مقدمه ناشر

سلام

با شنیدن کلمهٔ جمع‌بندی یاد چه چیزهایی می‌افتید؟

بسته‌بندی، خالی‌بندی، کادربندی، جدول‌بندی، چشم‌بندی، تیتربندی و ... .

راستش را بخواهید یک کتاب جمع‌بندی ممکن است به جای این‌که جمع‌بندی باشد، هر کدام از موارد بالا باشد!

حتماً می‌پرسید چه‌طور؟ جوابش این است که این‌طور:

- اگر کتاب جمع‌بندی طوری نوشته شود که شامل تمام موارد و مفاهیم و نکات باشد و سعی کند هیچ چیزی را از قلم نیندازد، دیگر جمع‌بندی نیست، بلکه بسته‌بندی است. ما در این کتاب‌ها سعی کرده‌ایم این کار را نکنیم؛ فقط موارد اصلی و مهم و حیاتی را آورده‌ایم.
- اگر کتاب جمع‌بندی ادعا کند تمام کنکور را پوشش می‌دهد و همه چیز را دارد و می‌تواند دانش‌آموز را به درصد ۱۰۰ و یا حتی بالاتر برساند، باز هم جمع‌بندی نیست؛ خالی‌بندی است. ما اما، هدفمان در این کتاب‌ها تمرکزکردن روی نکات مهم است، همه چیز را نگفته‌ایم و سعی نکرده‌ایم همهٔ تست‌های کنکور را حدس بزنیم؛ فقط در حد لازم و البته کافی.
- اگر کتاب جمع‌بندی فرقش با کتاب تست معمولی این باشد که مطالب را در جدول و کادر و نمودار بیاورد، می‌شود کتاب کادربندی یا جدول‌بندی.
- اگر کتاب جمع‌بندی ادعا کند که می‌تواند در یک زمان کوتاه چندهفته‌ای، درصد دانش‌آموز را ۶۰ تا ۸۰ درصد بالا ببرد (تازه بعضی‌ها تا ۱۰۰ درصد هم ادعا می‌کنند) کتاب چشم‌بندی است.
- اگر کتاب جمع‌بندی، توضیح و مثال درست و حسابی نداشته باشد و مطالب را تیتروار بیان کند و سریع از هر موضوعی عبور کند، می‌شود کتاب تیتربندی.

خب، دیگر بس است، هر چه که توانستیم در مورد کتاب‌های دیگران غیبت کردیم. اصلاً به ما و شما چه ربطی دارد که بقیه چه‌طورند؟ ما کتابی نوشته‌ایم که قرار است:

- به شما کمک کند در زمان کوتاه یک دورهٔ کامل از تمام مفاهیم اصلی و مهم کتاب درسی‌تان داشته باشید.
- تیپ‌ها و شکل‌های متداول سؤال‌ها را ببینید.
- با مثال‌ها و تمرین‌های مهم کتاب درسی آشنا شوید.
- نمونه سؤال‌های برگزیدهٔ آزمون‌های سراسری سال‌های قبل را ببینید.

با این هدف‌ها، برای نوشتن کتاب‌های جمع‌بندی، رفتیم سراغ حرفه‌ای‌ترین مؤلف‌ها: همهٔ تلاشمان را کردیم که برای هر کدام از درس‌ها یک کتاب ویژه، خوب، به درد بخور، خوش‌دست، خواندنی و جمع‌وجور بنویسیم. به نظرم که توانسته‌ایم قسمت زیادی از آن‌چه را که می‌خواستیم، انجام دهیم.

اما این‌که خودمان بنشینیم و قربان خودمان برویم که کاری ندارد! شما هستید که باید بگویید کارمان چه‌طور بوده؟ آیا کتابی که در دست دارید همهٔ این خوبی‌هایی که گفتیم را دارد؟

برای جواب‌دادن به این سؤال باید شروع کنید به خواندنش؛ جمع‌وجور و روان هم که هست، پس خیلی طول نمی‌کشد. بعدش برایمان بنویسید که به نظرتان چند چندیم؟ خوبی‌های کتاب و همین‌طور بدی‌هایش را به ما بگویید. به نظرتان چه چیزهایی باید اضافه یا کم شوند؟ و خلاصه‌اش این‌که ما برایتان یک کتاب جمع‌وجور نوشته‌ایم، اما شما برایمان یک جواب مفصل بنویسید.

خوش و خاطرجمع باشید.

پرواز را یاد بگیر
نه برای این‌که از زمین جدا شوی؛
برای آن که به اندازهٔ فاصلهٔ زمین تا آسمان گسترده شوی ...

سلام به «خیلی‌سبز»ی‌های عزیز!

بدون هیچ مقدمه‌ای یک راست می‌رویم سراغ ساختار کتاب جمع‌بندی هندسه ۳

در این کتاب (مثل کتاب درسی) با سه فصل روبه‌رو هستیم. هر فصل به چند موضوع تقسیم شده و در مورد هر موضوع توضیحات کافی داده شده و هر کجا لازم بوده برای حل مسائل، استراتژی حل مسئله ارائه شده تا یک دسته‌بندی خوب و کاربردی در ذهن شما شکل بگیرد؛ پس از آن چند نمونه تست که شامل تست‌های کنکورهای سراسری سال‌های گذشته و تست‌های برگرفته از تمارین کتاب درسی است آورده شده است.

ضمناً در انتهای هر فصل یک آزمون گذاشتیم که خودتان را بیازمایید.

راستی! سه آزمون جامع هم در انتهای کتاب داریم؛ از حل تست‌های آن‌ها غافل نشوید!

تمام تلاش ما بر این بوده که هر چه برای پاسخگویی به سؤالات کنکور نیاز دارید، در قالب کتابی با حجم کم برای شما تدارک ببینیم.

مطمئن باشید اگر تسلط خوبی روی تمارین کتاب درسی و کنکورهای سال‌های قبل داشته باشید، به راحتی می‌توانید به **تمام** سؤالات هندسه ۳ در کنکور پاسخ دهید.

در پایان لازم است از دوست خوبم دکتر کوروش اسلامی به خاطر همراهی‌هایش تشکر ویژه داشته باشم.

