ساختار کتاب

کتاب شب امتحان **ریاضی (۳) دوازدهم** از ۴ قسمت اصلی به صورت زیر تشکیل شده است:

۱) آزمون‌های نوبت اول: آزمون‌های شمارهٔ ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم؛ بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها، ۲۰نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها **نکات مشاوره‌ای** نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس‌خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول، مشابه آزمونی که معلمتان از شما خواهد گرفت، ببینید.

۲) آزمون‌های نوبت دوم: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۱۲ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

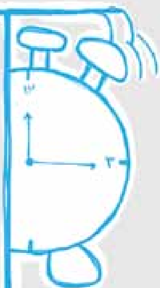
الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۸ را که به ترتیب امتحان‌های نهایی خرداد و شهریور ۱۴۰۰ و دی ۱۴۰۰ و ۱۴۰۱ است هم طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها، ۲۰ نمره دارند؛ در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها **نکات مشاوره‌ای** دارند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشابهِ آزمون پایان سال مواجه خواهید شد. این آزمون‌ها به ترتیب امتحان‌های نهایی خرداد ۱۴۰۱، خرداد ۱۴۰۲، شهریور ۱۴۰۱ و شهریور ۱۴۰۲ هستند.

۳) پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون‌ها: در پاسخ تشریحی آزمون‌ها، همهٔ آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمرهٔ کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

۴) درس‌نامهٔ کامل شب امتحانی: این قسمت، برگ برندهٔ شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند. در این قسمت، همهٔ آن‌چه را که شما برای گرفتن نمرهٔ عالی در امتحان ریاضی (۳) نیاز دارید، در ۱۷ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

یک راهکار: موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های اول تا چهارم آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.



فهرست

بارم‌بندی درس ریاضی (۳)

شمارهٔ فصل		نوبت اول	نوبت دوم	شهریور و دی
فصل اول		۷	۲	۳
فصل دوم		۵	۲	۳
فصل سوم		۵	۲	۲
فصل چهارم	تا صفحهٔ ۷۶	۳	۱	۵
	صفحهٔ ۷۷ به بعد	–	۴	
فصل پنجم		–	۳/۵	۳
فصل ششم		–	۳/۵	۲/۵
فصل هفتم		–	۲	۱/۵
جمع		۲۰	۲۰	۲۰

ردیف | # آزمون شمارهٔ ۱ | نوبت اول پایهٔ دوازدهم | نمره

فصل اول

۱ درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید: — نمره: ۱

الف) برای دو تابع f و g با شرط آن‌که $f \neq g$ تساوی $(fog)(x) = (gof)(x)$ هیچ‌گاه برقرار نیست.

ب) بُرد تابع $۲f(x-۱)$ در حالت کلی با بُرد تابع $f(x)$ برابر نیست.

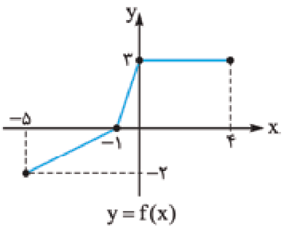
۲ ابتدا نمودار تابع f را رسم کنید سپس بازه‌هایی را که در آن‌ها تابع اکیداً صعودی، اکیداً نزولی یا ثابت است، مشخص کنید. — نمره: ۱/۵

$$f(x) = \begin{cases} x^۳ & x < ۰ \\ ۱ & ۰ \leq x \leq ۱ \\ x - ۱ & x > ۱ \end{cases}$$

شما از سال دهم با رسم نمودارهای مختلف سروکار داشتین، ولی اگه بازم یادتون رفته چه‌طوری نمودار توابع رو رسم کنید به درس‌نامهٔ آخر این کتاب یه نگاهی بندازین.

۳ با رسم نمودار، وضعیت یکنوایی تابع $y = ۲^x - ۱$ را بررسی کنید، سپس در صورت امکان، ضابطه و نمودار تابع وارون آن را به دست آورید. — نمره: ۱/۲۵

۴ نمودار تابع $y = f(x)$ داده شده است. نمودار توابع $y = \frac{۱}{۲}f(۲x)$ و $y = -f(-x)$ را رسم کنید. — نمره: ۱



۵ برای دو تابع $f(x) = \frac{۱ + x^۲}{۱ - x^۲}$ و $g(x) = \sqrt{x(۱-x)}$ ضابطه و دامنهٔ تابع fog را به دست آورید. — نمره: ۱

۶ نمودار تابع $f(x) = x^۲ - ۲x$ را رسم کرده سپس دامنه‌اش را طوری محدود کنید که یک‌به‌یک شود، در نهایت با در نظر گرفتن این دامنه، ضابطهٔ وارون f را به دست آورید. — نمره: ۱/۲۵

فصل دوم

۷ برای زاویهٔ $۲۲/۵^\circ$ مقادیر سینوس، کسینوس و تانژانت را بدست آورید. — نمره: ۱/۵

ما مقدارهای $\sin ۲۲/۵^\circ$ و $\cos ۲۲/۵^\circ$ رو نمی‌دونیم ولی $\sin ۴۵^\circ$ و $\cos ۴۵^\circ$ رو بلدیم، پس از فرمول‌های ۲α استفاده می‌کنیم.

۸ معادلهٔ مثلثاتی $\cos x(۴\cos x - ۹) = -۵$ را حل کنید. جواب‌هایی را که در بازهٔ $[۰, ۴\pi]$ قرار دارند، تعیین کنید. — نمره: ۱/۲۵

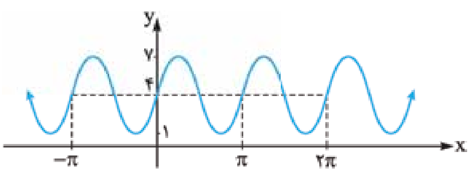
۹ در جای خالی، عبارت مناسب قرار دهید: — نمره: ۰/۲۵

جواب معادلهٔ $\cos^۲ x - \sin^۲ x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ که در بازهٔ $[۰, \frac{\pi}{۲}]$ واقع می‌باشد، برابر با .... است.

در حل معادلهٔ مثلثاتی توجه کنید که باید فقط یک نسبت مثلثاتی ایجاد کنیم.

۱۰ نمودار مقابل مربوط به تابع $f(x) = a\sin bx + c$ است. با دقت در شکل نمودار و تشخیص دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطهٔ آن را مشخص کنید. — نمره: ۱

در این‌جور نمودارها باید به max، min، دورهٔ تناوب و همچنین نمودار استاندارد $\sin x$ و $\cos x$ توجه کنید.



۱۱ مثلثی با مساحت ۹ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازهٔ دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۱۸ سانتی‌متر باشند، آن‌گاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟ — نمره: ۱

فصل سوم

۱۲ حاصل حدود زیر را به دست آورید: — نمره: ۲/۵

در محاسبهٔ حد توابع کسری، اگر صورت کسر، عددی غیرصفر و مخرج کسر صفر شد باید نوع صفر رو تعیین کنید یعنی باید ببینید مخرج ۰^+ می‌شود یا ۰^-

الف) $\lim\limits_{x \to -۲} \frac{x^۳ - x^۲ - x + ۱۰}{x^۲ + ۳x + ۲}$

ب) $\lim\limits_{t \to -\infty} \frac{۱ - ۹t^۳}{t^۲ + ۲t}$

پ) $\lim\limits_{x \to ۱} \frac{۴x}{(x-۱)^۳}$

ردیف	آزمون شمارهٔ ۱	نوبت اول پایهٔ دوازدهم	نمره

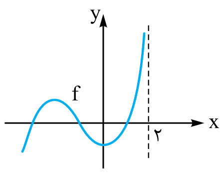
۱۳ با توجه به جدول زیر می‌توان گفت: ۱

الف) حد تابع f وقتی $x \to +\infty$ برابر است با ....

