از ۳ باشد در ناحیه‌ای محدود به دایره به شعاع ۱ و ۳ قرار می‌گیرند و مساحت این ناحیه برابر است با تفاضل مساحت این دو دایره یعنی $۹\pi-\pi=۸\pi$. (مساحت دایره را که می‌شد $\pi r^۲$ حتماً یادتان هست؟!)

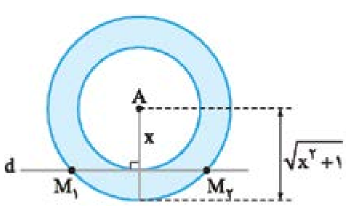


۸. گزینه ۱ قبل از این‌که شروع به حل سؤال کنیم، توجه کنید که می‌دانیم برای هر عدد حقیقی x، داریم $x^۲<x^۲+۱$؛ پس $\sqrt{x^۲}<\sqrt{x^۲+۱}$، یعنی $|x|<\sqrt{x^۲+۱}$ که اگر x مثبت باشد، آن‌گاه $|x|=x$ و داریم $x<\sqrt{x^۲+۱}$.

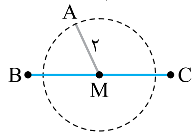
حالا رابطه را به صورت دو نامعادله می‌نویسیم؛ یعنی می‌گوییم نقاطی مانند M از خط d را می‌خواهیم که $x\le AM$ و $AM\le\sqrt{x^۲+۱}$.



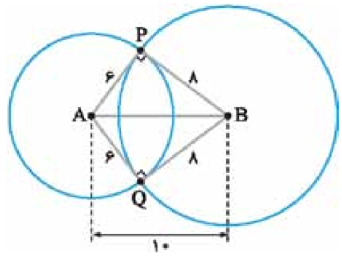
نقاطی که از نقطهٔ A به فاصلهٔ x هستند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع x واقع‌اند و به همین ترتیب نقاطی که روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع $\sqrt{x^۲+۱}$ واقع‌اند، از A به فاصلهٔ $\sqrt{x^۲+۱}$ هستند؛ پس اگر نقطه‌ای مانند M واقع بر این دایره یا بین آن‌ها باشد، در رابطهٔ $x\le AM\le\sqrt{x^۲+۱}$ صدق می‌کند. خط d از نقطهٔ A به فاصلهٔ x است، پس بر دایرهٔ به مرکز A و شعاع x مماس است. پس با توجه به شکل، پاره‌خط $M_۱M_۲$، مجموعه نقاطی مانند M از خط d است که در رابطهٔ $x\le AM\le\sqrt{x^۲+۱}$ صدق می‌کنند.



۹. گزینهٔ ۳ دو رأس B و C ثابت‌اند؛ پس نقطهٔ M وسط BC هم نقطه‌ای ثابت است. از آن‌جا که $AM = ۲$ ، یعنی فاصلهٔ نقطهٔ متغیر A از نقطهٔ ثابت M برابر ۲ است؛ پس A روی دایره‌ای به مرکز M و شعاع ۲ (یا به عبارت دیگر قطر ۴) واقع است.

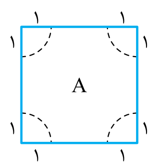


۱۰. گزینهٔ ۱ برای یافتن P و Q، دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۶ و دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۸ رسم می‌کنیم، نقاط برخورد آن‌ها P و Q را مشخص می‌کند. این چهارضلعی از دو مثلث قائم‌الزاویهٔ همنهشت PAB و QAB تشکیل شده است (دقت کنید که در این دو مثلث، رابطهٔ فیثاغورس برقرار است، یعنی $۸^۲ + ۶^۲ = ۱۰^۲$)؛ پس کافیست مساحت یکی از مثلث‌ها را یافته، دو برابر کنیم:



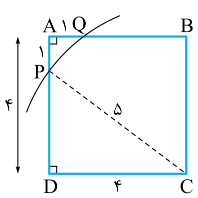
$$S(APBQ) = ۲S(PAB)$$
$$\Rightarrow S(APBQ)$$
$$= ۲(\frac{۱}{۲}AP.BP) = ۶ \times ۸ = ۴۸$$

۱۱. گزینهٔ ۱ طبق شکل، نقاطی از سطح مربع که فاصله‌شان از یکی از رأس‌های مربع کوچک‌تر یا مساوی ۱ واحد است، درون چهار ربع دایره به مرکز هر کدام از رأس‌ها و به شعاع ۱ واحد قرار دارند؛ پس نقاط خارج از این ربع دایره‌ها همان ناحیهٔ A را تشکیل می‌دهند. برای پیداکردن مساحت ناحیهٔ A باید مساحت چهار ربع دایره یا $۱ = ۴ \times \frac{۱}{۴}$ دایره از مساحت مربع کم کنیم:



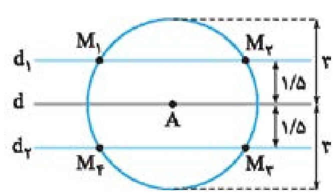
$$\text{مساحت ناحیهٔ } A = S_{\text{مربع}} - S_{\text{دایره}} = ۴^۲ - \pi(۱)^۲ = ۱۶ - \pi$$