از خانم‌ها مرادی، فلاحی و نظری به خاطر پیگیری‌های مداوم و منظم سپاس‌گزارم.

از ویراستاران علمی به‌خصوص خانم زهرا جالینوسی و همکاران تولید بابت زحماتی که کشیدند ممنونم.

بدون تردید نظرات یکایک معلمان گرامی و دانش‌آموزان عزیز برای ما بسیار مهم و ذی‌قیمت است و به ما در بهترشدن این کتاب کمک شایانی خواهد کرد.

منتظر نظرات شما از طریق سایت یا صفحات مجازی خیلی‌سبز هستیم.

در پناه خدا باشید

مهریار راشدی

mehryar.rashedi@modares.ac.ir

فصل اول

فصل دوم

فصل سوم

آزمون‌های جامع

سه‌ماهه

فصل ۱ ماتریس و کاربردها

ماتریس و اعمال روی ماتریس

ماتریس، آرایشی مستطیلی از اعداد حقیقی است که به هر عضو آن «درایه» می‌گوییم. هر ماتریس از تعدادی سطر و تعدادی ستون تشکیل شده است.

اگر ماتریس A، m سطر و n ستون داشته باشد، مرتبهٔ ماتریس A، $m\times n$ است و آن را به صورت $A_{m\times n}$ یا $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ نمایش می‌دهیم.

a_{ij} یعنی درایهٔ واقع در سطر iاُم و ستون jاُم ماتریس A.

ماتریس مقابل دارای ۳ سطر و ۲ ستون است، پس مرتبهٔ آن ۳×۲ است.

$$\begin{array}{cc} & \\ A= & \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{ستون اول} & \text{ستون دوم} \end{array} \end{array}\begin{array}{l} \rightarrow \text{سطراول} \\ \rightarrow \text{سطردوم} \\ \rightarrow \text{سطرسوم} \end{array}$$

ماتریس‌های خاص

۱. **ماتریس صفر**: ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر است و آن را با $\bar{O}$ نمایش می‌دهیم.

$$\bar{O}_{۳\times ۲}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۲. **ماتریس سطری**: ماتریسی که فقط یک سطر دارد؛ مرتبهٔ این ماتریس $۱\times n$ است.

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix}_{۱\times ۴}$$

۳. **ماتریس ستونی**: ماتریسی که فقط یک ستون دارد؛ مرتبهٔ این ماتریس $n\times ۱$ است.

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} \\ a_{۲۱} \\ a_{۳۱} \end{bmatrix}_{۳\times ۱}$$

۴. **ماتریس مربعی**: ماتریسی که تعداد سطرها و ستون‌های آن با هم برابرند؛ مرتبهٔ این ماتریس $n\times n$ است. این ماتریس دارای قطر اصلی و قطر فرعی است. در درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس مربعی $i<j$، روی قطر اصلی $i=j$ و پایین قطر اصلی $i>j$ است. (i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون درایهٔ a_{ij} است.)

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

قطر فرعی ↓   قطر اصلی ↓

۵. **ماتریس پایین‌مثلثی**: ماتریسی است مربعی که همهٔ درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفرند.

$$\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ d & b & ۰ \\ e & f & c \end{bmatrix}$$

۶. **ماتریس بالامثلثی**: ماتریسی است مربعی که همهٔ درایه‌های پایین قطر اصلی آن صفرند.

$$\begin{bmatrix} a & d & e \\ ۰ & b & f \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}$$

۷. **ماتریس قطری**: ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی آن صفرند. (ماتریس قطری هم بالامثلثی است و هم پایین‌مثلثی.)

$$\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}$$

۸. **ماتریس اسکالر**: ماتریسی است قطری که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابرند.

$$\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & a & ۰ \\ ۰ & ۰ & a \end{bmatrix}$$

۹. **ماتریس همانی (واحد)**: ماتریسی است اسکالر که درایه‌های روی قطر اصلی آن یک باشند.

گاهی ماتریس همانی را به صورت $I_n=[a_{ij}]_{n\times n}$ و $a_{ij}=\begin{cases} ۱ & i=j \\ ۰ & i\neq j \end{cases}$ نمایش می‌دهند.

$$I_۳=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad I_۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

اعمال مقدماتی روی ماتریس‌ها

۱. جمع و تفریق اگر دو ماتریس هم‌مرتبه باشند، با جمع و تفریق کردن درایه‌های نظیر دو ماتریس، جمع یا تفریق دو ماتریس به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۴ & ۳ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۲ & -۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۶ & ۱ \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۴ & ۳ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۲ & -۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & -۱ & -۴ \\ ۱ & ۲ & ۵ \end{bmatrix}$$

مثال اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ و $a_{ij}=\begin{cases} i-j & i>j \\ i+j & i\leq j\end{cases}$، حاصل $I-A$ کدام است؟

حواست باشه i شمارهٔ سطر و j شمارهٔ ستون درایه است.

پاسخ I ماتریس همانی است که با آن آشنا هستیم؛ اگر تکلیف A را روشن کنیم، همه‌چیز حل است.

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱+۱ & ۱+۲ & ۱+۳ \\ ۲-۱ & ۲+۲ & ۲+۳ \\ ۳-۱ & ۳-۲ & ۳+۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۴ & ۵ \\ ۲ & ۱ & ۶\end{bmatrix}$$

قبلاً گفته بودیم در درایه‌های بالای قطر اصلی $i<j$، روی قطر اصلی $i=j$ و پایین قطر اصلی $i>j$ است! بنابراین:

$$I-A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۴ & ۵ \\ ۲ & ۱ & ۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & -۳ & -۴ \\ -۱ & -۳ & -۵ \\ -۲ & -۱ & -۵\end{bmatrix}$$

۲. ضرب عدد در ماتریس اگر عددی در ماتریس ضرب شود، در تمام درایه‌های آن ضرب می‌شود.

$$-۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \\ ۳ & -۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۴ & -۲ \\ -۶ & ۸\end{bmatrix}$$

ویژگی‌های جمع و تفریق و ضرب عدد در ماتریس

اگر A، B و C هم‌مرتبه باشند:

۱. $A+B=B+A$ (خاصیت جابه‌جایی)
۲. $A+\bar{O}=A$ (خاصیت عضو خنثی در جمع)
۳. $۰\times A=\bar{O}$
۴. $A\times I=I\times A=A$ (خاصیت عضو خنثی در ضرب)
۵. $A+(-A)=\bar{O}$ (خاصیت عضو قرینه)
۶. $A+(B+C)=(A+B)+C$ (خاصیت شرکت‌پذیری)
۷. $k(A\pm B)=kA\pm kB$ (k عددی حقیقی است.)