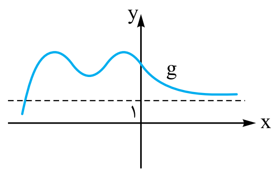
ب) حد f وقتی $x \to -\infty$ برابر است با ....

x	$-\infty$	$\leftarrow$	-۱۰۰۰	-۱۰۰	۰	۱۰۰	۱۰۰۰	$\rightarrow$	$+\infty$
$f(x)=\frac{۱}{x}$	○	$\leftarrow$	○	○	○	○	○	$\rightarrow$	○

۱۴ برای هر شکل، یک عبارت حدی مناسب بنویسید. ۱/۵

الف) 

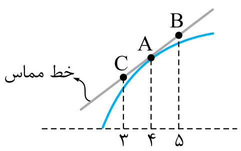
(حد در x = ۲)

ب) 

(حد در $+\infty$)

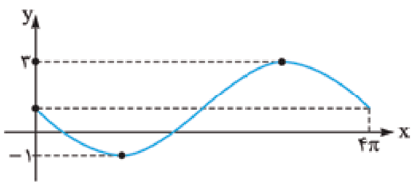
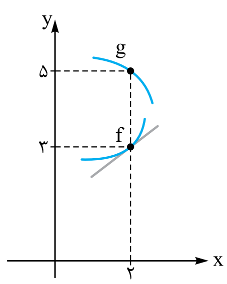
فصل چهارم

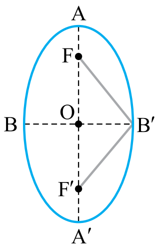
۱۵ برای تابع f در شکل مقابل داریم: $f'(۴)=۲$ و $f(۴)=۱۸$. مختصات نقاط B و C را به دست آورید. ۱/۵



۱۶ با فرض آن‌که $f(x)=-x^۲+۴x$ باشد به کمک تعریف مشتق، مقدار $f'(۳)$ را به دست آورید. سپس معادلهٔ خط مماس بر نمودار $f(x)$ را در نقطهٔ $x=۳$ بنویسید. ۱/۵

موفق باشید — جمع نمرات ۲۰

ردیف	آزمون شمارهٔ ۱۰ — نوبت دوم پایهٔ دوازدهم ـ نهایی خرداد ۱۴۰۲	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) بی‌شمار تابع وجود دارد که هم صعودی و هم نزولی است. ب) نقطهٔ $(1,1)$ یک نقطه گوشه‌ای برای تابع $f(x)=\|2-x^2\|$ است. پ) هر نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع، یک نقطهٔ بحرانی آن تابع است.	۰/۷۵
۲	در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید. الف) اگر $f(x)=3+\sqrt{2x-1}$ باشد، مقدار $(fof^{-1})(5)$ برابر با .... است. ب) اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی اول و B مجموعهٔ اعداد طبیعی مرکب و $C=$ ...... باشند، آن‌گاه A، B و C یک افراز روی مجموعهٔ اعداد طبیعی است. پ) نقطهٔ $(-2,4)$ روی نمودار تابع $y=f(x)$ می‌باشد. نقطهٔ متناظر آن روی نمودار تابع $y=f(2x)$ برابر .... است.	۰/۷۵
۳	اگر $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=x-1$، آن‌گاه: الف) دامنهٔ تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید. ب) ضابطهٔ تابع fog را بنویسید.	۱/۲۵
۴	نمودار زیر قسمتی از نمودار تابع $y=a\sin bx+1$ است. حاصل ab را بیابید.  	۱/۲۵
۵	جواب(های) معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x-\cos x=0$ را در بازهٔ $(0,\pi)$ مشخص کنید.	۰/۷۵
۶	آیا مقدار $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{[x]-1}$ وجود دارد؟ چرا؟	۰/۵
۷	حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. الف) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ ب) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x-2}{\|\sin x\|}$ پ) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3x^2+4x^5}{x^3-x}$	۱/۵
۸	با توجه به نمودارهای توابع f و g، حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)g(x)-3g(x)}{x-2}$ چند برابر $f'(2)$ است؟  	۱
۹	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده‌کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x)=(\sqrt{3x+2})(x^3+4)$ ب) $g(x)=\frac{-7x^2+1}{x-6}$ پ) $h(x)=(2x^5-1)^4$	۲/۲۵
۱۰	آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x)=2x^2+5x+1$ در نقطه‌ای به طول $x=2$، چند برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازهٔ $[-2,0]$ است؟	۱/۵

ردیف	سؤال	نمره
۱۱	بزرگ‌ترین بازه از $\mathbb{R}$ که تابع $f(x) = -2x^3 + 6x + 11$ در آن صعودی اکید باشد را با استفاده از جدول تغییرات بیابید.	۱/۵
۱۲	پنجره‌ای به شکل یک مستطیل و نیم‌دایره‌ای بر روی آن داریم، به طوری که قطر نیم‌دایره برابر با پهنای مستطیل است. اگر محیط این پنجره ۶ متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابید که بیشترین نوردهی را داشته باشد.	۱/۷۵
۱۳	در بیضی مقابل، کانون‌ها به مختصات $F(1,5)$ و $F'(1,1)$ و یک رأس قطر بزرگ آن $A(1,6)$ می‌باشد:  الف) فاصلهٔ کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید. ب) معادلهٔ قطر کوچک بیضی را بنویسید. پ) مساحت مثلث $B'FF'$ را به دست آورید.	۱/۷۵
۱۴	اگر دو دایره به معادله‌های $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ و $(x-2)^2 + (y+1)^2 = m^2$ مماس‌خارج باشند، مقدار m را بیابید.	۱/۷۵
۱۵	مدرسهٔ A سه برابر مدرسهٔ B دانش‌آموز دارد. ۳۵ درصد دانش‌آموزان مدرسهٔ A و ۱۵ درصد دانش‌آموزان مدرسهٔ B، معدلی بالای ۱۸ دارند. اگر همهٔ دانش‌آموزان هر دو مدرسه در یک محوطه حاضر باشند و به تصادف یکی از آن‌ها را انتخاب کنیم: الف) با چه احتمالی فرد انتخابی از مدرسهٔ A و با چه احتمالی از مدرسهٔ B است؟ ب) با چه احتمالی فرد انتخابی، معدلی بالای ۱۸ دارد؟	۱/۷۵
	موفق باشید	جمع نمرات ۲۰

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

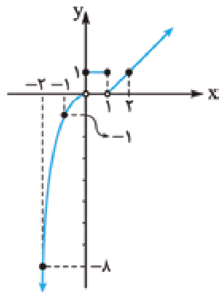
آزمون شمارهٔ ۱ (نوبت اول)

۱- الف) نادرست، مثلاً اگر $f(x)=x$ و $g(x)=\frac{۱}{x}$ باشند، با آن‌که $f\neq g$ ولی تساوی $fog=gof$ برقرار است و هر دو تابع fog و gof با هم برابر می‌شوند:

$$(fog)(x)=(gof)(x)=\frac{۱}{x}$$

ب) درست، مثلاً اگر بُرد $f(x)$ برابر با $[۰,۱]$ باشد بُرد $۲f(x-۱)$ برابر است با $[۰,۲]$.

۲- ابتدا با توجه به هر ضابطه و دامنهٔ مربوط به آن، تک‌تک نمودارها را به روش نقطه‌یابی رسم می‌کنیم، سپس صعودی یا نزولی بودن یا ثابت‌بودن هر یک را بررسی می‌کنیم:



$$f(x)=\begin{cases} x^۳ & x<۰ \\ ۱ & ۰\leq x\leq ۱ \\ x-۱ & x>۱\end{cases}$$

$x^۳ \quad x<۰ \Rightarrow$

x	۰	−۱	−۲
y	۰	−۱	−۸

$۱ \quad ۰\leq x\leq ۱ \Rightarrow y=۱$ خط افقی

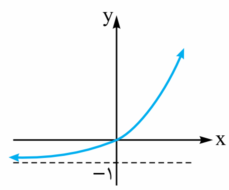
$x-۱ \quad x>۱ \Rightarrow$

x	۱	۲
y	۰	۱

واضح است که تابع در بازه‌های $(-\infty,۰)$ و $(۱,+\infty)$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $[۰,۱]$ ثابت است.

۳- با توجه به شکل مقابل، هر خط افقی، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند؛ پس این تابع، یک‌به‌یک است. لذا وارون‌پذیر هم می‌باشد.

ضمناً تابع، اکیداً صعودی است.



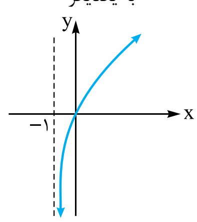
$y=۲^x-۱$

حال برای به دست آوردن تابع وارون، باید x را برحسب y بنویسیم. ضمناً توجه دارید که وارون تابع نمایی، یک تابع لگاریتمی است و برعکس.

یافتن تابع وارون: $y=۲^x-۱ \Rightarrow ۲^x=y+۱$

$$\xrightarrow[\text{در مبنای ۲ می‌گیریم.}]{\text{از دو طرف لگاریتم}} \log_۲ ۲^x=\log_۲(y+۱)\Rightarrow x=\log_۲(y+۱)$$

$$\xrightarrow[\text{به یکدیگر}]{\text{تبدیل اسم متغیرها}} y^{-۱}(x)=\log_۲(x+۱)$$



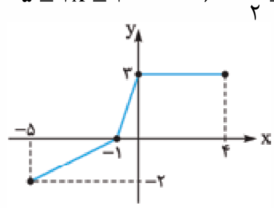
$y^{-۱}=\log_۲(x+۱)$

برای رسم نمودار $y^{-۱}$ باید نمودار $\log_۲ x$ را ۱ واحد به چپ حرکت دهیم:

(یا می‌توانیم قرینهٔ نمودار $y=۲^x-۱$ را نسبت به خط $y=x$ رسم کنیم.)

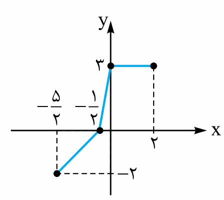
۴- دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر $[-۵,۴]$ می‌باشد. حال برای یافتن دامنهٔ $f(۲x)$ باید طول تمام نقاط را بر ۲ تقسیم کنیم؛ یعنی دامنهٔ تابع $f(۲x)$ به صورت $[-\frac{۵}{۲},\frac{۴}{۲}]$ خواهد بود. زیرا:

$$-۵\leq ۲x\leq ۴ \xrightarrow{\div ۲} -\frac{۵}{۲}\leq x\leq ۲$$

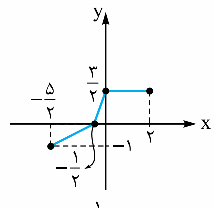


$y=f(x)$

طول نقاط را نصف می‌کنیم.