۱۲. گزینهٔ ۱ به مرکز رأس C، کمانی به شعاع ۵ رسم می‌کنیم، همان‌طور که می‌بینید، این کمان AD و AB را به ترتیب در P و Q قطع می‌کند. حالا مثلث قائم‌الزاویهٔ CDP را ببینید، وتر این مثلث $PC = ۵$ و $CD = ۴$ یک ضلع زاویهٔ قائمهٔ آن است، پس با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، ضلع دیگر زاویهٔ قائمهٔ آن می‌شود $DP = ۳$ ؛ بنابراین $AP = AD - DP = ۱$.

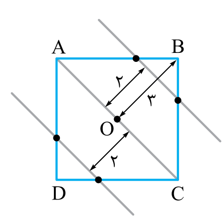


به همین ترتیب داریم $AQ = ۱$ و با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث APQ، داریم $PQ = \sqrt{۲}$.

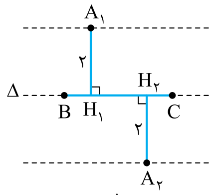
۱۳. گزینهٔ ۳ در شکل زیر، نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۱/۵ هستند، روی دو خط $d_۱$ و $d_۲$ که موازی d و به فاصلهٔ ۱/۵ از آن هستند، قرار دارند و نقاطی که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۳ هستند، روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۳ قرار دارند. این دایره و دو خط $d_۱$ و $d_۲$ یکدیگر را در چهار نقطه $(M_۴, M_۳, M_۲, M_۱)$ قطع می‌کنند؛ پس چهار نقطه با این ویژگی داریم.



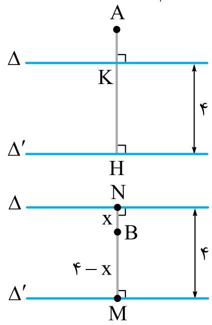
۱۴. گزینهٔ ۱ طول ضلع مربع $۳\sqrt{۲}$ و طول قطر آن ۶ است (چون $AC^۲ = AB^۲ + BC^۲$)، پس فاصلهٔ O تا نقاط D و B برابر با $\frac{۶}{۲}$ یعنی ۳ است. نقاطی که از قطر AC به فاصلهٔ ۲ هستند، دو خط موازی با AC و به فاصلهٔ ۲ از آن هستند. با توجه به این‌که دو خط موازی با AC مربع را در ۴ نقطه قطع می‌کنند، پس مسئله ۴ جواب دارد.



۱۵. گزینهٔ ۴ دو رأس B و C ثابت‌اند، اگر خط گذرنده از B و C را Δ بنامیم، با توجه به این‌که $AH = ۲$ ، فاصلهٔ A از خط Δ برابر ۲ است؛ پس A روی دو خط موازی با Δ و به فاصلهٔ ۲ از آن قرار دارد.



۱۶. گزینهٔ ۳ نقاط مورد نظر، نمی‌توانند بیرون ناحیهٔ بین این دو خط باشند، چون در این صورت اختلاف فاصله‌های آن‌ها از Δ و Δ′ برابر با فاصلهٔ بین Δ و Δ′، یعنی ۴ است؛ مثلاً در شکل مقابل داریم:
$|AH - AK| = KH = ۴$

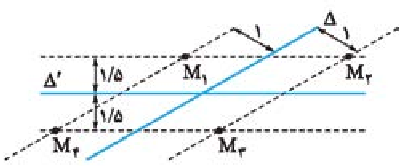


حالا اگر نقطهٔ B بین Δ و Δ′ شرایط سؤال را داشته باشد، با توجه به شکل اگر فاصلهٔ آن را از Δ، x در نظر بگیریم، داریم:

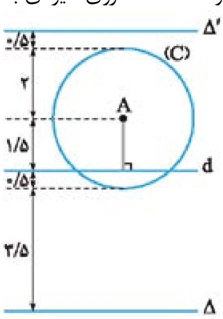
$$|BM - BN| = ۲ \Rightarrow |(۴ - x) - x| = ۲ \Rightarrow |۴ - ۲x| = ۲$$
$$\Rightarrow ۴ - ۲x = \pm ۲ \Rightarrow \begin{cases} ۴ - ۲x = ۲ \Rightarrow x = ۱ \\ ۴ - ۲x = -۲ \Rightarrow x = ۳ \end{cases}$$

یعنی فاصلهٔ B از Δ، ۱ یا ۳ است؛ پس B یا روی d به فاصلهٔ ۱ واحد از Δ قرار دارد، یا روی خط d′ به فاصلهٔ ۳ واحد از Δ.