۳. ضرب دو ماتریس اگر $A_{m\times\ell}$ و $B_{k\times n}$ باشد، در صورتی $A\times B$ تعریف می‌شود که $\ell=k$ باشد. یعنی ضرب دو ماتریس زمانی وجود دارد که تعداد ستون‌های ماتریس اول و تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشند.

$$\underbrace{A_{m\times\ell}\times B_{k\times n}}_{\ell=k}=C_{m\times n}\ ;\ A_{۲\times۳}\times B_{۳\times۴}=C_{۲\times۴}$$

برای ضرب دو ماتریس، از ماتریس اول، سطر و از ماتریس دوم، ستون برمی‌داریم و درایه‌های هر سطر در ستون به صورت نظیر به نظیر ضرب و حاصل با هم جمع می‌شود و در ماتریس حاصل‌ضرب جایگزین می‌شود.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \\ ۲ & -۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱+۰ & -۱+۲ \\ -۱+۰ & ۱+۰ \\ ۲+۰ & -۲-۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ \\ ۲ & -۵\end{bmatrix}$$

ویژگی‌های ضرب دو ماتریس

۱. در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد. $AB\neq BA$

(ضرب ماتریس همانی (I) در ماتریس A خاصیت جابه‌جایی دارد، یعنی: $AI=IA=A$)

۲. ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد. $(AB)C=A(BC)$

۳. در ضرب ماتریس‌ها خاصیت توزیع‌پذیری (و فاکتورگیری) برقرار است.

$$\begin{cases} A\times(B\pm C)=A\times B\pm A\times C \\ (B\pm C)\times A=B\times A\pm C\times A\end{cases}$$

۴. حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست، یعنی اگر $AB=AC$ باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$ است. $AB=AC \not\Rightarrow B=C$

۵. اگر حاصل‌ضرب دو ماتریس صفر شود، نمی‌توان نتیجه گرفت یکی از دو ماتریس صفر بوده است. $AB=\bar{O} \not\Rightarrow A=\bar{O}$ یا $B=\bar{O}$

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۱ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow AB=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

حاصل‌ضرب دو ماتریس A و B صفر شده اما هیچ‌کدام صفر نبوده‌اند.

۶. حاصل‌ضرب دو ماتریس قطری، یک ماتریس قطری است و از ضرب نظیر به نظیر درایه‌های روی قطر اصلی دو ماتریس به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & ۰ & ۰ \\ ۰ & e & ۰ \\ ۰ & ۰ & f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ad & ۰ & ۰ \\ ۰ & be & ۰ \\ ۰ & ۰ & cf\end{bmatrix}$$

۱- اگر $A=[a_{ij}]_{3\times 2}$ و $B=[b_{ij}]_{2\times 3}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} i^2-1 & i=j\\ i-j & i>j \\ j-i & i<j\end{cases}$ و $b_{ij}=\begin{cases} i^2+1 & i=j\\ i+j & i>j\\ i-j+2 & i<j\end{cases}$ باشند، $A\times B$ کدام است؟ (تمرین کتاب درسی)

۱) $\begin{bmatrix} -3 & -5 & -1\\ 11 & 16 & 3\\ 7 & 7 & 1\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} -1 & -5 & -5\\ 5 & 18 & 19\\ 5 & 11 & 13\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1\\ 11 & 16 & 3\\ 7 & 7 & 1\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 5\\ 5 & 18 & 19\\ 5 & 11 & 13\end{bmatrix}$

پاسخ گزینه (۳) اول باید A و B را مشخص کنیم:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boxed{1^2-1} & \boxed{2-1}\\ \boxed{2-1} & \boxed{2^2-1}\\ \boxed{3-1} & \boxed{3-2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1\\ 1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boxed{1^2+1} & \boxed{1-2+2} & \boxed{1-3+2}\\ \boxed{2+1} & \boxed{2^2+1} & \boxed{2-3+2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0\\ 3 & 5 & 1\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$AB=\begin{bmatrix} 0 & 1\\ 1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0\\ 3 & 5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1\\ 11 & 16 & 3\\ 7 & 7 & 1\end{bmatrix}$$

۲- اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -1\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} 1 & x & -1\\ 1 & 1 & x\\ x & 1 & -1\end{bmatrix}$ ، $C=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$ و $D=ABC$ باشد، به ازای کدام مقدار x، مجموع درایه‌های قطر اصلی و فرعی ماتریس D برابر هستند؟ (سراسری ریاضی ۱۴۰۲)

۱) -4 ۲) -3 ۳) 5 ۴) 6

پاسخ گزینه (۱) ابتدا حاصل $A\times B$ را پیدا می‌کنیم و سپس در ماتریس C ضرب می‌کنیم تا درایه‌های D مشخص شود.

$$D=ABC=\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & x & -1\\ 1 & 1 & x\\ x & 1 & -1\end{bmatrix}}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix} 2 & x+1 & x-1\\ x & -x+2 & x\\ -x-2 & -3 & -2x+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+5 & \bigcirc & x+1\\ \bigcirc & 0 & \bigcirc\\ -2x-7 & \bigcirc & -3\end{bmatrix}$$

با مساوی قراردادن مجموع درایه‌های قطر اصلی و قطر فرعی داریم:

$$(x+5)+0+(-3)=(x+1)+0+(-2x-7)\Rightarrow 2=-2x-6\Rightarrow 2x=-8\Rightarrow x=-4$$

