مقدمه

بالأخره تمام شد! بعد از دو سال زحمت، آخرین کلمه از تألیف این کتاب رو در آخرای یه شب تابستانی گرم نوشتم و حس عجیبی رو تجربه کردم! از طرفی خوشحال بودم از این‌که موفق شدم کاری رو به اتمام برسونم و از طرف دیگه سخت دلتنگش بودم و یه حس غریبی از این‌که دیگه با این کتاب برای مدتی کاری ندارم، وجودم رو فرا گرفت. به همین خاطر صاف رفتم سمت تلفن همراهم و دیدم چیزی به‌جز صدای استاد محمدرضا شجریان نمی‌تونه مناسب حال و هوام باشه ... هندزفری رو گذاشتم و آواز مورد علاقه‌ام رو پلی کردم ...

«مفلسـانیم و هوای می و مطرب داریم   آه اگر خرقه پشـمین به گرو نستانند...»

بعد هم‌زمان رفتم به سراغ دیدن فصل‌های مختلف کتاب و همین‌طور شروع کردم به ورق‌زدن و خواندن درس‌نامه‌ها، تست‌ها، پاسخ‌ها و از خودم سؤال می‌کردم که: شد اون چیزی که میخواستی؟ و ارزشش رو داشت دو سال تلاش؟

فکر کردم به تمام دو سالی که شبانه‌روز رفتیم و اومدیم، نشستیم و نوشتیم، دیدیم نشد، پاک کردیم و دوباره نوشتیم، بحث کردیم و دعوامان شد، ولی از کیفیتی که می‌خواستیم کوتاه نیامدیم و...

ته دلم حس کردم راضی‌ام و ارزشش رو داشت پس با خیال راحت آخرین فایل کتاب رو ارسال کردم و منم با صدا تکرار کردم ...

... ما همه بنده و این قوم خداوندانند ...

اما چند خطی هم دربارهٔ کتاب

چند سالی بود که از چاپ آخرین ویرایش کتاب ریاضی نهم تیزهوشان می‌گذشت و با توجه به ساختار جدید آزمون ورودی مدارس تیزهوشان و مدارس برتر و سمت و سوی جدیدی که سؤالات این آزمون‌ها داشتند، تصمیم گرفتیم که این کتاب رو به طور کلی و از صفر تا صد بازنویسی کنیم. باشد که مقبول افتد!

۱. درس‌نامه‌ها: چالشی‌ترین قسمت کارمان مربوط به درس‌نامه‌های این کتاب بود، اولاً تلاش کردیم درس‌نامه‌ها روان، آموزشی و به قول خودمانی، به درد بخور باشد و برایمان مهم بود که با خواندن آن بشود از پسِ تست‌ها برآمد. علاوه بر این‌ها در کنار تدریس معلمان محترم که هیچ چیز جای آن را نخواهد گرفت، منبعی برای دوره و حل سؤالات آموزشی باشد، پس به همین خاطر حداکثر وسواس را دربارهٔ آن به خرج دادیم تا بشود نسخهٔ فعلی.

۲. تست‌ها: سعی کردیم سؤالات به‌روز باشند و در کنار تست‌های تألیفی از سؤالات آزمون‌های ورودی مدارس تیزهوشان، مدارس برتر، مدارس نمونه دولتی و ... استفاده کردیم و خیلی برایمان مهم بود

سراغ تست‌های به اصطلاح نظام قدیم! کنکورها و آن‌چه مربوط به پایه‌های بالاتر بود، نرویم زیرا با همفکری که با اساتید محترم این حوزه داشتیم به اتفاق بر این باور بودیم که حل سؤالات خارج از چارچوب چیزی جز اتلاف وقت و ایجاد حس ناامیدی برای دانش‌آموزان نخواهد داشت. همچنین موضوع دیگر در تست‌ها، چینش مناسب و دسته‌بندی آن‌ها بود به طوری که آمدن تست‌ها به شکلی باشد که واقعا در طی آن روال آموزش به درستی جلو برود و همین‌که تقدم مباحث به صورت درست و حتی المقدور با پیشروی کتاب درسی باشد، بنابراین حداقل تست‌های این کتاب بیش از ده مرحله توسط خودمان و کارشناسان محترم بازبینی شده تا به شما برسد.

در کنار هر تست یک علامت ( ) آورده شده است تا در زمانی که مشغول حل‌کردن تست‌ها هستید با توجه به سطح سؤال، آن را به یکی از شکل‌های ( ) یا ( ) یا ( ) تبدیل کنید! این کار باعث می‌شود در زمانی که تصمیم به دوره گرفتید بتوانید به راحتی و با توجه به شکلک‌ها، سؤالات مهم‌تر خودتان را حل کنید! البته در کنار بعضی از سؤالات هم علامت ( ) آورده شده است. این سؤالات عموماً سؤالات سخت‌تری هستند که خودمان برایتان سطح‌بندی کردیم تا در مواجه با آن‌ها جا نخورید! علاوه بر این‌ها، شماره و کنار بعضی از تست‌ها رنگی شده، این تست‌ها برای دورهٔ مباحث یا وقتی که زمان برای پاسخگویی به همهٔ سؤالات را ندارید انتخاب شده‌اند و لزوماً تست‌های مهم‌تری به حساب نمی‌آیند بلکه برای این‌که ایده‌های اصلی را دیده باشید مناسب هستند.