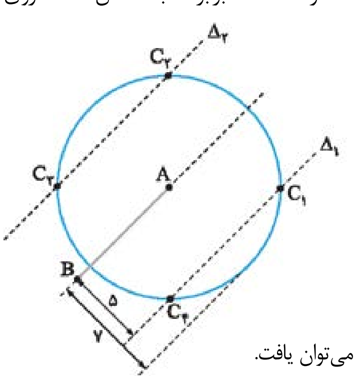
۱۷. گزینهٔ ۴ در شکل زیر دو خط Δ و Δ′ متقاطع‌اند. نقاطی که از Δ به فاصلهٔ ۱ هستند روی دو خط موازی Δ و به فاصلهٔ ۱ از آن قرار دارند و نقاطی که از خط Δ′ به فاصلهٔ ۱/۵ هستند، روی دو خط موازی Δ′ و به فاصلهٔ ۱/۵ از آن قرار دارند. اگر این خط‌ها را رسم کنیم، با توجه به شکل مقابل هر کدام از این خط‌ها جفت خط دیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند، پس در کل در ۴ نقطه $(M_۱, M_۲, M_۳, M_۴)$ متقاطع‌اند؛ پس ۴ نقطه با این دو ویژگی داریم.



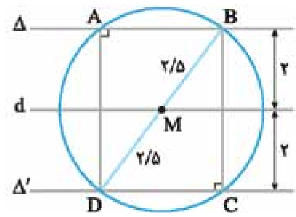
۱۸. گزینهٔ ۴ نقاطی که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۲ واحد هستند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ قرار دارند. (دایرهٔ C در شکل رسم‌شده) نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۴ واحد هستند، روی دو خط موازی با d و به فاصلهٔ ۴ واحد از آن قرار دارند. (دو خط Δ و Δ′ در شکل رسم‌شده) سؤال گفته که نقطهٔ A از خط d به فاصلهٔ ۱/۵ است و نقاطی را می‌خواهیم که هم روی دایرهٔ C و هم روی یکی از دو خط Δ و Δ′ قرار دارند، همان‌طور که در شکل می‌بینید دایرهٔ C هیچ نقطهٔ مشترکی با Δ و Δ′ ندارد؛ یعنی هیچ نقطه‌ای وجود ندارد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۲ و از خط d به فاصلهٔ ۴ باشد.



۱۹. گزینهٔ ۴ اگر فاصلهٔ نقطهٔ C از نقطهٔ A برابر ۷ باشد، آن‌گاه C روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۷ قرار دارد و اگر فاصلهٔ C از AB برابر ۵ باشد، آن‌گاه C روی دو خط موازی با AB و به فاصلهٔ ۵ از آن قرار دارد. ($\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ در شکل مقابل) همان‌طور که می‌بینید، این دایره با $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ در چهار نقطه ($C_۱$، $C_۲$، $C_۳$ و $C_۴$) مشترک است؛ پس برای رأس C، چهار نقطه متمایز می‌توان یافت.

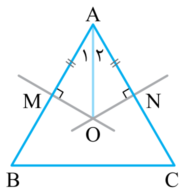


۲۰. گزینه ۳ همان‌طور که می‌بینید، نقاطی که از d به فاصلهٔ ۲ هستند، روی دو خط Δ و Δ' به فاصلهٔ ۲ از خط d و نقاطی که از M به فاصلهٔ ۲/۵ هستند، روی دایره‌ای به مرکز M و شعاع ۲/۵ قرار دارند، این دو خط و این دایره در چهار نقطهٔ A، B، C و D متقاطع‌اند و چهارضلعی ABCD مستطیل است.حالا مثلث قائم‌الزاویهٔ BCD را ببینید، BD = ۵ وتر و BC = ۴ یک ضلع زاویهٔ قائمه است؛ پس با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم CD = ۳ و در نتیجه:

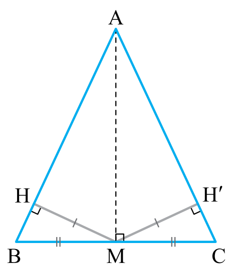


$$S(ABCD) = BC.CD \Rightarrow S(ABCD) = ۴ \times ۳ = ۱۲$$

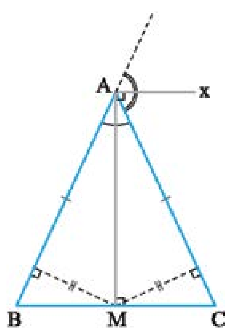
۲۱. گزینه ۳ از A به O وصل می‌کنیم، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AMO و ANO بنا به حالت تساوی وتر و یک ضلع زاویهٔ حاده همنهشت هستند، پس $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$؛ بنابراین AO نیمساز زاویهٔ A است، یعنی O همواره روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد.



۲۲. گزینه ۳ شکل را ببینید، طبق فرض سؤال M وسط BC است؛ پس AM میانهٔ وارد بر ضلع BC است. از طرفی فاصلهٔ M از AB و AC، یعنی دو ضلع زاویهٔ A با هم برابر است؛ پس AM می‌شود نیمساز زاویهٔ A و مثلثی که در آن میانه و نیمساز وارد بر یک ضلع با هم یکی هستند، لزوماً متساوی‌الساقین است.