۳- اگر $A=\begin{bmatrix} 4 & a\\ b & -1\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} 1 & -2\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ و $A\times B$ یک ماتریس قطری باشد، مجموع درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی $B\times A$ کدام است؟ (برگرفته از تمرین کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۸ ۳) ۱۴ ۴) ۲۴

پاسخ گزینه (۴) همین اول کار باید تکلیف $A\times B$ را روشن کنیم!

$$AB=\begin{bmatrix} 4 & a\\ b & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2\\ 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4+3a & 2a-8\\ b-3 & -2b-2\end{bmatrix}$$

برای این‌که $A\times B$ قطری باشد، باید درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر باشند، پس:

$$\begin{cases} b-3=0\Rightarrow b=3\\ 2a-8=0\Rightarrow a=4\end{cases}$$

حالا که A و B را داریم، $B\times A$ را می‌یابیم:

$$BA=\begin{bmatrix} 1 & -2\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 4\\ 3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 6\\ 18 & 10\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی $B\times A$ برابر است با:

$$6+18=24$$

حواست باشه اگر $A\times B$ قطری باشد، دلیلی وجود ندارد که $B\times A$ هم قطری باشد.

۴- اگر $A=\begin{bmatrix} x & -1 & -x \\ 0 & 0 & 4 \\ y & z & z \end{bmatrix}$ **،** $B=\begin{bmatrix} 2z & \frac{1}{2} & 2 \\ 2z & 0 & -4y \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ **و ماتریس AB به ازای $y\in\mathbb{Z}$ ماتریس اسکالر باشد، مقدار xy کدام است؟** *(سراسری ریاضی ۱۴۰۱)*

۱) -1 ۲) -2 ۳) 1 ۴) 2

پاسخ گزینهٔ (۲) ابتدا باید AB را پیدا کنیم و سپس از اسکالربودن AB برای یافتن x و y کمک بگیریم.

$$AB=\begin{bmatrix} x & -1 & -x \\ 0 & 0 & 4 \\ y & z & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2z & \frac{1}{2} & 2 \\ 2z & 0 & -4y \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2xz-2z & 0 & 2x+4y \\ 0 & 2 & 0 \\ 2yz+2z^2 & \frac{y}{2}+\frac{z}{2} & 2y-4yz \end{bmatrix}$$

در هر ماتریس اسکالر ۱) درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفرند و ۲) درایه‌های واقع بر قطر اصلی با هم برابرند.

AB اسکالر است؛ پس باید درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی، صفر و درایه‌های واقع بر قطر اصلی، برابر باشند.

$$2x+4y=0 \Rightarrow x=-2y$$

$$\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=0 \Rightarrow z=-y$$

$$2y-4yz=2 \Rightarrow y-2yz=1 \xrightarrow{z=-y} y-2y(-y)=1 \Rightarrow 2y^2+y-1=0 \Rightarrow (2y-1)(y+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z} \\ y=-1 \end{cases}$$

از آن‌جا که در صورت سؤال گفته شده y عددی صحیح است، پس $y=-1$ قابل قبول است. با داشتن مقدار y، مقدار x به راحتی به دست می‌آید.

$$x=-2y \Rightarrow x=-2(-1)=2$$

بنابراین:

$$xy=(2)(-1)=-2$$

۵- از رابطهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix} x & 2x & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix}=0$ **، عدد غیر صفر x کدام است؟** *(سراسری ریاضی ۹۸)*

۱) $\frac{2}{9}$ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{4}{9}$ ۴) $\frac{3}{5}$

پاسخ گزینهٔ (۱) ابتدا حاصل‌ضرب دو ماتریس $\begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ را به دست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3x-2x-1 \\ 4x+0+2 \\ x+4x+0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x-1 \\ 4x+2 \\ 5x \end{bmatrix}$$

حالا باید حاصل‌ضرب ماتریس $\begin{bmatrix} x & 2x & -1 \end{bmatrix}$ را در ماتریس بالا به دست آوریم و برابر صفر قرار دهیم تا x پیدا شود.

$$\begin{bmatrix} x & 2x & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-1 \\ 4x+2 \\ 5x \end{bmatrix}=0 \Rightarrow x(x-1)+2x(4x+2)-1(5x)=0 \Rightarrow x^2-x+8x^2+4x-5x=0 \Rightarrow 9x^2-2x=0$$

$$\Rightarrow x(9x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{2}{9} \end{cases}$$

سؤال، عدد غیر صفر x را خواسته؛ پس جواب سؤال $x=\frac{2}{9}$ است.

۶- اگر A و B دو ماتریس مربعی 2×2 باشند که $BA=\begin{bmatrix} a-1 & 2 \\ b+1 & 2c \end{bmatrix}$ **و** $B\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}A+B\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ **، حاصل $a+b+c$ کدام است؟**

۱) 8 ۲) 7 ۳) 6 ۴) -6

پاسخ گزینهٔ (۳) در عبارت ماتریسی داده‌شده در صورت سؤال، از A (از راست) و از B (از چپ) فاکتور می‌گیریم، داریم:

$$B(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix})A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}\Rightarrow B(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix})A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}\Rightarrow B(2I)A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}\Rightarrow 2BA=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}\Rightarrow BA=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

در صورت سؤال هم BA را داریم، البته با سه‌تا مجهول!
کافی است این BA را مساوی آن BA قرار دهیم. ☺

$$\begin{bmatrix} a-1 & 2 \\ b+1 & 2c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\Rightarrow \begin{cases} a-1=1 \Rightarrow a=2 \\ b+1=3 \Rightarrow b=2 \\ 2c=4 \Rightarrow c=2 \end{cases}$$

بنابراین:

$$a+b+c=2+2+2=6$$

۷- ماتریس $A=\begin{bmatrix}۳&-۲\\۲&۳\end{bmatrix}$ مفروض است. اگر ضرب دو ماتریس A و B تعویض‌پذیر باشد، مجموع درایه‌های روی قطر فرعی ماتریس B کدام است؟

۱) ۱-　　۲) صفر　　۳) ۱　　۴) بستگی به درایه‌های ماتریس B دارد.