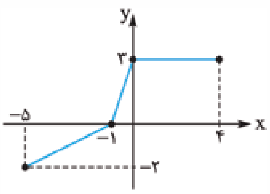
$y=f(۲x)$



$y=\frac{۱}{۲}f(۲x)$

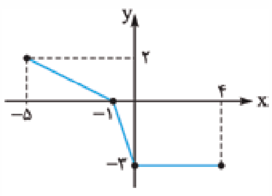
عرض نقاط را نصف می‌کنیم.

حالا نمودار $y=-f(-x)$ را رسم می‌کنیم:



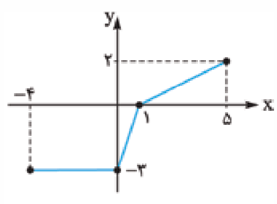
$y=f(x)$

قرینه نسبت به محور xها



$y=-f(x)$

قرینه نسبت به محور yها



$y=-f(-x)$

۵- ابتدا دامنهٔ توابع f و g را جداگانه به دست می‌آوریم. می‌دانید دامنهٔ توابع گویا به شکل $\frac{\bigcirc}{\square}$ برابر است با $\mathbb{R}-\{$ریشه‌های معادلهٔ $\square=۰\}$ و دامنهٔ توابع رادیکالی به شکل $\sqrt[\text{زوج}]{\square}$ برابر است با جواب نامعادلهٔ $\square\geq ۰$.

$$f(x)=\frac{۱+x^۲}{۱-x^۲}\xrightarrow{\text{یافتن دامنه}} ۱-x^۲=۰ \Rightarrow x^۲=۱$$

$$\Rightarrow x=\pm ۱ \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{\pm ۱\}$$

$$g(x)=\sqrt{x(۱-x)}\xrightarrow{\text{یافتن دامنه}} x(۱-x)\geq ۰ \xrightarrow[\text{علامت}]{\text{جدول تعیین}} ۰\leq x\leq ۱$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{۰\leq x\leq ۱ \mid \underbrace{\sqrt{x(۱-x)}\neq \pm ۱}_{\text{طرفین به توان ۲}}\}$$

$$x(۱-x)\neq ۱ \downarrow \Delta<۰ \downarrow x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow D_{fog}=\{۰\leq x\leq ۱ \mid x\in\mathbb{R}\}=[۰,۱]$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{۱+g^۲}{۱-g^۲}=\frac{۱+(\sqrt{x(۱-x)})^۲}{۱-(\sqrt{x(۱-x)})^۲}$$

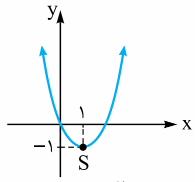
۶- $y=x^۲-۲x\Rightarrow x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(-۲)}{۲(۱)}=۱$ (طول رأس)

حالا عدد به دست آمده را در تابع سهمی قرار می‌دهیم تا عرض رأس هم به دست آید:

$y=x^۲-۲x\xrightarrow{x=۱} y_s=۱^۲-۲(۱)=-۱$ عرض رأس

پس مختصات رأس به صورت $S(۱,-۱)$ است.

ضمناً سهمی min دارد، چون ضریب x^2 مثبت است:
اگر مثلاً دامنه را به صورت $[1,+\infty)$ تعریف کنیم، f
یک‌به‌یک خواهد شد که در این صورت خواهیم داشت:



$$y=(x-1)^2-1 \Rightarrow (x-1)^2=y+1$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} x-1=\pm\sqrt{y+1} \xrightarrow{x\ge 1} x-1=\sqrt{y+1}$$

$$\Rightarrow x=1+\sqrt{y+1} \xrightarrow[\text{به یکدیگر}]{\text{تبدیل اسم متغیرها}} f^{-1}(x)=1+\sqrt{x+1}$$

۷- نسبت‌های مثلثاتی $22/5^\circ$ را نمی‌دانیم ولی نسبت‌های مثلثاتی ۲ برابر آن یعنی 45° را می‌دانیم لذا از فرمول‌های 2α استفاده می‌کنیم:

$$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha \xrightarrow{\alpha=22/5^\circ} \cos 45^\circ = 1-2\sin^2 22/5^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}=1-2\sin^2 22/5^\circ \Rightarrow 2\sin^2 22/5^\circ = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 22/5^\circ = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin^2 22/5^\circ = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$\xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{جذر}} \sin 22/5^\circ = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos^2 22/5^\circ = 1-\sin^2 22/5^\circ = 1-\frac{2-\sqrt{2}}{4} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \cos 22/5^\circ = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\tan 22/5^\circ = \frac{\sin 22/5^\circ}{\cos 22/5^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\cancel{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$$

۸- $4\cos^2 x-9\cos x+5=0$

با فرض $\cos x = t$ خواهیم داشت: $4t^2-9t+5=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=81-80=1$

$$\Rightarrow t=\frac{9\pm\sqrt{1}}{2(4)}=\frac{9\pm 1}{8} \Rightarrow \begin{cases} t=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}>1 \ \text{غ‌ق‌ق} \\ t=\frac{8}{8}=1 \end{cases}$$

(کسینوس یک زاویه نمی‌تواند بزرگ‌تر از ۱ باشد.)

$$t=1 \Rightarrow \cos x=1 \Rightarrow x=2k\pi \begin{cases} \xrightarrow{k=0} x=0\in[0,4\pi] \\ \xrightarrow{k=1} x=2\pi\in[0,4\pi] \\ \xrightarrow{k=2} x=4\pi\in[0,4\pi] \end{cases}$$

۹- $\frac{\pi}{12}$، توضیح

$$\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$$

$$\Rightarrow \cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6} \Rightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$$

$$\xrightarrow{\div 2} x=k\pi\pm\frac{\pi}{12} \xrightarrow{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} x=\frac{\pi}{12}$$

۱۰- با توجه به شکل، $max=7$ و $min=1$ و همچنین دورهٔ تناوب برابر با π است؛ بنابراین:

$$T=\frac{2\pi}{|b|}=\pi \Rightarrow |b|=2 \Rightarrow b=\pm 2$$

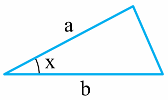
ضمناً توجه کنید که مقدار c همواره برابر است با میانگین max و min، لذا:

$$max=7, min=1 \Rightarrow c=\frac{7+1}{2}=4$$

$$max=|a|+c \Rightarrow |a|+4=7 \Rightarrow |a|=3 \Rightarrow a=\pm 3$$

با توجه به شکل a و b هر دو باید هم‌علامت باشند، لذا: $a=3$ و $b=2$ یا $a=-3$ و $b=-2$، ولی ضابطهٔ تابع در هر دو حالت به شکل $y=3\sin 2x+4$ می‌باشد.

۱۱- اگر دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها از مثلثی را داشته باشیم (مانند شکل زیر) می‌توانیم مساحت آن را به دست آوریم.



$$\Rightarrow \text{مساحت}\ S=\frac{1}{2}a.b.\sin x$$

با توجه به اطلاعات مسئله، داریم:

$$\frac{1}{\cancel{2}}\times\cancel{2}\times 18\times\sin x=9 \Rightarrow \sin x=\frac{9}{18}=\frac{1}{2}=\sin\underbrace{\boxed{\frac{\pi}{6}}}_{\alpha}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \xrightarrow{k=0} x=\frac{\pi}{6} \\ x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{5\pi}{6} \xrightarrow{k=0} x=\frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

پس مسئله دو جواب دارد، یعنی ۲ مثلث با خواص ذکرشده وجود دارند.