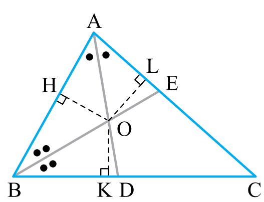


۲۳. گزینه ۱ نقطهٔ برخورد قاعده با نیمساز زاویهٔ روبه‌روی قاعده (که ارتفاع وارد بر قاعده هم هست)، نقطه‌ای از قاعده است که از دو ساق به یک فاصله است. اما روی امتداد BC نقطه‌ای وجود ندارد که از AB و AC به یک فاصله باشد، چون در مثلث متساوی‌الساقین، نیمساز خارجی زاویهٔ روبه‌روی قاعده با قاعده موازی است (به این دلیل که Ax و BC هر دو بر AH عمودند؛ پس با هم موازی‌اند). یعنی Ax با امتداد BC نقطهٔ مشترک ندارد.



توجه در مثلث متساوی‌الساقین، همیشه نیمساز خارجی زاویهٔ روبه‌روی قاعده، با قاعده موازی است.

۲۴. گزینه ۴ هر نیمساز داخلی مثلث، همیشه داخل مثلث قرار دارد؛ پس نقطهٔ برخورد دو نیمساز داخلی هم همیشه داخل مثلث است و گزینه‌های ۱ و ۲ درست نیستند. حالا شکل روبه‌رو را ببینید، داریم:

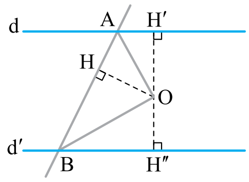


نقطهٔ O روی نیمساز زاویهٔ A واقع است؛ بنابراین از دو ضلع آن به یک فاصله است: $OH = OL$

نقطهٔ O روی نیمساز زاویهٔ B واقع است؛ بنابراین از دو ضلع آن به یک فاصله است: $OH = OK$

پس $OH = OL = OK$، یعنی O از سه ضلع مثلث ABC به یک فاصله است.

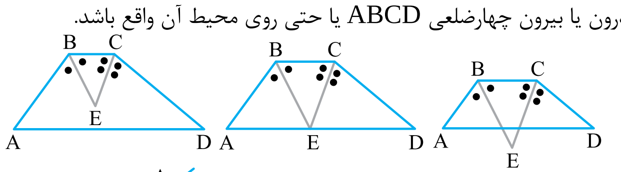
۲۵. گزینه ۲ می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است؛ پس: OA نیمساز زاویهٔ $A_۱$ و OB نیمساز زاویهٔ $B_۱$ است. با توجه به خاصیت نیمساز داریم:



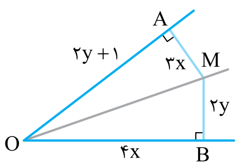
$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_۱ \text{ نیمساز } OA \Rightarrow OH = OH' \\ \hat{B}_۱ \text{ نیمساز } OB \Rightarrow OH = OH'' \end{array}\right\} \Rightarrow OH' = OH''$$

یعنی O نقطه‌ای است که از دو خط موازی d و d' به یک فاصله است؛ بنابراین O روی خطی موازی با d و d' و به فاصله‌ای برابر از آن‌ها قرار دارد.

۲۶. گزینه ۳ اگر نقطه‌ای از دو ضلع AB و BC به یک فاصله باشد، روی نیمساز زاویهٔ ABC و اگر نقطه‌ای از BC و CD به یک فاصله باشد، روی نیمساز زاویهٔ BCD قرار دارد؛ پس نقطهٔ مورد نظر ما، محل برخورد نیمسازهای این دو زاویه است، این نقطه که در شکل‌های زیر آن را E نامیده‌ایم، می‌تواند درون یا بیرون چهارضلعی ABCD یا حتی روی محیط آن واقع باشد.



۲۷. گزینه ۱ M روی نیمساز زاویهٔ $\hat{O}$ قرار دارد، پس دو مثلث OAM و OBM همنهشت‌اند و در نتیجه داریم:

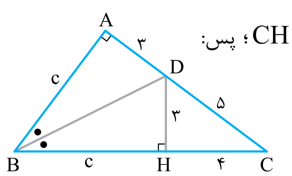


$$\begin{cases} ۳x = ۲y \Rightarrow y = \frac{۳}{۲}x \\ ۲y+۱ = ۴x \xrightarrow{y=\frac{۳}{۲}x} ۲(\frac{۳}{۲}x)+۱ = ۴x \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow y = \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

پس طول OM برابر است با:

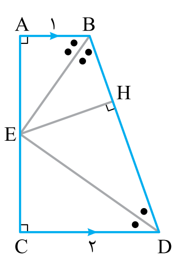
$$OM^۲ = (۳x)^۲ + (۲y+۱)^۲ = ۳^۲ + ۴^۲ = ۹+۱۶ = ۲۵ \Rightarrow OM = ۵$$