پاسخ گزینهٔ «۲» **روش اول:** ماتریس B را به صورت $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ در نظر می‌گیریم. ضرب دو ماتریس A و B خاصیت جابه‌جایی دارد یعنی باید $AB=BA$ باشد.

$$AB=BA\Rightarrow\begin{bmatrix}۳&-۲\\۲&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&-۲\\۲&۳\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}۳a-۲c&۳b-۲d\\۲a+۳c&۲b+۳d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳a+۲b&-۲a+۳b\\۳c+۲d&-۲c+۳d\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۳a-۲c=۳a+۲b\\۳b-۲d=-۲a+۳b\end{cases}$$

بنابراین:

$$\begin{cases}-۲c=۲b\Rightarrow b=-c\Rightarrow b+c=۰\\-۲d=-۲a\Rightarrow a=d\end{cases}$$

$b+c$ صفر است، یعنی مجموع درایه‌های روی قطر فرعی صفر است.

روش دوم: ضرب دو ماتریس به فُرم $\begin{bmatrix}a&b\\-b&a\end{bmatrix}$ (که درایه‌های روی قطر اصلی برابر و درایه‌های روی قطر فرعی قرینه‌اند) تعویض‌پذیرند و مجموع درایه‌های روی قطر فرعی آن‌ها صفر است.

استراتژی حل مسئله

۱) اگر $AB=C$ باشد، آن‌گاه درایهٔ c_{ij} از ضرب سطر iاُم ماتریس A و ستون jاُم ماتریس B به دست می‌آید. مثلاً:

$c_{۲۳}=$ (سطر دوم ماتریس A) $\times$ (ستون سوم ماتریس B)

۲) اگر $ABC=D$ باشد، آن‌گاه درایهٔ d_{ij} (درایهٔ واقع در سطر iاُم و ستون jاُم ماتریس D) از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$d_{ij}=[$سطر iاُم A$]\times[$ماتریس B$]\times[$ستون jاُم C$]$

مثلاً:

$d_{۳۱}=[$سطر سوم ماتریس A$]\times B\times[$ستون اول ماتریس C$]$

۸- اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۱&۰\\۲&۰&۲\\-۱&-۱&۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱&۱&۰\\۱&۱&۱\\۱&۱&۲\end{bmatrix}$، درایهٔ واقع در سطر دوم و ستون سوم $BA-AB$ کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۱　　۳) صفر　　۴) ۱-

پاسخ گزینهٔ «۴» برای یافتن درایهٔ سطر دوم ستون سوم $BA-AB$ باید درایهٔ سطر دوم ستون سوم BA را منهای درایهٔ سطر دوم ستون سوم AB کرد.

(درایهٔ سطر دوم ستون سوم $BA-AB$) = (درایهٔ سطر دوم ستون سوم BA) − (درایهٔ سطر دوم ستون سوم AB)

$$=[\text{سطردوم}B][\text{ستون‌سوم}A]-[\text{سطردوم}A][\text{ستون‌سوم}B]=\begin{bmatrix}۱&۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰\\۲\\۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۲&۰&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰\\۱\\۲\end{bmatrix}=(۰+۲+۱)-(۰+۰+۴)=-۱$$

۹- فرض کنید $A=\begin{bmatrix}۱&۰&۱\\۰&۱&۰\\۰&-۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷&۸&۴\\۳&۲&۵\\۶&۹&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۱&-۱\\۱&۰&۰\\۰&۱&۱\end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس A کدام است؟ *(سراسری ریاضی ۱۴۰۰)*

۱) ۳　　۲) ۵　　۳) ۱۲　　۴) ۱۳

پاسخ گزینهٔ «۱» یک راه این است که دو ماتریس اول را ضرب کنیم و سپس حاصل را در ماتریس سوم ضرب کنیم تا سطر سوم ماتریس A مشخص شود. اما ساده‌تر این است که سطر سوم ماتریس اول را در دو ماتریس بعدی ضرب کنیم تا سطر سوم ماتریس A (مستقیم) به دست آید.

$$\text{سطر سوم ماتریس } A=\underbrace{\begin{bmatrix}۰&-۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷&۸&۴\\۳&۲&۵\\۶&۹&۳\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}۰&۱&-۱\\۱&۰&۰\\۰&۱&۱\end{bmatrix}$$

$$\text{سطر سوم ماتریس } A=\begin{bmatrix}۳&۷&-۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۱&-۱\\۱&۰&۰\\۰&۱&۱\end{bmatrix}\Rightarrow\text{سطر سوم ماتریس } A=\begin{bmatrix}۷&۱&-۵\end{bmatrix}$$

بنابراین:

مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس A برابر با $۷+۱-۵=۳$ است.

۱۰- مجموع درایه‌های حاصل $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱۳ & ۱ \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱۲ & ۱ \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۷ ۳) صفر ۴) ۴−

پاسخ گزینهٔ «۱» در حالت کلی حاصل‌ضرب دو ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ a & ۱ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ b & ۱ \end{bmatrix}$ به شکل $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ a+b & ۱ \end{bmatrix}$ است، بنابراین:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱۸ & ۱ \end{bmatrix}$$

با توجه به حاصل‌ضرب‌های بالا، درایهٔ سطر دوم ستون اول ماتریس حاصل‌ضرب از مجموع درایه‌های سطر دوم ستون اول ماتریس‌های داده‌شده به دست می‌آید.

درایهٔ سطر دوم ستون اول ماتریس حاصل $= (-۱۲+(-۱۰)+\cdots+۰)+(۱+۳+\cdots+۱۳) = -۴۲+۴۹=۷$

پس ماتریس حاصل‌ضرب به شکل $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۷ & ۱ \end{bmatrix}$ و مجموع درایه‌های آن ۹ است.

ماتریس و اتحاد در حالت کلی اتحادها در ماتریس‌ها برقرار نیستند. مثلاً: $(A+B)^۲=(A+B)(A+B)=A^۲+AB+BA+B^۲$

در صورتی رابطهٔ بالا شکل اتحاد به خود می‌گیرد که $AB=BA$ باشد.