۱۲- الف) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3-x^2-x+10}{x^2+3x+2}=\frac{0}{0}$

عامل صفرشونده $(x+2)$ است؛ پس صورت و مخرج را بر $(x+2)$ تقسیم می‌کنیم.
البته مخرج به راحتی به کمک اتحاد جمله‌مشترک قابل تجزیه است:

$$x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$$

حالا صورت کسر را بر $x+2$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} x^3-x^2-x+10 & x+2 \\ \hline -(x^3+2x^2) & x^2-3x+5 \\ \quad -3x^2-x+10 & \\ \quad -(-3x^2-6x) & \\ \qquad\quad 5x+10 & \\ \qquad\quad -(5x+10) & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{حد مورد نظر}=\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(x^2-3x+5)}{\cancel{(x+2)}(x+1)}$$

$$=\frac{(-2)^2-3(-2)+5}{-2+1}=\frac{15}{-1}=-15$$

ب) $\lim\limits_{t\to -\infty}\frac{1-9t^3}{t^2+2t}=\lim\limits_{t\to -\infty}\frac{-9t^3}{t^2}=\lim\limits_{t\to -\infty}\frac{-9t}{1}=-9\times(-\infty)=+\infty$

پ) اگر به جای xها ۱ بگذاریم، مخرج کسر صفر می‌شود، لذا باید حد چپ و راست را جداگانه محاسبه کنیم:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{4x}{(x-1)^3}=\frac{4(1)}{(0^+)^3}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{4x}{(x-1)^3}=\frac{4(1)}{(0^-)^3}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

۱۳- به جای x در تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ اعداد داده‌شده را جایگزین می‌کنیم تا ببینیم مقادیر تابع به سمت چه عددی نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند.

x	$-\infty$ ←	-1000	-100	0	100	1000	→ $+\infty$
$f(x)=\frac{1}{x}$	0 ←	$-0/001$	$-0/01$	تعریف‌نشده	$0/01$	$0/001$	→ 0

پس نتیجه می‌گیریم که:

الف) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$ ب) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$

۱۴- الف) وقتی x از سمت چپ به ۲ نزدیک می‌شود، عرض نقاط تابع f از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر می‌شود، لذا:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=+\infty$$

ب) وقتی x به سمت $+\infty$ نزدیک می‌شود، مقادیر تابع g به عدد ۱ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند، لذا:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=۱$$

۱۵- در نقطهٔ A خط بر منحنی تابع مماس است، لذا $f'(۴)$ همان شیب خط مماس است، مختصات نقطهٔ A هم که به شکل $(۴,۱۸)$ می‌باشد، لذا ابتدا معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم:

$$y-y_۱=m(x-x_۱)\xrightarrow[m=۲]{A\begin{vmatrix}۴\to x_۱\\ ۱۸\to y_۱\end{vmatrix}} y-۱۸=۲(x-۴)$$

$$\Rightarrow\ y=۲x-۸+۱۸\ \Rightarrow\ y=۲x+۱۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{x=۳}\ y=۲(۳)+۱۰=۱۶\ \Rightarrow\ C\begin{vmatrix}۳\\ ۱۶\end{vmatrix}\\[2mm] \xrightarrow{x=۵}\ y=۲(۵)+۱۰=۲۰\ \Rightarrow\ B\begin{vmatrix}۵\\ ۲۰\end{vmatrix}\end{cases}$$

۱۶-

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$\Rightarrow f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{-x^۲+۴x-۳}{x-۳}=$$

$$\lim_{x\to ۳}\frac{-(x^۲-۴x+۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{-\cancel{(x-۳)}(x-۱)}{\cancel{x-۳}}=-۲$$

حالا به کمک $A(۳,۳)$ و $m=-۲$ معادلهٔ خط را می‌نویسیم:

$$y-y_۱=m(x-x_۱)\Rightarrow y-۳=-۲(x-۳)$$

آزمون شمارهٔ ۱۰ (نوبت دوم)

۱- الف) درست: هر تابع که در آن حداقل ۲ نقطه دارای عرض یکسان باشند، هم صعودی و هم نزولی است. مانند تابع $f(x)=۳$.

ب) نادرست: نقطهٔ گوشه‌ای، نقطه‌ای است که مشتق چپ و راست تابع در آن نقطه، دو عدد مختلف شوند. تابع f در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته است؛ پس به سراغ مشتق آن می‌رویم:

$$f(x)=\begin{cases}۲-x^۲ & -\sqrt{۲}\le x\le\sqrt{۲}\\ x^۲-۲ & x<-\sqrt{۲} \text{ یا } x>\sqrt{۲}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ f'(x)=\begin{cases}-۲x & -\sqrt{۲}\le x\le\sqrt{۲}\\ ۲x & x<-\sqrt{۲} \text{ یا } x>\sqrt{۲}\end{cases}$$

عدد $x=۱$ در دامنهٔ بالایی f' قرار دارد و یکی از نقاط مرزی دامنه (نقاط $\sqrt{۲}$ و $-\sqrt{۲}$) نیست؛ پس مشتق چپ و مشتق راست f در $x=۱$ با هم برابرند:

$$f'_+(۱)=f'_-(۱)=-۲(۱)=-۲$$

پس $x=۱$ نقطهٔ گوشه‌ای تابع f نیست.

پ) درست

۲- الف) ۵: می‌دانیم اگر $f^{-۱}$ وارون f باشد، داریم:

$$\begin{cases}(fof^{-۱})(x)=x & x\in D_{f^{-۱}}\\ (f^{-۱}of)(x)=x & x\in D_f\end{cases}$$

پس حاصل $(fof^{-۱})(۵)$ برابر خود ۵ می‌شود که البته این ۵ باید متعلق به $D_{f^{-۱}}$ باشد که هست. (در تابع f اگه به جای f عدد ۵ رو بذارید، مقداری برای x پیدا میشه؛ پس ۵ متعلق به دامنهٔ $f^{-۱}$ هست.)

ب) $\{۱\}$: شرط این‌که سه مجموعهٔ A، B و C یک افراز روی مجموعهٔ اعداد طبیعی باشند، این است که اولاً این مجموعه‌ها دوبه‌دو هیچ اشتراکی با هم نداشته باشند، ثانیاً اجتماع آن‌ها برابر $\mathbb{N}$ شود:

$$A=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,\dots\}$$
$$B=\{۴,۶,۸,۹,۱۰,۱۲,۱۴,\dots\}$$
$$\Rightarrow A\cup B=\{۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰,\dots\}$$

پس مجموعهٔ C اگر برابر با $\{۱\}$ باشد، آن‌گاه $A\cup B\cup C$ با $\mathbb{N}$ برابر خواهد شد.

پ) $(-۱,۴)$: می‌دانیم در تبدیل $f(x)$ به $f(kx)$، طول نقاط بر عدد k تقسیم می‌شوند؛ لذا طول نقطهٔ داده‌شده یعنی -۲ را بر ۲ تقسیم می‌کنیم که برابر -۱ می‌شود ولی عرض آن تغییری نمی‌کند، لذا نقطهٔ متناظر روی نمودار $f(۲x)$ برابر $(-۱,۴)$ است.

۳- الف) می‌دانیم دامنهٔ fog از فرمول $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$ به دست می‌آید؛ لذا خواهیم داشت:

$$D_{fog}=\{x\in\mathbb{R}\mid x-۱\ge -۱\}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\ge ۰\}=[۰,+\infty)$$

ب) $$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{g+۱}=\sqrt{x-۱+۱}=\sqrt{x}$$

۴- از روی نمودار می‌فهمیم که دورهٔ تناوب برابر ۴π است؛ لذا:

$$T=۴\pi \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|}=۴\pi \Rightarrow |b|=\frac{۲\pi}{۴\pi}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow b=\pm\frac{۱}{۲}$$

$$|a|=\frac{\max-\min}{۲}=\frac{۳-(-۱)}{۲}=۲ \Rightarrow a=\pm ۲$$

چون نمودار اول min دارد بعد max، لذا $a\times b$ باید منفی شود؛ پس $ab=-۱$. (یا a رو منفی بگیرید یا b ولی نه هم‌زمان).

۵- می‌دانیم جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos x=\cos\alpha$ به شکل $x=۲k\pi\pm\alpha$ می‌باشد $(k\in\mathbb{Z})$؛ لذا داریم:

$$\cos ۲x=\cos x \Rightarrow ۲x=۲k\pi\pm x$$

$$\Rightarrow \begin{cases}۲x=۲k\pi+x \Rightarrow x=۲k\pi\\ ۲x=۲k\pi-x \Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}\end{cases}$$

معادلهٔ $x=۲k\pi$ در بازهٔ $(۰,\pi)$ جوابی ندارد. در معادلهٔ $x=\frac{۲k\pi}{۳}$ اگر به k عدد ۱ را بدهیم، به جواب $\frac{۲\pi}{۳}$ می‌رسیم که بین صفر و π قرار دارد.

۶- خیر ـ زیرا تابع $f(x)=\frac{۱}{[x]-۱}$ در همسایگی راست $x=۱$ تعریف نشده است.