۳. پاسخنامهٔ تشریحی: پاسخنامه‌های واقعاً تشریحی برایتان نوشتیم و هیچ چیزی را ناگفته رها نکردیم. تمام مراحل حل سؤال را با حوصله و سرِ صبر برایتان آوردیم و هیچ چیز را بدیهی فرض نکردیم. خلاصه که در پاسخنامه کتاب سنگ تموم گذاشتیم چون‌که عمیقاً معتقدیم پاسخنامه باید آن‌قدر جامع و تمیز باشد که دانش‌آموز پس از مراجعه به آن هیچ‌چیز نامفهومی از سؤال برایش باقی نمانده باشد.

تشکرها:

بدون شک این کتاب به چاپ نمی‌رسید مگر با همکاری تیم بزرگی که از ما حمایت کردند به همین خاطر تشکر می‌کنیم از:

دکتر امید نصری و دکتر کمیل نصری مدیران محترم انتشارات خیلی‌سبز که به ما اعتماد کردند و تألیف این کتاب را به ما سپردند.

دکتر کورش اسلامی که فصل به فصل به ما مشورت دادند و پدرانه در کنار ما ایستادند.

خانم سمیه خادمان که تلاش‌ها و پیگیری و نظم ایشان کتاب را به چاپ رساند.

دوستان خوبمان آقایان سهیل سمایی و فرشید اعرابی و تیم محترمشان که در تولید پی‌دی‌اف کتاب از هیچ چیزی کم نگذاشتند.

حرف آخر!

قلباً معتقدیم که کتاب فعلی خالی از اشکال و ایراد نیست به همین خاطر از اساتید گرامی و خوانندگان کتاب دعوت می‌کنیم که با ارسال ایرادات و نظرات به @mohamadiriazi به بهبود سطح کیفیت کتاب و رفع ایرادات احتمالی کمک کنند.

با آرزوی سلامتی و موفقیت

برای تمامی معلمین و دانش‌آموزان ایران

فهرست

۱۱ کوچک‌ترین حاصل‌جمع ۴ عدد از مجموعهٔ A برابر $۱۵+۱۹+۲۳+۲۷$ یعنی ۸۴ و بزرگ‌ترین حاصل‌جمع چهار عدد برابر $۲۷+۳۱+۳۵+۳۹$ یعنی ۱۳۲ است.

از آن‌جا که فاصلهٔ عضوهای متوالی مجموعهٔ A برابر ۴ است، پس فاصلهٔ مجموع هر ۴ عضو آن نیز ۴ است؛ یعنی مجموع‌های مختلف به ترتیب ۸۴، ۸۸، ۹۲، ... و ۱۳۲ است که تعداد آن‌ها برابر است با:

$$\frac{۱۳۲-۸۴}{۴}+۱=\frac{۴۸}{۴}+۱=۱۳$$

۱۲ جفت اعدادی که حاصل تفاضل آن‌ها برابر ۱۰ است، عبارت‌اند از:

$$(۱,۱۱),(۲,۱۲),(۳,۱۳),(۴,۱۴),\ldots,(۱۱,۲۱),(۱۲,۲۲),\ldots,(۱۹,۲۹),(۲۰,۳۰)$$

برای حذف حداقل عضوها باید از هر جفت یک عضو را حذف کرد. با توجه به تکراری‌بودن بعضی عضوها در این ۲۰ جفت، کافی است اعداد ۱۱، ۱۲، ۱۳، ... و ۲۰ حذف شوند که تعداد آن‌ها ۱۰تا است.

۱۳ همهٔ اعضای مجموعه را به اعداد اول تجزیه می‌کنیم و حاصل‌ضرب آن‌ها را می‌نویسیم:

$$۱\times۲\times۳\times\cdots\times۲۸=۱\times۲\times۳\times۲^۲\times۵\times۲\times۳\times۷\times۲^۳\times۳^۲\times۲$$
$$\times۵\times۱۱\times۲^۲\times۳\times۱۳\times۲\times۷\times۳\times۵\times۲^۴\times۱۷\times۲\times۳^۲\times۱۹\times۲^۲$$
$$\times۵\times۳\times۷\times۲\times۱۱\times۲۳\times۲^۳\times۳\times۵^۲\times۲\times۱۳\times۳^۳\times۲^۲\times۷$$
$$=۲^{۲۵}\times۳^{۱۳}\times۵^۶\times۷^۴\times۱۱^۲\times۱۳^۲\times۱۷\times۱۹\times۲۳$$

توان اعداد ۲، ۳، ۱۷، ۱۹ و ۲۳ فرد است؛ پس با حذف این اعداد به عدد $۲^{۲۴}\times۳^{۱۲}\times۵^۶\times۷^۴\times۱۱^۲\times۱۳^۲$ می‌رسیم که مربع کامل است. اما دقت کنید که چون صورت سؤال از ما حداقل تعداد حذف را خواسته، می‌توانیم با حذف اعداد ۶، ۱۷، ۱۹ و ۲۳ باز به همان عدد برسیم که مربع کامل است، بنابراین با حذف حداقل ۴ عضو حاصل‌ضرب باقی اعضا مربع کامل می‌شود.