استراتژی حل مسئله

اگر دو ماتریس A و B تعویض‌پذیر باشند یعنی $AB=BA$ باشد، اتحادهای زیر برقرارند و اگر اتحادها در ماتریس‌ها برقرار باشند، دو ماتریس تعویض‌پذیرند.

۱) $(A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲$

۲) $(A-B)^۲=A^۲-۲AB+B^۲$

۳) $(A-B)(A+B)=A^۲-B^۲$

۴) $A^۳+B^۳=(A+B)(A^۲-AB+B^۲)$

۵) $A^۳-B^۳=(A-B)(A^۲+AB+B^۲)$

دقت کنید اتحادهای فوق در مورد A و I برقرارند. (چرا؟) چون A و I تعویض‌پذیرند.

۱۱- اگر $A=\begin{bmatrix} ۶ & ۱ \\ a-۱ & ۲ \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۷ & b+۲ \end{bmatrix}$ و $(A+B)^۲=A^۲+B^۲+۲AB$، حاصل $a-b$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۷ ۳) ۷− ۴) ۹−

پاسخ گزینهٔ «۱» چون بین دو ماتریس مربعی A و B، اتحاد برقرار است، پس ضرب دو ماتریس A و B خاصیت جابه‌جایی دارد، یعنی $AB=BA$ است، بنابراین:

$$AB=\begin{bmatrix} ۱ & ۶ \\ ۲ & a-۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ b+۲ & ۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۶+۶b & ۴۵ \\ ۸+(a-۱)(b+۲) & ۷a-۱ \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ b+۲ & ۷ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۶ \\ ۲ & a-۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۰ & ۳a+۲۱ \\ b+۱۶ & ۶b+۷a+۵ \end{bmatrix}$$

از آن‌جا که $AB=BA$ است، پس:

$$\begin{cases} ۱۶+۶b=۱۰ \Rightarrow b=-۱ \\ ۳a+۲۱=۴۵ \Rightarrow a=۸ \end{cases} \Rightarrow a-b=۸-(-۱)=۹$$

اگر نکته دوست دارید! بدانید که ضرب ماتریس‌های ۲×۲ هنگامی خاصیت جابه‌جایی دارد که نسبت درایه‌های نظیر قطر فرعی آن‌ها برابر با نسبت تفاضل درایه‌های قطرهای اصلی آن‌ها باشد.

$$AB=BA \Rightarrow \frac{۶}{۳}=\frac{۲}{b+۲}=\frac{a-۱-۱}{۷-۴} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۲}{b+۲}=۲ \Rightarrow b+۲=۱ \Rightarrow b=-۱ \\ \frac{a-۲}{۳}=۲ \Rightarrow a-۲=۶ \Rightarrow a=۸ \end{cases}$$

بنابراین:

$$a-b=۸-(-۱)=۹$$

توان ماتریس‌ها اگر ماتریس A مربعی باشد (چون با هر توانی از خودش تعویض‌پذیر است)، داریم:

$$A^۱=A\ ,\ A^۲=A.A\ ,\ A^۳=A.A^۲=A^۲.A\ ,\ \ldots\ ,\ A^n=A.A^{n-۱}=A^{n-۱}.A$$

دقت کنید اگر A ماتریس مربعی، m و n اعدادی طبیعی و k عددی حقیقی باشد، آن‌گاه:

۱) $I^n=I$ ۲) $(kA)^n=k^nA^n$ ۳) $A^m\times A^n=A^{m+n}$ ۴) $(A^m)^n=A^{mn}$

توان ماتریس‌های خاص برای محاسبهٔ توان‌های ماتریس مربعی A (به طور خاص **در** مورد توان‌های بزرگ!)، راه کلی این است که بین A، A^2، A^3 و ... رابطه‌ای برقرار کنیم؛ اما در مورد برخی ماتریس‌های خاص، توان‌های بزرگ به راحتی قابل محاسبه‌اند. این ماتریس‌ها عبارت‌اند از:

۱) اگر A مثلثی باشد به طوری که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن صفر باشند، تمام توان‌های بزرگ‌تر یا مساوی مرتبهٔ آن برابر صفر است.

$$A=\begin{bmatrix}0 & a\\ 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow A^{n\geq 2}=\bar{O}\ ,\ B=\begin{bmatrix}0&0&0\\ a&0&0\\ b&c&0\end{bmatrix} \Rightarrow B^{n\geq 3}=\bar{O}$$

۲) **ماتریس خودتوان** اگر ماتریس A مربعی و $A^2=A$ باشد، این ماتریس را خودتوان گوییم؛ یعنی تمام توان‌های طبیعی A با A برابر می‌شوند.

$$A^2=A \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} A^n=A$$

دقت کنید ماتریس I، یک ماتریس خودتوان است، یعنی به هر توان طبیعی برسد برابر با خودش می‌شود. $(I^n=I)$

۳) **ماتریس متناوب** اگر $A^2=I$ باشد، این ماتریس را متناوب گوییم زیرا توان‌های زوج این ماتریس برابر I و توان‌های فرد آن برابر با خود ماتریس می‌شوند.

$$A^2=I \Rightarrow \begin{cases}A^{\text{فرد}}=A\\ A^{\text{زوج}}=I\end{cases}$$

۴) **ماتریس قطری** اگر A قطری باشد، برای محاسبهٔ A^n کافی است درایه‌های روی قطر اصلی را به توان n برسانیم.

$$A=\begin{bmatrix}a&0&0\\ 0&b&0\\ 0&0&c\end{bmatrix} \Rightarrow A^n=\begin{bmatrix}a^n&0&0\\ 0&b^n&0\\ 0&0&c^n\end{bmatrix}$$

استراتژی حل مسئله

برای محاسبهٔ توان‌های بزرگ ماتریس‌ها، ابتدا توان دوم را به دست می‌آوریم. اگر خودتوان یا متناوب بود، هر توانی از آن به راحتی قابل محاسبه است، در غیر این صورت سعی می‌کنیم بین توان‌های اول، دوم و سوم ماتریس رابطه‌ای برقرار کنیم. (در مورد توان‌های کوچک می‌توانیم از ضرب ماتریس در خودش استفاده کنیم تا به توان دلخواه برسیم.)