۷- الف) اگر به جای xها ۱ را قرار دهیم، به $\frac{۰}{۰}$ می‌رسیم که مبهم است. در مخرج $\sqrt[۳]{x}-۱$ مشاهده می‌کنیم به خاطر وجود فرجهٔ ۳ می‌فهمیم که باید از اتحاد چاق و لاغر استفاده کنیم؛ یعنی الان $(\sqrt[۳]{x}-۱)$ را همان $(a-b)$ فرض می‌کنیم:

$$(a-b)(a^۲+ab+b^۲)=a^۳-b^۳$$

حالا صورت و مخرج کسر را در $a^۲+ab+b^۲$ ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{\sqrt[۳]{x}-۱}=\frac{x-۱}{\sqrt[۳]{x}-۱}\times\frac{\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱}{\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱)}{(\sqrt[۳]{x})^۳-۱^۳}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{\cancel{(x-۱)}(\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱)}{\cancel{x-۱}}=\sqrt[۳]{۱^۲}+\sqrt[۳]{۱}+۱=۱+۱+۱=۳$$

ب) می‌دانیم $\sin ۰=۰$ است ولی چون الان مخرج کسر صفر شده، باید مشخص کنیم که ۰^+ می‌شود یا ۰^-. گفته شده $x\to ۰^-$؛ پس x زاویه‌ای در ربع چهارم است و sin آن عددی منفی است ولی به خاطر وجود قدرمطلق می‌گوییم جواب مخرج ۰^+ می‌شود، لذا خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{x-۲}{|\sin x|}=\frac{-۲}{۰^+}=-\infty$$

پ) چون $x\to-\infty$، از صورت و مخرج، جملات پرتوان را انتخاب می‌کنیم و بقیه را حذف می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x^۲+۴x^۵}{x^۳-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۴x^۵}{x^۳}=\lim_{x\to-\infty}x^۲=(-\infty)^۲=+\infty$$

۸-

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)g(x)-۳g(x)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)g(x)-f(۲)g(x)}{x-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲}g(x)\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}g(x)\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=۵f'(۲)$$

۹-

الف) $$f'(x)=\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۲}}(x^۳+۴)+۳x^۲(\sqrt{۳x+۲})$$

ب) $$g'(x)=\frac{(-۱۴x)(x-۶)-(۱)(-۷x^۲+۱)}{(x-۶)^۲}$$

پ) $$h'(x)=۴(۲x^۵-۱)^۳(۱۰x^۴)$$

۱۰- می‌دانیم آهنگ تغییر لحظه‌ای f در نقطهٔ $x=a$ برابر $f'(a)$ و آهنگ تغییر متوسط f در بازهٔ $[a,b]$ برابر با $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ است؛ بنابراین:

$$f'(x)=۴x+۵ \Rightarrow f'(۲)=۱۳$$

$$\frac{f(۰)-f(-۲)}{۰-(-۲)}=\frac{۱-(-۱)}{۲}=۱$$

پس آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در نقطهٔ $x=۲$، ۱۳ برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازهٔ $[-۲,۰]$ است.

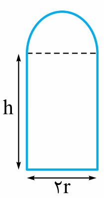
۱۱- ابتدا معادلهٔ $f'(x)=۰$ را حل می‌کنیم تا نقطه یا نقاط بحرانی (در صورت وجود) به دست بیایند. سپس مشتق را تعیین علامت می‌کنیم. در هر بازه‌ای که مشتق مثبت باشد، تابع f صعودی اکید است:

$$f'(x)=-۶x^۲+۶=۰ \Rightarrow x=\pm ۱$$

x		-۱		۱	
f'	$-$		$+$		$-$
f	↘		↗		↘

پس تابع در بازهٔ $[-۱,۱]$ صعودی اکید است.

۱۲- یک شکل فرضی برای سؤال رسم می‌کنیم. اگر شعاع نیم‌دایره r باشد، عرض مستطیل ۲r خواهد بود:



۶ = محیط پنجره

$$۲h+۲r+\pi r=۶ \Rightarrow h=\frac{۶-۲r-\pi r}{۲}$$

برای بیشترین نوردهی باید بیشترین مساحت را داشته باشیم لذا:

$$S(r)=\underbrace{۲rh}_{\text{مساحت مستطیل}}+\underbrace{\frac{\pi r^۲}{۲}}_{\text{مساحت نیم‌دایره}}=۲r\left(\frac{۶-۲r-\pi r}{۲}\right)+\frac{\pi r^۲}{۲}=۶r-۲r^۲-\frac{۱}{۲}\pi r^۲$$

$$\Rightarrow S'(r)=۶-۴r-\pi r$$

$$۶-۴r-\pi r=۰ \Rightarrow r=\frac{۶}{۴+\pi}$$

r		$\frac{۶}{۴+\pi}$	
S'	$+$		$-$
S	↗		↘

$$h=\frac{۶-(۲+\pi)\frac{۶}{۴+\pi}}{۲}=\frac{۶}{۴+\pi}$$

۱۳- الف) مختصات کانون‌ها را داریم. می‌دانیم طول نقطهٔ O با طول نقاط F و F' برابر است؛ لذا طول آن برابر با ۱ است. عرض نقطهٔ O هم برابر می‌شود با:

$$\text{عرض } O=\frac{\text{عرض } F+\text{عرض } F'}{۲}=\frac{۵+۱}{۲}=\frac{۶}{۲}=۳$$

از طرفی فاصلهٔ کانونی یعنی FF' برابر است با ۲c. مقدار c هم برابر است با فاصلهٔ O تا F، یعنی عدد ۲؛ لذا:

$$FF'=۲c=۲\times ۲=۴$$

ب) قطر کوچک یعنی BB' پاره‌خطی افقی است. از طرفی عرض نقاط B و B' و O برابر ۳ است؛ لذا معادلهٔ BB' برابر $y=۳$ است.

پ) ابتدا اندازهٔ OB' یعنی b را به دست می‌آوریم:

$$a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow ۳^۲=b^۲+۲^۲ \Rightarrow b^۲=۵ \Rightarrow b=\sqrt{۵}$$

$$S_{\text{مساحت مثلث}}=\frac{OB'\times FF'}{۲}=\frac{\sqrt{۵}\times ۴}{۲}=۲\sqrt{۵}$$

۱۴- ابتدا مرکز و شعاع هر دو دایره را به دست می‌آوریم، سپس از رابطهٔ $OO'=r+r'$ استفاده می‌کنیم:

$$x^۲+y^۲+۲x-۴y+۱=۰$$

$$\Rightarrow O(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲}) \Rightarrow O(\frac{-۲}{۲},\frac{۴}{۲}) \Rightarrow O(-۱,۲)$$

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲^۲+(-۴)^۲-۴(۱)}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۱۶-۴}=۲$$

$$(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=m^۲ \Rightarrow \begin{cases} x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \\ y+۱=۰ \Rightarrow y=-۱ \end{cases} \Rightarrow O'(۲,-۱)$$

$$r'^۲=m^۲ \Rightarrow r'=|m|$$

$$OO'=\sqrt{(۲+۱)^۲+(-۱-۲)^۲}=\sqrt{۹+۹}=\sqrt{۱۸}=۳\sqrt{۲}$$

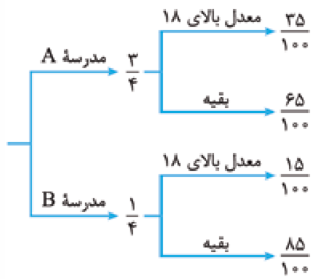
$$OO'=r+r' \Rightarrow ۳\sqrt{۲}=۲+|m| \Rightarrow |m|=۳\sqrt{۲}-۲$$

$$\Rightarrow m=\pm(۳\sqrt{۲}-۲)$$

ولی m باید مثبت باشد؛ پس فقط $m=۳\sqrt{۲}-۲$ قابل قبول است.

۱۵- الف) $P(A)=\frac{۳}{۴}, P(B)=\frac{۱}{۴}$

ب) می‌توانیم از روش نمودار درختی استفاده کنیم:



$$\text{جواب}=\frac{۳}{۴}\times\frac{۳۵}{۱۰۰}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۱۵}{۱۰۰}$$

$$=\frac{۱۰۵}{۴۰۰}\times\frac{۱۵}{۴۰۰}=\frac{۱۲۰}{۴۰۰}=\frac{۱۲}{۴۰}=\frac{۳}{۱۰}$$

فصل ۱: تابع

درس ۱: توابع چند جمله‌ای ـ توابع صعودی و نزولی

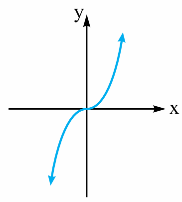
توابع چند جمله‌ای

هر تابع که ضابطه‌اش به شکل $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\dots+kx+c$ باشد یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n نام دارد.(n عدد صحیح نامنفی و $a\neq 0$ است.)

مثلاً تابع $f(x)=5x^4-8x+1$ یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ ۴ است.

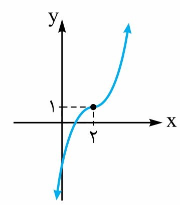
تابع درجه۳: تابع $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ یک تابع درجه۳ است $(a\neq 0)$. البته در کتاب درسی، تابع $y=x^3$ مورد توجه قرار گرفته که نمودار آن به طور تقریبی به شکل روبه‌رو است:

دامنه $=\mathbb{R}$ ، بُرد $=\mathbb{R}$

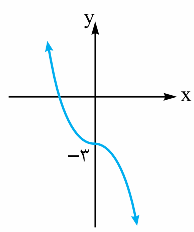


مثال نمودار توابع $y_1=(x-2)^3+1$ و $y_2=-x^3-3$ را به کمک نمودار $y=x^3$ رسم کنید.

پاسخ برای رسم نمودار y_1 باید نمودار x^3 را ۲ واحد به راست و سپس ۱ واحد به بالا انتقال دهیم که به نمودار روبه‌رو می‌رسیم:



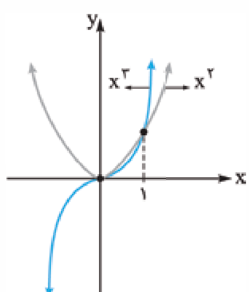
برای رسم نمودار y_2 ابتدا نمودار x^3 را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم سپس آن را ۳ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:



مقایسهٔ نمودار $y=x^2$ و $y=x^3$

می‌دانید که اگر x هر عددی بین صفر و یک باشد، حاصل x^2 بزرگ‌تر از x^3 است، پس در بازهٔ $(0,1)$ نمودار x^2 بالاتر از x^3 است ولی در بقیهٔ xهای مثبت، نمودار x^3 بالاتر از x^2 است.