۱۴ چون x، عضو مجموعهٔ اعداد طبیعی است، پس برای مشخص‌کردن اعضای A کافی است در $۲x-۷$ به جای x، اعداد طبیعی را قرار دهیم:

$$x=۱\Rightarrow ۲\times۱-۷=۲-۷=-۵$$
$$x=۲\Rightarrow ۲\times۲-۷=۴-۷=-۳$$
$$x=۳\Rightarrow ۲\times۳-۷=۶-۷=-۱$$
$$\vdots$$

پس A برابر است با: $A=\{-۵,-۳,-۱,\ldots\}$

۱۵ ابتدا محدودهٔ داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$-۳<x+۲<۴\xrightarrow{-۲}-۵<x<۲$$

چون $x\in\mathbb{Z}$ است، پس مجموعهٔ B برابر است با:

$$B=\{-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱\}$$

۱۶ می‌دانیم اعداد فرد روی اعداد طبیعی و صحیح تعریف می‌شوند؛ پس گزینه‌های (۱) و (۲) حذف می‌شوند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۳): چون $x\in\mathbb{N}$ است و در محدودهٔ $-۱۳۹۶\le x\le ۰$ عددی طبیعی وجود ندارد، پس این مجموعه تهی است.

گزینهٔ (۴): اگر اعداد طبیعی محدودهٔ $۰\le x\le ۱۳۹۶$ را در $۲x-۱$ قرار دهیم، خروجی اعداد، فرد خواهد بود.

$$x=۱\Rightarrow ۲\times۱-۱=۱$$
$$x=۲\Rightarrow ۲\times۲-۱=۳$$
$$x=۳\Rightarrow ۲\times۳-۱=۵$$
$$\vdots$$
$$\{۲x-۱\mid x\in\mathbb{N},۰\le x\le ۱۳۹۶\}=\{۱,۳,۵,\ldots\}$$

۱۷ چون $a=۳b$، پس دربارهٔ $\frac{a}{b}$ داریم: $\frac{a}{b}=\frac{۳b}{b}=۳$

در نتیجه مجموعهٔ B دارای یک عضو است: $B=\{۳\}$

۱۸ اعضای مجموعهٔ داده‌شده در هر گزینه را مشخص می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $A=\{x\mid x\in\mathbb{Z},x^۲-۱=۰\}\Rightarrow x^۲-۱=۰$

$$\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=\pm۱$$
$$A=\{+۱,-۱\}$$

گزینهٔ (۲): $B=\{x\mid x\in\mathbb{R},x^۲+۲=۰\}$

$$\Rightarrow x^۲+۲=۰\Rightarrow x^۲=-۲$$

چون مربع هیچ عدد حقیقی، منفی نمی‌شود، پس: $B=\{\}$

گزینهٔ (۳): $C=\{x\mid x\in\mathbb{N},x\le۱\}\Rightarrow C=\{۱\}$

گزینهٔ (۴): $D=\{x\mid x\in\mathbb{Z},\sqrt{x}\notin\mathbb{Z}\}$

مجموعهٔ D برابر است با تمام اعداد صحیحی که مربع کامل نیستند:

$$D=\{۲,۳,۵,۶,۷,\ldots\}$$

۱۹ اعداد طبیعی که در محدودهٔ $-۷\le\sqrt{x}\le۴$ قرار می‌گیرند، عبارت‌اند از: $۱,۲,۳,۴,۵,\ldots,۱۶$

حالا به سراغ $\frac{۱۲x}{x^۲}$ می‌رویم که سادهٔ آن برابر $\frac{۱۲}{x}$ است. از طرفی چون به دنبال اعضای غیرصحیح A هستیم، پس کافی است به جای x در $\frac{۱۲}{x}$ اعدادی را قرار دهیم که مقسوم‌علیه ۱۲ نباشند؛ یعنی ۱، ۲، ۳، ۴، ۶ و ۱۲ را کنار می‌گذاریم و ۱۰ عدد باقی‌مانده به جای x قرار می‌گیرند.