۱۲- اگر $A=\begin{bmatrix}2&-1\\ 3&-2\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^7-A^4 کدام است؟ *(سراسری ریاضی ۸۳)*

۱) $\begin{bmatrix}1&0\\ 3&1\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}1&-1\\ 3&-3\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-1&1\\ 3&-3\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}1&2\\ -2&-3\end{bmatrix}$

پاسخ گزینهٔ «۲» ابتدا A^2 را پیدا می‌کنیم تا بعد ببینیم چه اتفاقی می‌افتد ...

$$A^2=\begin{bmatrix}2&-1\\ 3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\ 3&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\ 0&1\end{bmatrix}=I$$

چون $A^2=I$ شده پس ماتریس A متناوب است؛ یعنی توان‌های زوج ماتریس A برابر I و توان‌های فرد ماتریس A برابر با خود ماتریس A می‌شوند.

بنابراین $A^7=A$ و $A^4=I$ است و ...

بنابراین:

$$A^7-A^4=A-I=\begin{bmatrix}2&-1\\ 3&-2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\ 0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\ 3&-3\end{bmatrix}$$

۱۳- اگر $A=\begin{bmatrix}3&-3&4\\ 2&-3&4\\ 0&-1&1\end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس A^3 کدام است؟ *(ریاضی خارج ۱۴۰۱)*

۱) $\begin{bmatrix}1&-1&0\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}9&12&16\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}1&0&-2\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}9&5&-7\end{bmatrix}$

پاسخ گزینهٔ «۱» یک راه این است که A^3 را به دست آوریم و گزینه‌ای که در سطر اول می‌بینیم را به عنوان پاسخ انتخاب کنیم.

اما راه دیگر این است که ابتدا سطر اول A^2 را به دست آوریم. برای این کار باید سطر اول A را در A ضرب کنیم. A^2 سطر اول $=[A$ سطر اول$]\times A$

$$A^2 \text{ سطر اول }=\begin{bmatrix}3&-3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-3&4\\ 2&-3&4\\ 0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-4&4\end{bmatrix}$$

برای یافتن سطر اول A^3 کافی است سطر اول A^2 را در A ضرب کنیم و تمام. 🙂 A^3 سطر اول $=[A^2$ سطر اول$]\times A$

$$A^3 \text{ سطر اول }=\begin{bmatrix}3&-4&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-3&4\\ 2&-3&4\\ 0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0\end{bmatrix}$$

۱۴- اگر $A=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\-1&2&0\end{bmatrix}$، آن‌گاه $A^{1403}-A^{1400}$ کدام است؟

۱) A ۲) $\bar{O}$ ۳) I ۴) $-A$

پاسخ گزینهٔ «۲» ماتریس A مثلثی و درایه‌های روی قطر اصلی همگی صفرند، پس تمام توان‌های بزرگ‌تر مساوی مرتبهٔ ماتریس برابر با صفرند؛ یعنی $A^{n\geq 3}=\bar{O}$. بنابراین: $A^{1403}-A^{1400}=\bar{O}-\bar{O}=\bar{O}$

۱۵- اگر $A=\begin{bmatrix}\cos x&\sin x\\\sin x&-\cos x\end{bmatrix}$، ماکزیمم مقدار مجموع درایه‌های ماتریس $A^{1403}+A^{1402}$ چه‌قدر است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) به x بستگی دارد.

پاسخ گزینهٔ «۱» چون با توان‌های A سروکار داریم، پس باید اول A^2 را پیدا کنیم.

$$A^2=\begin{bmatrix}\cos x&\sin x\\\sin x&-\cos x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos x&\sin x\\\sin x&-\cos x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos^2 x+\sin^2 x&\cos x\sin x-\sin x\cos x\\\sin x\cos x-\cos x\sin x&\sin^2 x+\cos^2 x\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$

چون $A^2=I$ شده، پس ماتریس متناوب است؛ یعنی توان‌های زوج A برابر I و توان‌های فرد A برابر A هستند.

$$A^{1403}+A^{1402}=A+I=\begin{bmatrix}\cos x&\sin x\\\sin x&-\cos x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\cos x&\sin x\\\sin x&1-\cos x\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های $A^{1403}+A^{1402}$ برابر با $2+2\sin x$ است؛ زمانی این مجموع ماکزیمم می‌شود که $\sin x$ حداکثر مقدار خود یعنی ۱ را داشته باشد.

$$\text{ماکزیمم مجموع درایه‌های } A^{1403}+A^{1402}=2+2(1)=4$$

۱۶- اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه بوده، $AB=-B$ و $BA=A$، حاصل A^2B^2 کدام است؟

۱) AB ۲) BA ۳) $-AB$ ۴) $-BA$

پاسخ گزینهٔ «۳» باید ابتدا به جای A و B در A^2B^2 به ترتیب BA و $-AB$ جایگزین کنیم و سپس هر جا AB و BA دیدیم به جای آن‌ها $-B$ و A قرار دهیم.

$$A^2B^2=AA\times BB=(BA\times BA)((-AB)(-AB))=(B(AB)A)(A(BA)B)$$

بنابراین:

$$A^2B^2=(B\underbrace{(AB)}_{-B}A)(A\underbrace{(BA)}_{A}B)=(-B\underbrace{(BA)}_{A})(A\underbrace{(AB)}_{-B})=(-BA)(-AB)=(-A)(B)=-AB$$

۱۷- اگر $A^2+A-I=\bar{O}$ باشد، A^6 کدام است؟

۱) $8A-5I$ ۲) $-8A+5I$ ۳) $8A+5I$ ۴) $-8A-5I$

پاسخ گزینهٔ «۲» **روش اول:** از رابطهٔ داده‌شده در صورت سؤال، A^2 را پیدا می‌کنیم و سعی می‌کنیم A^6 را بسازیم.

$$A^2+A-I=\bar{O}\Rightarrow A^2=I-A$$

طرفین رابطهٔ بالا را به توان ۳ می‌رسانیم و هر جا A^2 دیدیم، به جای آن $I-A$ قرار می‌دهیم.