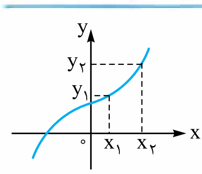
در xهای منفی هم که واضح است مقدار x^2 مثبت و مقدار x^3 منفی است، پس نمودار x^2 بالاتر است.



توابع یکنوا (صعودی یا نزولی)

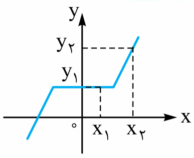
در تابع f اگر با افزایش مقادیر x مقادیر y هم مرتباً افزایش یابند، می‌گوییم f اکیداً صعودی است مانند تابع روبه‌رو:

$$x_2>x_1 \Rightarrow y_2>y_1$$

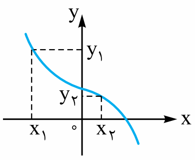


حالا اگر با افزایش مقادیر x مقادیر y زیاد شوند ولی بعضی نقاط نمودار، هم‌عرض باشند، می‌گوییم تابع f صعودی است مانند تابع روبه‌رو:

$$x_2>x_1 \Rightarrow y_2\geq y_1$$

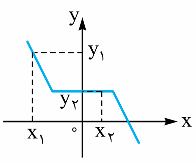


اکنون به کمک تعاریف قبل، می‌توانید تابع اکیداً نزولی و تابع نزولی را خودتان تعریف کنید.



شکل (۱)

$$x_2>x_1 \Rightarrow y_2<y_1$$



شکل (۲)

$$x_2>x_1 \Rightarrow y_2\leq y_1$$

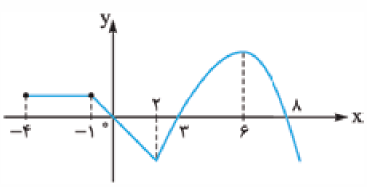
پس تابع مربوط به شکل (۱) اکیداً نزولی و تابع مربوط به شکل (۲) نزولی است.

نکته تنها تابعی که هم صعودی و هم نزولی است، تابع ثابت $y=k$ می‌باشد. $(k\in\mathbb{R})$

یکنواکردن تابع با محدودکردن دامنه

ضمناً ممکن است تابعی در کل دامنهٔ خود، نه صعودی باشد نه نزولی ولی در بازه‌هایی از دامنه‌اش صعودی و در بازه‌هایی نزولی باشد؛

مانند شکل روبه‌رو: این تابع در بازهٔ $[-4,-1]$ ثابت (هم صعودی و هم نزولی)، در بازه‌های $[-1,2]$ و $[6,\infty)$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[2,6]$ اکیداً صعودی است. ولی در کل دامنهٔ خود $[-4,+\infty)$ نه صعودی است نه نزولی.



مثال توابع زیر را رسم کرده و بازه‌هایی که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید. (خرداد ۹۰)

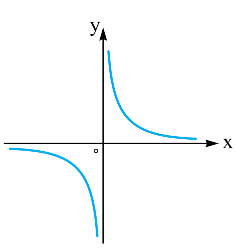
الف) $y=\frac{1}{x}$

ب) $y=-\frac{1}{x}$

پ) $f(x)=\begin{cases} x+1 & x<-2 \\ 1 & -2<x<1 \\ -2x & x>1 \end{cases}$

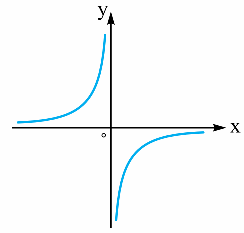
پاسخ

الف) $y=\frac{1}{x}\xrightarrow[\text{حفظ باشیم}]{\text{نمودار این تابع را باید}}$



تابع در بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(0,+\infty)$ اکیداً نزولی است ولی در کل $\mathbb{R}$، نه صعودی و نه نزولی است.

ب) $y=-\frac{۱}{x} \xrightarrow[\text{قرینه می‌کنیم}]{\text{نمودار } \frac{۱}{x} \text{ را نسبت به محور xها یا yها}}$

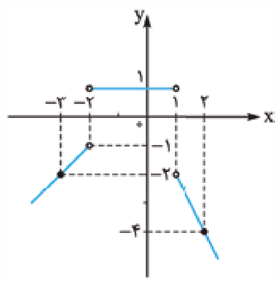


تابع در بازه‌های $(-\infty,۰)$ و $(۰,+\infty)$ اکیداً صعودی است ولی در کل $\mathbb{R}$، نه صعودی و نه نزولی است.

پ) $f(x)=\begin{cases} x+۱ & x<-۲ \Rightarrow \\ ۱ & -۲<x<۱ \\ -۲x & x>۱ \Rightarrow \end{cases}$

x	-۲	-۳
y	-۱	-۲

x	۱	۲
y	-۲	-۴



پس تابع f در بازهٔ $(-\infty,-۲)$ اکیداً صعودی، در بازهٔ $(-۲,۱)$ ثابت(هم صعودی، هم نزولی) و در بازهٔ $(۱,+\infty)$ اکیداً نزولی است.

درس ۲: ترکیب توابع

تعریف ترکیب توابع و به دست آوردن آن

اگر f و g دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند، ترکیب توابع f و g را با نمادهای fog و gof نمایش می‌دهیم و خواهیم نوشت:

$$y=(fog)(x)=f(g(x))\ ,\ D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$
$$y=(gof)(x)=g(f(x))\ ,\ D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

مثال اگر $f=\{(۳,۴),(۷,۸),(۵,۲)\}$ و $g=\{(۱,۳),(-۲,۷),(۵,۹)\}$ باشد، تابع fog را تشکیل دهید. *(خرداد ۸۹)*

پاسخ

$۱ \xrightarrow{g} ۳ \xrightarrow{f} ۴$

$-۲ \xrightarrow{g} ۷ \xrightarrow{f} ۸$ $\Rightarrow fog=\{(۱,۴),(-۲,۸)\}$

$۵ \xrightarrow{g} ۹ \xrightarrow{f} \times$ دقت‌کنید ۹ در دامنهٔ f نیست!

ضمناً با توجه به جواب به دست آمده برای fog می‌توان گفت:

$(fog)(۱)=۴\ ,\ (fog)(-۲)=۸$

مثال توابع $f(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ و $g(x)=\frac{x+۲}{x-۱}$ مفروض‌اند. الف) دامنهٔ توابع f، g و gof را تعیین کنید. ب) ضابطهٔ gof را بیابید. پ) $(\frac{gof}{f-g})(۰)$ را محاسبه کنید.

پاسخ الف) $f(x)=\sqrt{۴-x^۲} \xrightarrow{\text{تعیین دامنه}} ۴-x^۲\geq ۰$

$\Rightarrow x^۲\leq ۴ \Rightarrow -۲\leq x\leq ۲$

$g(x)=\frac{x+۲}{x-۱} \xrightarrow{\text{تعیین دامنه}} x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$

$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$

$=\{x\in[-۲,۲] \mid \underbrace{\sqrt{۴-x^۲}\in\mathbb{R}-\{۱\}}_{\sqrt{۴-x^۲}\neq ۱ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x\neq\pm\sqrt{۳}}\}=[-۲,۲]-\{\pm\sqrt{۳}\}$

ب) $(gof)(x)=g(f(x))=\frac{\sqrt{۴-x^۲}+۲}{\sqrt{۴-x^۲}-۱}$

پ) $(\frac{gof}{f-g})(۰)=\frac{(gof)(۰)}{f(۰)-g(۰)}=\frac{g(\overbrace{f(۰)}^{۲})}{۲-(-۲)}=\frac{۴}{۴}=۱$

به دست آوردن g(x) با داشتن f(x) و (fog)(x)

ابتدا کل تابع g را در تابع f به جای xها قرار می‌دهیم تا fog به دست آید. سپس جواب آن را با fog که در فرض به ما داده شده مساوی قرار می‌دهیم تا g به دست آید.

مثال اگر $f(x)=\frac{x}{۱+x}$ و $(fog)(x)=\frac{۱}{x}$ باشد، ضابطهٔ تابع g(x) را بیابید. *(خرداد ۸۷)*

پاسخ $(fog)(x)=f(g(x))=\frac{g(x)}{۱+g(x)} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} \frac{g(x)}{۱+g(x)}=\frac{۱}{x}$

$\Rightarrow x\,g(x)=۱+g(x) \Rightarrow \underbrace{x\,g(x)-g(x)}_{\text{فاکتور از } g(x)}=۱$

$\Rightarrow g(x)(x-۱)=۱ \Rightarrow g(x)=\frac{۱}{x-۱}$

به دست آوردن f(x) با داشتن g(x) و (fog)(x)

در این صورت فرض می‌کنیم که $g(x)=t$، سپس از این رابطه x را برحسب t پیدا کرده و در رابطهٔ fog که به ما داده شده قرار می‌دهیم. درنهایت t را به x تبدیل می‌کنیم.