۲۰ با توجه به $۲<x<۱۰$ و $\frac{x}{۲}\in\mathbb{N}$، مقدار x می‌تواند اعداد زوج بین ۲ تا ۱۰ باشد، پس مقادیر x عبارت‌اند از: $۴,۶,۸$

اعضای A برابر $x^۲$ هستند، پس A برابر است با: $A=\{۱۶,۳۶,۶۴\}$

۲۱ $-(x+۱)\in\mathbb{Z}$ زمانی اتفاق می‌افتد که $x\in\mathbb{Z}$ باشد، زیرا: $-(x+۱)\in\mathbb{Z}\Rightarrow -x-۱\in\mathbb{Z}\Rightarrow -x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$

حالا به سراغ $(x+۲)^۲<۲۵$ می‌رویم. چون $x+۲$ نیز صحیح است، مقادیر ممکن برای $(x+۲)^۲$ عبارت‌اند از:

$$(x+۲)^۲=۰,۱,۴,۹,۱۶\Rightarrow x+۲=۰,\pm۱,\pm۲,\pm۳,\pm۴$$

در نهایت مقادیر x یا همان عضوهای مجموعهٔ B عبارت‌اند از:

$$B=\{-۶,-۵,-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲\}$$

۲۲ x یک عدد صحیح است. در نتیجه $x-۳$ نیز صحیح است، از طرفی $(x-۳)^{۲}$ با مربع کامل‌هایی برابر است که بین ۱۰ و ۱۰۰ قرار دارند. $(x-۳)^{۲}=۱۶,۲۵,۳۶,۴۹,۶۴,۸۱$

$$\Rightarrow x-۳=\pm ۴,\pm ۵,\pm ۶,\pm ۷,\pm ۸,\pm ۹$$

$$\Rightarrow x=۷,-۱,۸,-۲,۹,-۳,۱۰,-۴,۱۱,-۵,۱۲,-۶$$

xهای به دست آمده، همان اعضای مجموعهٔ A هستند و حاصل‌جمع آن‌ها برابر ۳۶ است.

۲۳ مجموعهٔ داده‌شده در هر گزینه را با اعضای آن مشخص می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): $B=\{x\,|\,x\in\mathbb{N},۳\le ۳x<۱۲\}=\{۱,۲,۳\}$

گزینهٔ (۲): $B=\{۳x\,|\,x\in\mathbb{N},۱\le x<۴\}=\{۳,۶,۹\}$

گزینهٔ (۳): $B=\{۳x\,|\,x\in\mathbb{N},۳\le x\le ۱۲\}=\{۹,۱۲,۱۵,\dots,۳۶\}$

گزینهٔ (۴): $B=\{۳x\,|\,x\in\mathbb{N},۰<x\le ۴\}=\{۳,۶,۹,۱۲\}$

۲۴ مجموعهٔ داده‌شده در هر گزینه را با اعضای آن نمایش می‌دهیم:

گزینهٔ (۱): $x\in\mathbb{R}$ است، پس اعضای مجموعهٔ A را نمی‌توانیم بشماریم، بنابراین نمی‌توان A را با اعضا نمایش داد.

گزینهٔ (۲): $x\in\mathbb{Z}$ است، پس داریم:

$$A=\{\frac{x}{۲}\,|\,x\in\mathbb{Z}\}=\{\dots,\frac{-۲}{۲},\frac{-۱}{۲},\frac{۰}{۲},\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۲},\dots\}$$

$$=\{\dots,-۱,-\frac{۱}{۲},۰,\frac{۱}{۲},۱,\dots\}$$

گزینهٔ (۳): $x\in\mathbb{N}$ است، پس به جای x، اعداد طبیعی را قرار می‌دهیم:

$$A=\{\frac{x-۱}{۲}\,|\,x\in\mathbb{N}\}=\{\frac{۱-۱}{۲},\frac{۲-۱}{۲},\frac{۳-۱}{۲},\frac{۴-۱}{۲},\dots\}$$

$$=\{۰,\frac{۱}{۲},۱,\frac{۳}{۲},\dots\}$$

گزینهٔ (۴): $x\in\mathbb{W}$ است، پس به جای x، اعداد $۰,۱,۲,\dots$ را قرار می‌دهیم: $A=\{\frac{x+۱}{۲}\,|\,x\in\mathbb{W}\}=\{\frac{۰+۱}{۲},\frac{۱+۱}{۲},\frac{۲+۱}{۲},\frac{۳+۱}{۲},\dots\}$

$$=\{\frac{۱}{۲},۱,\frac{۳}{۲},۲,\dots\}$$

۲۵ در گزینهٔ (۴)، $x\in\mathbb{R}$، پس تعداد اعضای مجموعه بی‌شمار است و نمی‌توان آن را با اعضا نمایش داد. همچنین در گزینهٔ (۲) نیز $x\in\mathbb{Z}$ و $x\le ۵$، پس بی‌شمار عدد می‌توان به جای x قرار داد و تعداد اعضای این مجموعه بی‌شمار است، در صورتی که مجموعهٔ مورد بحث تنها ۵ عضو دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): $A=\{x^{۲}+۲\,|\,x\in\mathbb{N},x\le ۵\}$

$$=\{۱^{۲}+۲,۲^{۲}+۲,۳^{۲}+۲,۴^{۲}+۲,۵^{۲}+۲\}=\{۳,۶,۱۱,۱۸,۲۷\}$$

گزینهٔ (۳): $A=\{x^{۲}+۲\,|\,x\in\mathbb{Z},-۵\le x\le ۵\}$

$$=\{(-۵)^{۲}+۲,(-۴)^{۲}+۲,(-۳)^{۲}+۲,(-۲)^{۲}+۲,(-۱)^{۲}+۲,۰^{۲}+۲,$$
$$۱^{۲}+۲,۲^{۲}+۲,۳^{۲}+۲,۴^{۲}+۲,۵^{۲}+۲\}$$
$$=\{۲,۳,۶,۱۱,۱۸,۲۷\}$$