۲۸. گزینه ۳ از آن‌جا که D روی نیمساز زاویهٔ B واقع است، اگر از D، عمود DH را بر BC وارد کنیم، دو مثلث ABD و HBD همنهشت خواهند بود؛ پس: $\begin{cases} BH = AB = c \\ DH = AD = ۳ \end{cases}$. حالا مثلث قائم‌الزاویهٔ HCD را ببینید که با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در آن داریم $CH = \sqrt{۵^۲ - ۳^۲} = ۴$؛ پس:



$$BC = c + ۴$$
$$\Rightarrow BC = AB + ۴$$
$$\Rightarrow BC - AB = ۴$$

۲۹. گزینه ۲ نقطهٔ تقاطع نیمسازهای زاویه‌های B و D را E می‌نامیم، داریم:



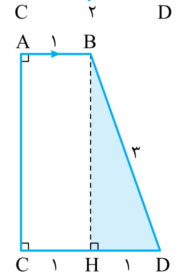
BE نیمساز $\hat{B}$ است، پس:

$$\overset{\triangle}{ABE} \cong \overset{\triangle}{HBE} \Rightarrow BH = AB = ۱$$

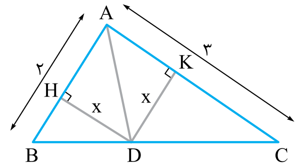
DE نیمساز $\hat{D}$ است، پس:

$$\overset{\triangle}{CDE} \cong \overset{\triangle}{HDE} \Rightarrow DH = CD = ۲$$

پس: $BD = ۳$. با رسم ارتفاع BH در ذوزنقهٔ ABDC و استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ BHD داریم: $BH = \sqrt{۳^۲ - ۱^۲} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$، پس $AC = BH = ۲\sqrt{۲}$.



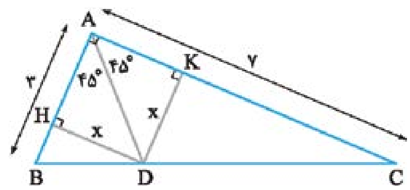
۳۰. گزینه ۱ نقطهٔ D روی نیمساز زاویهٔ A واقع است؛ بنابراین از دو ضلع آن به یک فاصله است، یعنی اگر از D عمودهای DH و DK را بر AB و AC وارد کنیم، آن‌گاه $DH = DK = x$.



حالا سؤال گفته که $S(ABC)=۲$؛ پس: $\Rightarrow S(ABD)+S(ACD)=۲$

$$\Rightarrow \frac{x.AB}{۲}+\frac{x.AC}{۲}=۲ \Rightarrow \frac{x}{۲}(\underbrace{AB+AC}_{۵})=۲ \Rightarrow x=\frac{۴}{۵}=۰/۸$$

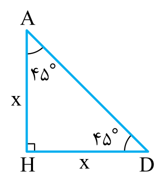
۳۱. گزینه ۴ شکل را ببینید؛ با روش حل سؤال قبل، می‌توانیم $DH = DK = x$ را حساب کنیم:



$$S(ABD)+S(ACD)=S(ABC) \Rightarrow \frac{x.AB}{۲}+\frac{x.AC}{۲}=\frac{AB.AC}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{۲}(AB+AC)=\frac{AB.AC}{۲} \Rightarrow \frac{x}{۲}\times ۱۰=\frac{۲۱}{۲} \Rightarrow x=۲/۱$$

حالا مثلث قائم‌الزاویهٔ AHD را جداگانه ببینید:

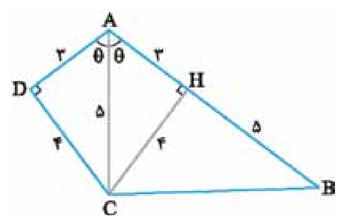


این مثلث یک زاویهٔ حادهٔ ۴۵° دارد؛ پس زاویهٔ حادهٔ دیگر آن هم ۴۵° است، یعنی مثلث متساوی‌الساقین است و $AH = DH = x$. بنا به قضیهٔ فیثاغورس در این مثلث داریم:

$$AD^۲ = AH^۲+DH^۲ \Rightarrow AD^۲ = x^۲+x^۲$$

$$\Rightarrow AD^۲=۲x^۲ \Rightarrow AD=\sqrt{۲}x \xrightarrow{x=۲/۱} AD=۲/۱\sqrt{۲}$$

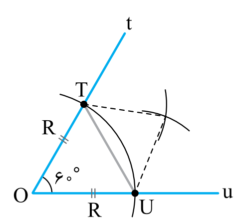
۳۲. گزینه ۳ AC نیمساز زاویهٔ A است؛ پس با توجه به این‌که هر نقطه روی نیمساز فاصله‌اش از دو ضلع زاویه یکسان است، داریم: $CD = CH = ۴$



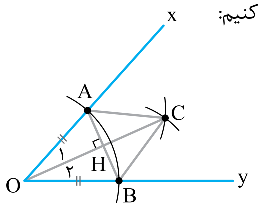
به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ACD داریم $AC=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵$ و از همنهشتی مثلث‌های ACH و ACD داریم $AH = AD = ۳$ و در نتیجه $BH = AB - AH = ۵$. حالا داریم: $S(ABCD)=S(ACD)+S(ABC)$

$$\Rightarrow S(ABCD)=\frac{AD\times CD}{۲}+\frac{AB\times CH}{۲}=\frac{۳\times ۴}{۲}+\frac{۸\times ۴}{۲}=۲۲$$