مثال اگر $g(x)=۲x-۶$ و $(fog)(x)=۳x^۲-۷x$، آن‌گاه تابع f(x) را به دست آورید.

پاسخ $(fog)(x)=f(g(x)) \Rightarrow f(\underbrace{۲x-۶}_{t})=۳x^۲-۷x$

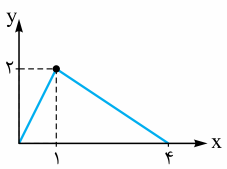
$۲x-۶=t \Rightarrow ۲x=t+۶ \Rightarrow x=\frac{t+۶}{۲}$

$\xrightarrow{\text{در تابع بالا}} f(t)=۳(\frac{t+۶}{۲})^۲-۷(\frac{t+۶}{۲})$

$\xrightarrow{\text{تبدیل t به x}} f(x)=۳(\frac{x+۶}{۲})^۲-۷(\frac{x+۶}{۲})$

انتقال و تبدیل نمودارها

نمودار تابع f را به صورت مقابل فرض کنید:

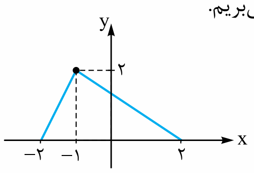


$y=f(x)$

۱) برای رسم نمودار $y=f(x+k)$:

- اگر $k>۰ \leftarrow$ نمودار را k واحد به سمت چپ می‌بریم.
- اگر $k<۰ \leftarrow$ نمودار را k واحد به سمت راست می‌بریم.

مثلاً برای رسم تابع $y=f(x+۲)$، نمودار f(x) را ۲ واحد به چپ منتقل می‌کنیم:

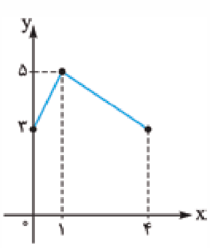


$y=f(x+۲)$

۲) برای رسم نمودار $y=f(x)+k$:

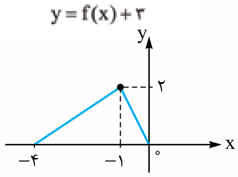
- اگر $k>۰ \leftarrow$ نمودار را k واحد به سمت بالا می‌بریم.
- اگر $k<۰ \leftarrow$ نمودار را k واحد به سمت پایین می‌بریم.

مثلاً برای رسم $y=f(x)+۳$ با توجه به نمودار اولیهٔ f کافی است نمودار f را ۳ واحد به بالا حرکت دهیم:



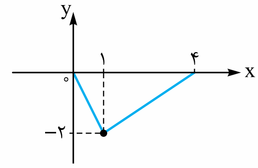
$y=f(x)+۳$

۳) برای رسم $y=f(-x)$ کافی است نمودار f را نسبت به محور yها قرینه کنیم (انعکاس دهیم):

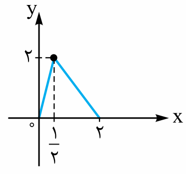


$y=f(-x)$

۴ برای رسم $y=-f(x)$ کافی است نمودار f را نسبت به محور xها قرینه کنیم (انعکاس دهیم):

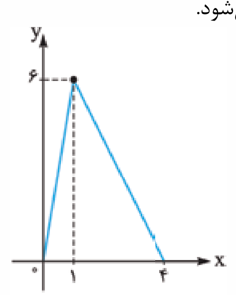

$y=-f(x)$

۵ برای رسم $y=f(kx)$ کافی است در نمودار f طول نقاط را بر k تقسیم کنیم. پس فقط دامنهٔ تابع تغییر می‌کند و برد بدون تغییر خواهد بود. مثلاً برای رسم $y=f(2x)$ طول نقاط نمودار f را بر ۲ تقسیم می‌کنیم (نمودار فشرده‌تر می‌شود).


$y=f(2x)$

- اگر $|k|>1$ باشد، نمودار به صورت افقی فشرده‌تر می‌شود.
- اگر $|k|<1$ باشد، نمودار به صورت افقی کشیده‌تر می‌شود.

۶ برای رسم $y=kf(x)$ کافی است در نمودار f عرض نقاط را در عدد k ضرب کنیم. پس فقط برد تابع تغییر می‌کند. ضمناً اگر $|k|>1$ باشد، نمودار به صورت عمودی کشیده‌تر و اگر $|k|<1$ باشد، نمودار به صورت عمودی فشرده‌تر می‌شود. مثلاً برای رسم نمودار $y=3f(x)$ عرض نقاط نمودار $f(x)$ را در عدد ۳ ضرب می‌کنیم:


$y=3f(x)$

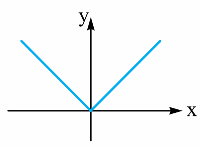
حالا به‌عنوان تمرین، خودتان نمودار $y=-3f(x-2)+3$ را رسم کنید.

مثال **به کمک قوانین انتقال و تبدیل، نمودار توابع زیر را رسم کنید:**

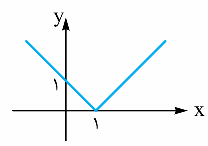
الف) $y=-3|x-1|+2$

ب) $y=2\cos\frac{x}{2}$

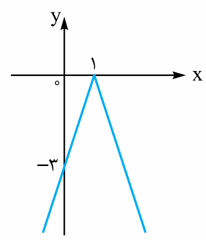
پاسخ الف) ابتدا نمودار $y=|x|$ را رسم می‌کنیم:


$y=|x|$

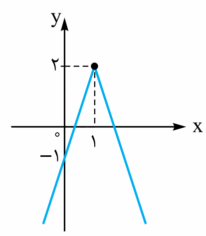
۱ واحد به راست


$y=|x-1|$

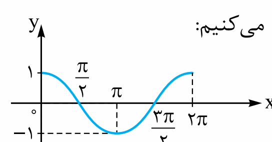
عرض نقاط ۳ برابر و سپس نمودار نسبت به محور xها قرینه می‌شود.


$y=-3|x-1|$

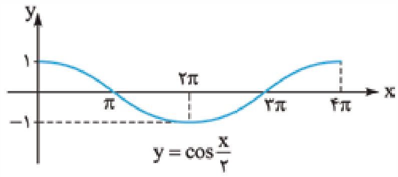
۲ واحد به سمت بالا


$y=-3|x-1|+2$

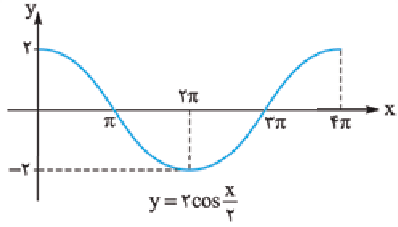
ب) ابتدا نمودار $y=\cos x$ را در بازهٔ $[0,2\pi]$ رسم می‌کنیم:


$y=\cos x$

طول نقاط ۲ برابر می‌شود.


$y=\cos\frac{x}{2}$

عرض نقاط ۲ برابر می‌شود.

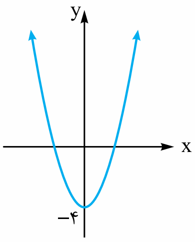

$y=2\cos\frac{x}{2}$

رسم نمودار $|f|$

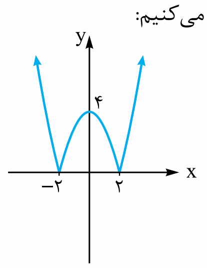
برای رسم نمودار $y=|f(x)|$، کافی است ابتدا نمودار $f(x)$ را رسم کنیم سپس قسمت‌هایی از نمودار را که زیر محور xها قرار دارند نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. زیرا می‌دانیم حاصل $|f(x)|$ همواره نامنفی است.

مثال **نمودار تابع $y=|x^2-4|$ را رسم کنید.**

پاسخ ابتدا نمودار $y=x^2-4$ را رسم کرده سپس قسمت پایین محور xها را نسبت به این محور قرینه می‌کنیم:


$y=x^2-4$

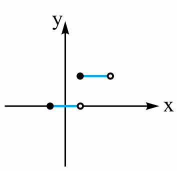
$\Rightarrow$

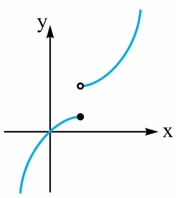

$y=|x^2-4|$

درس ۳: تابع وارون

توابع یک‌به‌یک

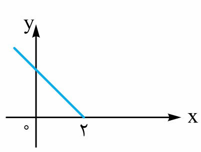
هرگاه تابع f به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها داده شود، این تابع وقتی یک‌به‌یک است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی، عضو دوم مساوی نداشته باشند. از نظر هندسی، نمودار یک تابع وقتی یک‌به‌یک است که هر خط افقی دلخواه، نمودار را در بیش از یک نقطه قطع نکند. مثلاً تابع شکل (۱) یک‌به‌یک نیست ولی تابع شکل (۲) یک‌به‌یک است.