۲۶ با کمی دقت در اعضای مجموعهٔ B مشخص است که صورت کسرها، اعداد طبیعی و مخرج کسرها، به شکل $(۱+\text{عدد صورت})^{۲}$ هستند. پس گزینه‌های (۱) و (۲) حذف می‌شوند.

از طرفی در گزینهٔ (۴) عبارت $\frac{x}{x^{۲}}$ پس از ساده‌شدن برابر $\frac{۱}{x}$ است، پس این گزینه نیز نادرست است.

نمایش مجموعهٔ گزینهٔ (۳) با اعضا برابر است با:

$$\{\frac{x-۱}{x^{۲}}\,|\,x\in\mathbb{N},x\ge ۲\}=\{\frac{۲-۱}{۲^{۲}},\frac{۳-۱}{۳^{۲}},\frac{۴-۱}{۴^{۲}},\dots\}$$

$$=\{\frac{۱}{۴},\frac{۲}{۹},\frac{۳}{۱۶},\dots\}$$

۲۷ مجموعهٔ داده‌شده در هر گزینه را با اعضای آن نمایش می‌دهیم:

گزینهٔ (۱): $A=\{۲^{x}\,|\,x\in\mathbb{Z},x>-۴\}$

$$=\{۲^{-۳},۲^{-۲},۲^{-۱},۲^{۰},۲^{۱},\dots\}=\{\frac{۱}{۸},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲},۱,۲,\dots\}$$

گزینهٔ (۲): $A=\{۲^{۲x+۱}\,|\,x\in\mathbb{Z},x>-۲\}$

$$=\{۲^{۲\times(-۱)+۱},۲^{۲\times(۰)+۱},۲^{۲\times ۱+۱},۲^{۲\times ۲+۱},\dots\}$$

$$=\{۲^{-۱},۲^{۱},۲^{۳},۲^{۵},\dots\}=\{\frac{۱}{۲},۲,۸,۳۲,\dots\}$$

گزینهٔ (۳):

$$A=\{۲^{۲x-۵}\,|\,x\in\mathbb{N}\}=\{۲^{۲\times۱-۵},۲^{۲\times۲-۵},۲^{۲\times۳-۵},۲^{۲\times۴-۵},\dots\}$$

$$=\{۲^{-۳},۲^{-۱},۲^{۱},۲^{۳},\dots\}=\{\frac{۱}{۸},\frac{۱}{۲},۲,۸,\dots\}$$

گزینهٔ (۴): $A=\{۲^{-x}\,|\,x\in\mathbb{Z},x\le -۳\}$

$$=\{۲^{-(-۳)},۲^{-(-۴)},۲^{-(-۵)},\dots\}=\{۸,۱۶,۳۲,\dots\}$$

۲۸ اعضای مجموعهٔ B، یکی بیشتر از مکعب هر کدام از اعداد ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ هستند، پس نمایش آن به صورت ریاضی در گزینهٔ (۲) آمده است. $\{x^{۳}+۱\,|\,x\in\mathbb{Z},۰\le x\le ۴\}$

$$=\{۰^{۳}+۱,۱^{۳}+۱,۲^{۳}+۱,۳^{۳}+۱,۴^{۳}+۱\}=\{۱,۲,۹,۲۸,۶۵\}$$

۲۹ مجموعهٔ هر گزینه را با اعضای آن نمایش می‌دهیم:

گزینهٔ (۱):

$$\{\frac{۱}{n(n+۱)}\,|\,n\in\mathbb{N},n\le ۳۰\}=\{\frac{۱}{۱\times۲},\frac{۱}{۲\times۳},\frac{۱}{۳\times۴},\dots,\frac{۱}{۳۰\times۳۱}\}$$

$$=\{\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۶},\frac{۱}{۱۲},\dots,\frac{۱}{۹۳۰}\}$$