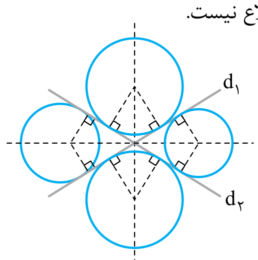
۳۳. گزینه ۱ روش رسم نیمساز زاویه را در درس‌نامه توضیح دادیم، با توجه به شکل، کمان به مرکز O و شعاع R، Ot و Ou را در T و U قطع کرده و $OT = OU = R$؛ پس مثلث OTU، مثلث متساوی‌الساقینی است که زاویهٔ ۶۰° دارد، یعنی متساوی‌الاضلاع است، پس $TU = R$. حالا شعاع کمان‌هایی که به مرکزهای T و U رسم می‌شوند، باید بیش از نصف طول TU (یعنی $\frac{R}{۲}$) باشند تا با هم متقاطع شوند و از وصل‌کردن نقطهٔ تقاطع آن‌ها به O، نیمساز زاویهٔ tOu رسم شود.



۳۴. گزینه ۲ ابتدا شکل مناسب را رسم می‌کنیم: صورت سؤال نحوهٔ رسم نیمساز زاویهٔ $\hat{O}$ است، پس OC نیمساز زاویهٔ $\hat{O}$ است، از طرفی در مثلث متساوی‌الساقین OAB، OH نیمساز زاویهٔ روبه‌روی قاعده است، پس ارتفاع وارد بر قاعده هم هست، یعنی OC بر پاره‌خط AB عمود است؛ بنابراین گزینه‌های ۱، ۳ و ۴ درست‌اند اما ۲ درست نیست، چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است؛ یعنی $AC = BC$ اما لزوماً متساوی‌الاضلاع نیست.

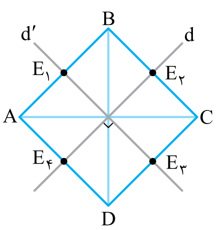


۳۵. گزینه ۳ با توجه به شکل روبه‌رو اگر دایره‌ای بر دو خط متقاطع $d_۱$ و $d_۲$ مماس باشد، فاصلهٔ مرکز دایره از دو خط $d_۱$ و $d_۲$ با هم برابر است.

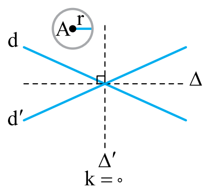


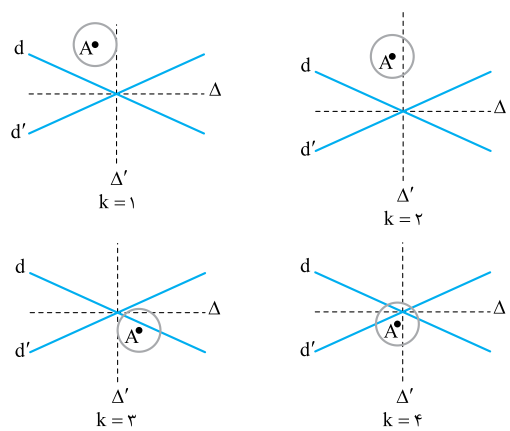
پس مرکز دایره‌های مماس بر دو خط متقاطع نقاطی هستند که فاصله‌شان از اضلاع زاویهٔ بین دو خط متقاطع با هم برابر است؛ بنابراین مرکز دایره‌ها روی نیمساز زاویه‌های دو خط متقاطع قرار می‌گیرند و می‌دانیم نیمسازهای دو خط متقاطع بر هم عمودند؛ پس شکل حاصل از این نقاط، دو خط عمود بر هم است.

۳۶. گزینه ۴ نقاطی که از قطرهای یک چهارضلعی (که حتماً متقاطع هستند) به یک فاصله‌اند، روی نیمسازهای زاویه‌های بین دو قطر قرار دارند (دو خط عمود بر هم d و d′ در شکل روبه‌رو). همان‌طور که می‌بینید، d و d′ در چهار نقطه با محیط چهارضلعی مشترک‌اند، یعنی چهار نقطه روی محیط چهارضلعی محدب ABCD وجود دارد که از قطرهای آن به یک فاصله‌اند. ($E_۱$، $E_۲$، $E_۳$، $E_۴$)

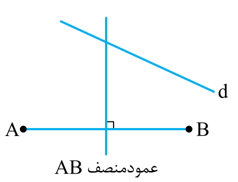


۳۷. گزینه ۱ نقاطی که از A به فاصلهٔ r هستند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع r واقع‌اند و نقاطی که از دو خط متقاطع d و d′ به یک فاصله هستند، روی نیمسازهای زاویه‌های بین d و d′ واقع‌اند (دو خط عمود بر هم Δ و Δ′ در شکل‌های زیر) و ما تعداد نقاط مشترک این دایره با Δ و Δ′ را می‌خواهیم. بسته به این‌که A در چه موقعیتی نسبت به d و d′ قرار داشته باشد، حالت‌های رسم‌شده برای k امکان‌پذیر است:

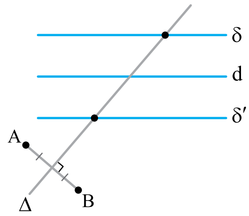




۳۸. گزینه ۲ همهٔ نقطه‌هایی که از A و B به یک فاصله هستند، روی عمودمنصف این پاره‌خط قرار دارند. چون AB و d بر هم عمود نیستند، عمودمنصف AB خط d را دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کند.