$$A^2=I-A\xrightarrow{\text{توان۳}}A^6=(I-A)^3=I^3-3I^2A+3A^2I-A^3\Rightarrow A^6=I-3A+3(I-A)-(I-A)A$$

بنابراین:

$$A^6=I-3A+3I-3A-A+A^2=4I-7A+(I-A)=5I-8A$$

روش دوم: اتحاد چاق و لاغر $A^3-I^3=(A-I)(A^2+A+I^2)$ را خوب می‌شناسیم؛ با توجه به این‌که از عبارت A^2+A+I می‌توان اتحاد چاق و لاغر ساخت، ابتدا از رابطهٔ داده‌شده در صورت سؤال A^2+A+I را به دست می‌آوریم:

$$A^2+A-I=\bar{O}\xrightarrow{+2I}A^2+A+I=2I$$

حالا طرفین رابطهٔ بالا را در $A-I$ ضرب می‌کنیم، داریم:

$$(A-I)(A^2+A+I)=(A-I)(2I)\Rightarrow A^3-I=2A-2I\Rightarrow A^3=2A-I$$

کافی است طرفین رابطهٔ بالا را به توان ۲ برسانیم تا A^6 به دست آید؛ فقط هر جا A^2 دیدیم به جای آن $I-A$ جایگزین می‌کنیم:

$$A^3=2A-I\xrightarrow{\text{توان۲}}A^6=(2A-I)^2=4A^2-4A+I^2\Rightarrow A^6=4(I-A)-4A+I=5I-8A$$

دقت کنید ❶ $AI=A$، ❷ $I^n=I$ $(n\in\mathbb{N})$

رابطهٔ کیلی ـ همیلتون شاید اسم مرحوم همیلتُن و شادروان کِیلی به گوشتان خورده باشد!
نخستین بار مفهوم ماتریس در کارهای این دو نفر مطرح شده است.
رابطهٔ کِیلی ـ همیلتُن می‌گوید: «هر ماتریس 2×2 به شکل $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ در رابطهٔ $A^2-(a+d)A+|A|I=\bar{O}$ صدق می‌کند.»

۱۸- اگر $A=\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ ۵ & ۴\end{bmatrix}$ و $A^۲=\alpha A+\beta I$، دوتایی (α,β) کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۴)

۱) $(۲,۱۱)$ ۲) $(۲,۱۳)$ ۳) $(۴,۱۱)$ ۴) $(۴,۳)$

پاسخ گزینهٔ «۲» **روش اول:** بدون فوت وقت! $A^۲$ را به دست می‌آوریم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ ۵ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ ۵ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۹ & ۲\\ ۱۰ & ۲۱\end{bmatrix}$$

$I=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ را از قبل می‌شناسیم. (بله! I ماتریس همانی است.)

$$A^۲=\alpha A+\beta I\Rightarrow\begin{bmatrix}۹ & ۲\\ ۱۰ & ۲۱\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ ۵ & ۴\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}۹ & ۲\\ ۱۰ & ۲۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲\alpha & \alpha\\ ۵\alpha & ۴\alpha\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta & ۰\\ ۰ & \beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta-۲\alpha & \alpha\\ ۵\alpha & ۴\alpha+\beta\end{bmatrix}$$

کاملاً واضح است که $\alpha=۲$ است. با قرارداد $\alpha=۲$ در معادلهٔ $\beta-۲\alpha=۹$، داریم: $\beta-۴=۹\Rightarrow\beta=۱۳$

بنابراین دوتایی (α,β)، $(۲,۱۳)$ است.

روش دوم: به کمک رابطهٔ کِیلی ـ همیلتُن داریم: $A^۲-(-۲+۴)A+(-۸-۵)I=\bar{O}\Rightarrow A^۲=۲A+۱۳I\Rightarrow\alpha=۲,\beta=۱۳$

دقت کنید دترمینان ماتریس A برابر است با: $|A|=\begin{vmatrix}-۲ & ۱\\ ۵ & ۴\end{vmatrix}=(-۲\times۴)-(۱\times۵)=-۱۳$

۱۹- اگر $A=\begin{bmatrix}-۱ & m\\ ۲ & n\end{bmatrix}$ و $A^۲=۲A-۳I$، در این صورت $m^۲+n^۲$ چه‌قدر است؟

۱) ۲۵ ۲) ۱۸ ۳) ۱۳ ۴) ۲

پاسخ گزینهٔ «۲» **روش اول:** اول $A^۲$ را به دست می‌آوریم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}-۱ & m\\ ۲ & n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & m\\ ۲ & n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲m+۱ & mn-m\\ ۲n-۲ & n^۲+۲m\end{bmatrix}$$

با جایگزین‌کردن $A^۲$ در رابطهٔ $A^۲=۲A-۳I$ داریم:

$$\begin{bmatrix}۲m+۱ & mn-m\\ ۲n-۲ & n^۲+۲m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲ & ۲m\\ ۴ & ۲n\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۵ & ۲m\\ ۴ & ۲n-۳\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\begin{cases}۲m+۱=-۵\Rightarrow m=-۳\\ ۲n-۲=۴\Rightarrow n=۳\end{cases}$$

پس: $m^۲+n^۲=(-۳)^۲+۳^۲=۱۸$

روش دوم: ماتریس A یک ماتریس ۲×۲ است و در رابطهٔ کیلی ـ همیلتن صدق می‌کند، پس:

$$A^۲-(-۱+n)A+\begin{vmatrix}-۱ & m\\ ۲ & n\end{vmatrix}I=\bar{O}\Rightarrow A^۲+(۱-n)A+(-n-۲m)I=\bar{O}\Rightarrow A^۲=(n-۱)A+(n+۲m)I$$

با توجه به رابطهٔ $A^۲=۲A-۳I$ که در صورت سؤال داده شده، داریم:

$$\begin{cases}n-۱=۲\Rightarrow n=۳\\ n+۲m=-۳\xrightarrow{n=۳}m=-۳\end{cases}$$

بنابراین: $m^۲+n^۲=(-۳)^۲+۳^۲=۱۸$