گزینهٔ (۲): $\{x!-۱\,|\,x\in\mathbb{N}\}=\{۱!-۱,۲!-۱,۳!-۱,۴!-۱,\dots\}$

$$=\{۰,۱,۵,۲۳,\dots\}$$

گزینهٔ (۳): $\{x(x+۱)\,|\,x\in\mathbb{N}\}=\{۱\times۲,۲\times۳,۳\times۴,۴\times۵,\dots\}$

$$=\{۲,۶,۱۲,۲۰,\dots\}$$

گزینهٔ (۴): باید ۱۲ بر $x-۱$ بخش‌پذیر باشد تا حاصل یک عدد صحیح شود، یعنی $x-۱$ برابر با $\pm۱,\pm۲,\pm۳,\pm۴,\pm۶,\pm۱۲$ می‌تواند باشد، پس:

$$\{x\,|\,\frac{۱۲}{x-۱}\in\mathbb{Z}\}=\{۱۳,-۱۱,۷,-۵,۵,-۳,۴,-۲,۳,-۱,۲,۰\}$$

۳۰ اعضای مجموعهٔ A، دنباله‌ای از اعداد با فاصلهٔ منظم هستند، پس جملهٔ nاُم را مشخص می‌کنیم:

جملهٔ nاُم: $۵n-۱$ $\quad ۴ \underset{+۵}{\longrightarrow} ۹ \underset{+۵}{\longrightarrow} ۱۴ \underset{+۵}{\longrightarrow} ۱۹,\ldots$

حالا بررسی می‌کنیم که عدد هر گزینه به ازای $n \in \mathbb{N}$ برابر $۵n-۱$ هست یا نه:

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): $۵n-۱=۴۹ \Rightarrow ۵n=۵۰ \Rightarrow n=۱۰$

گزینهٔ (۲): $۵n-۱=۹۹ \Rightarrow ۵n=۱۰۰ \Rightarrow n=۲۰$

گزینهٔ (۳): $۵n-۱=۵۲۴ \Rightarrow ۵n=۵۲۵ \Rightarrow n=۱۰۵$

گزینهٔ (۴): $۵n-۱=۱۲۳ \Rightarrow ۵n=۱۲۴ \Rightarrow n=\frac{۱۲۴}{۵} \notin \mathbb{N}$

۳۱ اعدادی که در تقسیم بر ۷، باقی‌ماندهٔ ۵ دارند را می‌توان به صورت $۷x+۵$ نمایش داد که در گزینهٔ (۲) آمده است. همچنین به دنبال اعداد طبیعی کم‌تر از ۱۰۰ هستیم، پس داریم:

$$۷x+۵<۱۰۰ \Rightarrow ۷x<۹۵ \Rightarrow x<\frac{۹۵}{۷}$$

در نهایت مجموعهٔ مورد نظر برابر است با:

$$\{۷x+۵ \mid x \in \mathbb{W}, x<\frac{۹۵}{۷}\}$$

توجه دقت کنید که در گزینه‌های (۳) و (۴) اگر $x=۱$ را قرار دهیم، عدد حاصل عدد طبیعی نمی‌شود و در گزینهٔ (۱) نیز اگر $۷x-۵=۱$ آنگاه داریم: $x=\frac{۶}{۷} \notin \mathbb{N}$

۳۲ با کمی دقت در مجموعهٔ داده‌شده، می‌بینیم این مجموعه، همان مجموعهٔ اعداد طبیعی است که علامت اعداد طبیعی فرد، منفی و علامت اعداد طبیعی زوج، مثبت است؛ پس آن‌ها را می‌توان به صورت $(-۱)^n \times n$ نمایش داد که در گزینهٔ (۴) آمده است.

۳۳ هر یک از مجموعه‌های داده‌شده را با اعضای آن نمایش می‌دهیم:

گزینهٔ (۱): $A=\{(-۱)^{n^۲} n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$=\{(-۱)^{۱^۲}\times ۱,(-۱)^{۲^۲}\times ۲,(-۱)^{۳^۲}\times ۳,\ldots\}=\{-۱,۲,-۳,\ldots\}$

گزینهٔ (۲): $A=\{(-۱)^{n(n-۱)} n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$=\{(-۱)^{۱\times ۰}\times ۱,(-۱)^{۲\times ۱}\times ۲,(-۱)^{۳\times ۲}\times ۳,\ldots\}=\{۱,۲,۳,\ldots\}$

گزینهٔ (۳): $A=\{(-۱)^{\frac{n(n-۱)}{۲}} n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$=\{(-۱)^{\frac{۱\times ۰}{۲}}\times ۱,(-۱)^{\frac{۲\times ۱}{۲}}\times ۲,(-۱)^{\frac{۳\times ۲}{۲}}\times ۳,(-۱)^{\frac{۴\times ۳}{۲}}\times ۴,\ldots\}$

$=\{۱,-۲,-۳,۴,\ldots\}$

گزینهٔ (۴): $A=\{(-۱)^{\frac{n(n+۱)}{۲}+۱} n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$=\{(-۱)^{\frac{۱\times ۲}{۲}+۱}\times ۱,(-۱)^{\frac{۲\times ۳}{۲}+۱}\times ۲,(-۱)^{\frac{۳\times ۴}{۲}+۱}\times ۳,(-۱)^{\frac{۴\times ۵}{۲}+۱}\times ۴,\ldots\}$

$=\{۱,۲,-۳,-۴,\ldots\}$

۳۴ اعضای مجموعهٔ داده‌شده را به صورت زیر در نظر می‌گیریم و داریم:

$\{۷,۷۷,۷۷۷,۷۷۷۷,\ldots\}=\{۷,۷\times ۱۱,۷\times ۱۱۱,۷\times ۱۱۱۱,\ldots\}$

$=\{۷\times\frac{۱۰-۱}{۹},۷\times\frac{۱۰۰-۱}{۹},۷\times\frac{۱۰۰۰-۱}{۹}\}=\{۷\times\frac{۱۰^x-۱}{۹} \mid x \in \mathbb{N}\}$

۳۵ اعضای هر کدام از مجموعه‌های داده‌شده را مشخص می‌کنیم:

$A=\{\frac{۱۰۰^x-۱}{۹۹}\times ۵۰ \mid x \in \mathbb{N}\}$

$=\{\frac{۱۰۰^۱-۱}{۹۹}\times ۵۰,\frac{۱۰۰^۲-۱}{۹۹}\times ۵۰,\frac{۱۰۰^۳-۱}{۹۹}\times ۵۰,\frac{۱۰۰^۴-۱}{۹۹}\times ۵۰,\ldots\}$

$=\{۵۰,۵۰۵۰,۵۰۵۰۵۰,\ldots\}$

$B=\{\frac{۱۰۰^x-۱}{۹۹۹}\times ۶۰۰ \mid x \in \mathbb{N}\}$

$=\{\frac{۱۰۰^۱-۱}{۹۹۹}\times ۶۰۰,\frac{۱۰۰^۲-۱}{۹۹۹}\times ۶۰۰,\frac{۱۰۰^۳-۱}{۹۹۹}\times ۶۰۰,\frac{۱۰۰^۴-۱}{۹۹۹}\times ۶۰۰,\ldots\}$

$=\{\frac{۱۱}{۱۱۱}\times ۶۰۰,\frac{۱۱۱۱}{۱۱۱}\times ۶۰۰,\frac{۱۱۱۱۱۱}{۱۱۱}\times ۶۰۰,\ldots\}$

$C=\{\frac{۱۰^{۲x+۱}-۱}{۹}+۱۰^x \mid x \in \mathbb{W}\}$

$=\{\frac{۱۰^{۰+۱}-۱}{۹}+۱۰^۰,\frac{۱۰^{۲+۱}-۱}{۹}+۱۰^۱,\frac{۱۰^{۴+۱}-۱}{۹}+۱۰^۲,\frac{۱۰^{۶+۱}-۱}{۹}+۱۰^۳,\ldots\}$

$=\{۲,۱۲۱,۱۱۲۱۱,۱۱۱۲۱۱۱,\ldots\}$

$D=\{\frac{۱۰^x-۱}{۹}\times ۱۱ \mid x \in \mathbb{N}\}$

$=\{\frac{۱۰^۱-۱}{۹}\times ۱۱,\frac{۱۰^۲-۱}{۹}\times ۱۱,\frac{۱۰^۳-۱}{۹}\times ۱۱,\ldots\}$

$=\{۱۱,۱۲۱,۱۲۲۱,\ldots\}$

مشخص است که فقط اعضای مجموعه‌های A و C درست نمایش داده شده است.

۳۶ ابتدا عضوهای مجموعهٔ A را مشخص می‌کنیم:

$A=\{۱۲,۱۵,۱۸\}$

مجموعهٔ B شامل اعدادی است که از ضرب آن‌ها در -۳، اعضای A به دست می‌آید؛ پس: $B=\{-۴,-۵,-۶\}$

۳۷ ابتدا اعضای A را مشخص می‌کنیم:

$A=\{-x^۲+۱ \mid x \in \mathbb{Z},-۲ \le x<۳\}$

$=\{-(-۲)^۲+۱,-(-۱)^۲+۱,-(۰)^۲+۱,-(۱)^۲+۱,-(۲)^۲+۱\}$

$=\{-۳,۰,۱\}$

حالا عضوهای B را مشخص می‌کنیم:

$B=\{-x^۳ \mid x \in A\}=\{-(-۳)^۳,-(۰)^۳,-(۱)^۳\}=\{۲۷,۰,-۱\}$

۳۸ اعضای مجموعهٔ A از اعضای مجموعهٔ B انتخاب می‌شوند، به شرطی که $\frac{x}{۳} \in \mathbb{Z}$ و $\sqrt{x^۲+(x+۲)^۲} \in \mathbb{N}$ باشد.