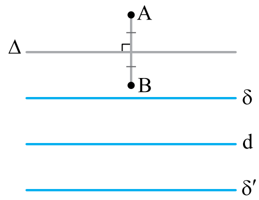


۳۹. گزینه ۱ عمودمنصف AB را Δ و خط‌هایی که از d به فاصلهٔ واحد هستند را δ و δ' می‌نامیم.

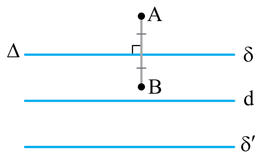


حالا باید ببینیم تعداد نقاط مشترک Δ با δ و δ' چه حالت‌هایی می‌تواند داشته باشد:

۱) اگر Δ با δ و δ' موازی نباشد، تعداد نقاط قابل قبول، دوتاست.

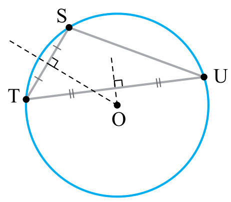


۲) اگر Δ با δ و δ' موازی باشد و بر هیچ‌کدام از آن‌ها منطبق نباشد، تعداد نقاط قابل قبول، صفر است.

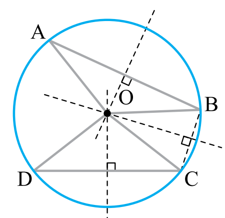


۳) اگر Δ با یکی از دو خط δ و δ' موازی و بر دیگری منطبق باشد، تعداد نقاط قابل قبول، بی‌شمار است.

۴۰. گزینه ۳ می‌دانیم عمودمنصف هر وتر دایره، از مرکز آن دایره می‌گذرد، پس برای پیداکردن مرکز یک دایره کافی است عمودمنصف‌های دو وتر از آن را رسم کنیم، نقطهٔ برخورد این دو عمودمنصف، مرکز دایره است.



۴۱. گزینه ۳ با توجه به شکل زیر، وقتی نقطهٔ O روی عمودمنصف BA، BC و CD قرار دارد، پس حتماً OA = OB = OC = OD، یعنی اگر دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA رسم کنیم، این دایره از سه نقطهٔ B، C و D نیز می‌گذرد؛ پس چهار نقطهٔ A، B، C و D روی یک دایره واقع‌اند.



۴۲. گزینه ۴ نقطهٔ N روی عمودمنصف BC قرار دارد، پس NB = NC و در نتیجه $\overset{\Delta}{NBC}$ متساوی‌الساقین است؛ در نظر می‌گیریم $\hat{B}_۱ = \hat{C} = \alpha$.

از آن‌جا که طبق فرض BN نیمساز زاویهٔ B است، داریم $\hat{B}_۲ = \alpha$.

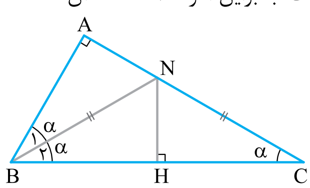
مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° است؛ بنابراین اگر $\hat{A} = ۹۰^\circ$، آن‌گاه:

$$\hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ \Rightarrow ۳\alpha = ۹۰^\circ$$

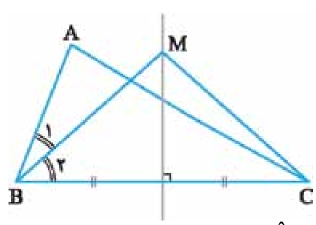
$$\Rightarrow \alpha = ۳۰^\circ$$

و تفاضل دو زاویهٔ حاده می‌شود:

$$|\hat{B}-\hat{C}| = \alpha = ۳۰$$



۴۳. گزینه ۳ مطابق شکل، نیمساز زاویهٔ B و عمودمنصف ضلع BC در نقطهٔ M خارج مثلث متقاطع‌اند.