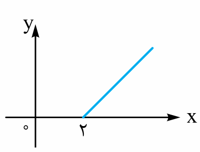

شکل (۱)

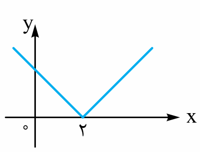

شکل (۲)

محدودکردن دامنه برای یک‌به‌یک شدن تابع

گاهی اوقات تابعی مانند f در دامنه‌اش یک‌به‌یک نیست ولی اگر دامنه‌اش را محدود کنیم، یک‌به‌یک می‌شود. به عنوان مثال تابع $f(x)=|x-2|$ در دامنه‌اش یعنی $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک نیست ولی اگر دامنهٔ آن را به $[2,+\infty)$ یا $(-\infty,2]$ محدود کنیم، تابع یک‌به‌یک خواهد شد. (البته در هر زیرمجموعه‌ای از این دو بازه هم، f یک‌به‌یک است.)


$f(x)=|x-2|$
$D_f=(-\infty,2]$
(یک‌به‌یک است.)


$f(x)=|x-2|$
$D_f=[2,+\infty)$
(یک‌به‌یک است.)


$f(x)=|x-2|$
$D_f=\mathbb{R}$
(یک‌به‌یک نیست.)

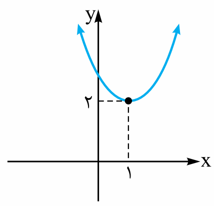
نکته ۱) تابع $y=|x-a|$ به ازای $[a,+\infty)$ یا $(-\infty,a]$ یا هر زیر مجموعه‌ای از این دو مجموعه، همواره یک‌به‌یک است.

۲) در سهمی $y=ax^۲+bx+c$ اگر دامنه را به صورت $[\frac{-b}{۲a},+\infty)$ یا $(-\infty,\frac{-b}{۲a}]$ یا هر زیرمجموعه‌ای از این دو مجموعه محدود کنیم، تابع یک‌به‌یک خواهد شد.

مثال **یک‌به‌یک بودن یا نبودن تابع $f(x)=x^۲-۲x+۳$ را بررسی کنید. اگر f یک‌به‌یک نبود، دامنهٔ آن را طوری محدود کنید که یک‌به‌یک شود.**

پاسخ بهتر است نمودار تابع را رسم کنیم و از روی آن، وضعیت یک‌به‌یکی تابع را بررسی کنیم: $y=x^۲-۲x+۳$

$$x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{۲}{۲(۱)}=۱ \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم}]{\text{در تابع}} y=۱^۲-۲(۱)+۳=۲ \Rightarrow S\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.$$

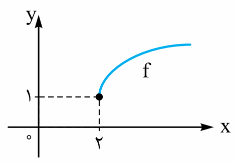


پس تابع f در $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک نیست ولی در بازه‌های $[۱,+\infty)$ یا $(-\infty,۱]$ یا هر زیرمجموعه‌ای از این دو بازه، یک‌به‌یک خواهد بود. (مثلاً در بازهٔ $[۲,+\infty)$ یا $[-\infty,۰]$ یک‌به‌یک است.)

تابع وارون (معکوس)

اگر در تابع f جای x و y ها را با هم عوض کنیم وارون f به دست می‌آید.

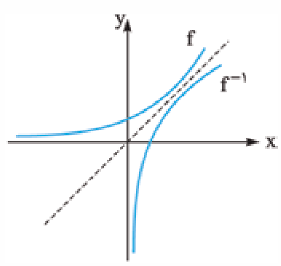
مثلاً اگر $f=\{(۱,۲),(۳,۴),(۵,۶)\}$ باشد، آن‌گاه $f^{-۱}=\{(۲,۱),(۴,۳),(۶,۵)\}$ می‌باشد.



همچنین اگر $g=\{(۲,۷),(۱,۹),(۳,۷)\}$ باشد، آن‌گاه $g^{-۱}=\{(۷,۲),(۹,۱),(۷,۳)\}$ خواهد بود. ولی اگر دقت کنید واضح است که $f^{-۱}$ خودش یک تابع است ولی $g^{-۱}$ تابع نیست (دو زوج مرتب مختلف، عضوهای اولشان مساوی است). علت این است که f یک‌به‌یک بود ولی g یک‌به‌یک نبود. در این‌جا اصطلاحاً می‌گوییم f وارون‌پذیر (معکوس‌پذیر) است. یعنی $f^{-۱}$ خودش، یک تابع است. با توجه به شکل داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} D_f=[۲,+\infty) \Rightarrow R_{f^{-۱}}=[۲,+\infty)\\ R_f=[۱,+\infty)\Rightarrow D_{f^{-۱}}=[۱,+\infty)\end{cases}$$

نتایج مهم این بحث



۱) تابع f وقتی وارون‌پذیر است که یک‌به‌یک باشد.

۲) دامنهٔ f با برد $f^{-۱}$ و برد f با دامنهٔ $f^{-۱}$ برابر است.

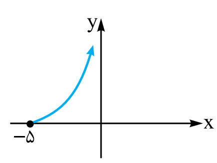
۳) نمودارهای f و $f^{-۱}$ نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرینه هستند.

$$A(۲,۳)\in f \Rightarrow A'(۳,۲)\in f^{-۱}$$

به کمک ضابطهٔ f

برای این کار ابتدا x را برحسب y به دست می‌آوریم و سپس نام x را به y یا $f^{-۱}$ و نام y را به x تغییر می‌دهیم. البته حواستان باشد اول باید بررسی کنید که آیا f یک‌به‌یک است یا خیر.

مثال **وارون‌پذیری تابع $f(x)=(x+۵)^۲$ را با شرط $x\ge -۵$ بررسی کرده سپس ضابطهٔ تابع وارون را در صورت وجود به دست آورید.**



پاسخ با رسم نمودار تابع، متوجه می‌شویم که تابع f با دامنهٔ $x\ge-۵$ یک‌به‌یک است:

$$\text{یافتن تابع وارون} \Rightarrow y=(x+۵)^۲ \xrightarrow[x\ge-۵]{\text{جذر}} x+۵=\sqrt{y}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt{y}-۵ \xrightarrow{\text{اسم‌ها را عوض می‌کنیم.}} y=\sqrt{x}-۵ \quad \text{تابع وارون}$$

نکتهٔ مهم ترکیب هر تابع با تابع وارون خود برابر x می‌شود:

$$\boxed{\begin{matrix}(fof^{-۱})(x)=x\ ,\ x\in D_{f^{-۱}}\\ (f^{-۱}of)(x)=x\ ,\ x\in D_f\end{matrix}}$$

پس در حالت کلی به علت اختلاف در دامنه‌ها: $(fof^{-۱})(x)\ne(f^{-۱}of)(x)$

مثال **تحقیق کنید توابع $f(x)=\frac{۱}{x}+۲$ و $g(x)=\frac{۱}{x-۲}$ وارون یکدیگرند.**

الف) برای کدام مقادیر x رابطهٔ $f(g(x))=x$ برقرار است؟

ب) برای کدام مقادیر x رابطهٔ $g(f(x))=x$ برقرار است؟

پاسخ اگر حاصل fog و gof هر دو برابر x شوند به این معنا است که f و g وارون یکدیگرند:

$$\begin{cases}(fog)(x)=f(g(x))=f(\frac{۱}{x-۲})=\frac{۱}{\frac{۱}{x-۲}}+۲=x-۲+۲=x\\[2ex] (gof)(x)=g(f(x))=g(\frac{۱}{x}+۲)=\frac{۱}{\frac{۱}{x}+۲-۲}=\frac{۱}{\frac{۱}{x}}=x\end{cases}$$

$\Rightarrow$ f و g وارون یکدیگرند.

الف) $(fog)(x)=x \Rightarrow x\in D_g \Rightarrow x\in\mathbb{R}-\{۲\}$

ب) $(gof)(x)=x\Rightarrow x\in D_f\Rightarrow x\in\mathbb{R}-\{۰\}$

مثال **اگر $f(x)=۴x-۳$ و $g(x)=x+۲$ باشند، با محاسبه نشان دهید که: $(gof)^{-۱}=f^{-۱}og^{-۱}$**

پاسخ اگر gof را y بنامیم، خواهیم داشت:

$$y=(gof)(x)=g(f(x))=g(۴x-۳)=۴x-۳+۲=۴x-۱$$

$$\Rightarrow y=۴x-۱\Rightarrow ۴x=y+۱\Rightarrow x=\frac{y+۱}{۴}$$

$$\xrightarrow{\text{اسم‌ها را عوض می‌کنیم.}} y=\frac{x+۱}{۴}\to(gof)^{-۱}=\frac{x+۱}{۴}\ (I)$$

$$\begin{cases}y=f(x)=۴x-۳\Rightarrow ۴x=y+۳\Rightarrow x=\frac{y+۳}{۴}\Rightarrow f^{-۱}=\frac{x+۳}{۴}\\ y=g(x)=x+۲\Rightarrow x=y-۲\Rightarrow g^{-۱}=x-۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}og^{-۱}=\frac{(x-۲)+۳}{۴}=\frac{x+۱}{۴}\ (II)$$

$$\xrightarrow{(II),(I)}(gof)^{-۱}=f^{-۱}og^{-۱}$$