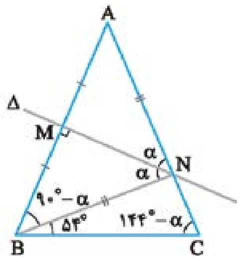
هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاه‌خط به یک فاصله است، پس اگر از M به C وصل کنیم، داریم MB = MC؛ پس مثلث MBC متساوی‌الساقین است و داریم:

$$M\hat{C}B = \hat{B}_۲ \Rightarrow M\hat{C}B = \frac{\hat{B}}{۲} \quad (*)$$

از طرفی زاویهٔ C، بخشی از زاویهٔ MCB است؛ پس داریم:

$$M\hat{C}B > \hat{C} \xrightarrow{(*)} \frac{\hat{B}}{۲} > \hat{C} \Rightarrow \hat{B} > ۲\hat{C}$$

۴۴. گزینه ۳ مطابق شکل، خط Δ عمودمنصف AB است و می‌دانیم که هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است، پس اگر از N به B وصل کنیم، داریم NA = NB، یعنی مثلث NAB متساوی‌الساقین است. در این مثلث متساوی‌الساقین NM ارتفاع وارد بر قاعده و در نتیجه نیمساز زاویهٔ روبه‌روی قاعده، یعنی $A\hat{N}B$ است؛ پس اگر $M\hat{N}B = \alpha$، آن‌گاه $A\hat{N}M = \alpha$.



در مثلث قائم‌الزاویهٔ MBN داریم: $M\hat{B}N = ۹۰^\circ - \alpha$

از آن‌جا که $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی‌الساقین است، داریم:

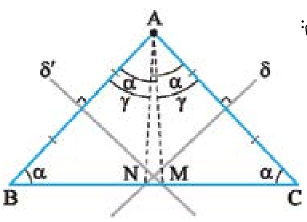
$$\hat{C} = \hat{B} = ۵۴^\circ + (۹۰^\circ - \alpha) = ۱۴۴^\circ - \alpha$$

زاویهٔ ANB، برای مثلث NBC، زاویهٔ خارجی است؛ پس:

$$A\hat{N}B = \hat{C} + N\hat{B}C \Rightarrow ۲\alpha = (۱۴۴^\circ - \alpha) + ۵۴^\circ$$

$$\Rightarrow ۳\alpha = ۱۹۸^\circ \Rightarrow \alpha = ۶۶^\circ$$

۴۵. گزینه ۲ با توجه به شکل، داریم:



$$\overset{\Delta}{ABC}: \hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = ۱۸۰^\circ$$

$$\xrightarrow{\hat{B}=\hat{C}=\alpha} ۸۰^\circ + ۲\alpha = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = ۵۰^\circ$$

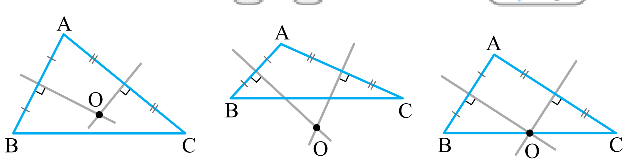
M روی عمودمنصف AC است، پس:

$$MA = MC \Rightarrow M\hat{A}C = \alpha = ۵۰^\circ \Rightarrow \gamma = \hat{A} - \alpha = ۸۰^\circ - ۵۰^\circ = ۳۰^\circ$$

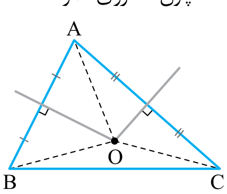
همان‌طور که در شکل معلوم است، کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث AMN، زاویهٔ MAN است و داریم:

$$M\hat{A}N = \alpha - \gamma = ۵۰^\circ - ۳۰^\circ = ۲۰^\circ$$

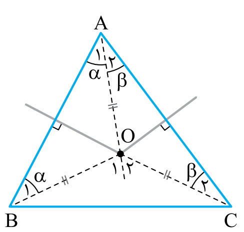
۴۶. گزینه ۳ در مورد گزینه‌های ۱ و ۲، شکل‌های زیر را ببینید:



نقطهٔ O می‌تواند درون، بیرون یا اصلاً روی محیط مثلث ABC باشد، بعداً در مورد این موضوع بیشتر صحبت می‌کنیم. اما ۳ درست است، چون: O روی عمودمنصف AB واقع است، پس OA = OB، از طرفی O روی عمودمنصف AC واقع است، پس OA = OC. بنابراین OA = OB = OC، یعنی O از سه رأس مثلث به یک فاصله است.



۴۷. گزینه ۲ همان‌طور که در سؤال قبل گفتیم، نقطهٔ برخورد عمودمنصف‌های دو ضلع هر مثلث، از هر سه رأس آن به یک فاصله است؛ یعنی OA = OB = OC و در نتیجه مثلث‌های AOB و AOC متساوی‌الساقین هستند، پس $\hat{A}_۱ = \hat{B}_۱ = \alpha$ و $\hat{A}_۲ = \hat{C}_۱ = \beta$، حالا اگر OA را از سمت O امتداد دهیم، داریم:



$$\begin{cases} \overset{\Delta}{AOB}\text{زاویهٔ خارجی}: \hat{O}_۱ = \alpha + \alpha = ۲\alpha \\ \overset{\Delta}{AOC}\text{زاویهٔ خارجی}: \hat{O}_۲ = \beta + \beta = ۲\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow B\hat{O}C = ۲\alpha + ۲\beta = ۲(\alpha+\beta) \Rightarrow \frac{B\hat{O}C}{\hat{A}} = \frac{۲(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta} = ۲$$