با در نظر گرفتن شرط $\frac{x}{۳} \in \mathbb{Z}$، اعداد $۹,۶,۳,۰,-۳,-۶,-۹$، از مجموعهٔ B انتخاب می‌شوند که از بین آن‌ها فقط ۰ و ۶ در شرط $\sqrt{x^۲+(x+۲)^۲} \in \mathbb{N}$ صدق می‌کنند. $B=\{۰,۶\}$

۳۹ چون $x,y \in \mathbb{N}$ و $x+y=۵$، تمام حالت‌هایی که مجموع دو عدد طبیعی برابر ۵ است را در نظر می‌گیریم و عضوهای A را مشخص می‌کنیم:

۱) $x=۱,y=۴ \Rightarrow ۲^{xy}=۲^{۱\times ۴}=۲^۴=۱۶$

۲) $x=۲,y=۳ \Rightarrow ۲^{xy}=۲^{۲\times ۳}=۲^۶=۶۴$

۳) $x=۴, y=۱ \Rightarrow ۲^{xy}=۲^{۴\times۱}=۲^{۴}=۱۶$

۴) $x=۳, y=۲ \Rightarrow ۲^{xy}=۲^{۳\times۲}=۲^{۶}=۶۴$

در نتیجه مجموعهٔ A برابر است با: $A=\{۱۶,۶۴\}$

۴۰ با توجه به این‌که $x,y\in\mathbb{Z}$ و $xy=-۲$؛ x و y می‌توانند حالت‌های زیر را داشته باشند که در هر حالت عضوهای A برابر است با:

۱) $x=۲, y=-۱ \Rightarrow ۳x^{-y}-۲(-y)^{-x}=۳\times۲^{۱}-۲\times۱^{-۲}=۶-۲=۴$

۲) $x=-۲, y=۱ \Rightarrow ۳x^{-y}-۲(-y)^{-x}=۳\times(-۲)^{-۱}-۲\times(-۱)^{۲}=-\frac{۳}{۲}-۲=-\frac{۷}{۲}$

۳) $x=۱, y=-۲ \Rightarrow ۳x^{-y}-۲(-y)^{-x}=۳\times۱^{۲}-۲\times۲^{-۱}=۳-۲\times\frac{۱}{۲}=۳-۱=۲$

۴) $x=-۱, y=۲ \Rightarrow ۳x^{-y}-۲(-y)^{-x}=۳\times(-۱)^{-۲}-۲\times(-۲)^{۱}=۳+۴=۷$

پس مجموعهٔ A برابر است با: $A=\{۴,-\frac{۷}{۲},۲,۷\}$

۴۱ از تساوی داده‌شده داریم:

$x-۱=۳y \Rightarrow x-۳y=۱$

$۲^{x-۳y}$ برابر است با: $۲^{x-۳y}=۲^{۱}=۲ \Rightarrow A=\{۲\}$

۴۲ ابتدا $\frac{۳^{x+۱}}{۹^{۲y}}$ را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۳^{x+۱}}{۹^{۲y}}=\frac{۳^{x+۱}}{(۳^{۲})^{۲y}}=\frac{۳^{x+۱}}{۳^{۴y}}=۳^{x+۱-۴y}$$

حالا در تساوی داده‌شده داریم: $۴y-x=۲ \Rightarrow x-۴y=-۲$

پس مجموعهٔ A برابر است با: $A=\{۳^{-۲+۱}\}=\{۳^{-۱}\}=\{\frac{۱}{۳}\}$

۴۳ تمام حالت‌هایی که ضرب دو عدد صحیح برابر ۵۱ است را در نظر می‌گیریم:

توجه: دقت کنید که چون x و y صحیح هستند، $(x+y+۵)$ و $(x-y+۹)$ هم صحیح هستند.

۱) $۵۱=۱\times۵$

$$\begin{cases}x+y+۵=۱\\x-y+۹=۵۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۱۹\\y=-۲۳\end{cases}\Rightarrow\frac{x}{y}=-\frac{۱۹}{۲۳}$$

$$\begin{cases}x+y+۵=۵۱\\x-y+۹=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۱۹\\y=۲۷\end{cases}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{۱۹}{۲۷}$$

۲) $۵۱=۳\times۱۷$

$$\begin{cases}x+y+۵=۳\\x-y+۹=۱۷\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۳\\y=-۵\end{cases}\Rightarrow\frac{x}{y}=-\frac{۳}{۵}$$

$$\begin{cases}x+y+۵=۱۷\\x-y+۹=۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۳\\y=۹\end{cases}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{۳}{۹}$$

۳) $۵۱=(-۱)\times(-۵۱)$

$$\begin{cases}x+y+۵=-۱\\x-y+۹=-۵۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-۳۳\\y=۲۷\end{cases}\Rightarrow\frac{x}{y}=-\frac{۳۳}{۲۷}$$

$$\begin{cases}x+y+۵=-۵۱\\x-y+۹=-۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-۳۳\\y=-۲۳\end{cases}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{۳۳}{۲۳}$$

۴) $۵۱=(-۳)\times(-۱۷)$

$$\begin{cases}x+y+۵=-۳\\x-y+۹=-۱۷\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-۱۷\\y=۹\end{cases}\Rightarrow\frac{x}{y}=-\frac{۱۷}{۹}$$

$$\begin{cases}x+y+۵=-۱۷\\x-y+۹=-۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-۱۷\\y=-۵\end{cases}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{۱۷}{۵}$$

بنابراین مجموعهٔ A دارای ۸ عضو است:

$$A=\{-\frac{۱۹}{۲۳},\frac{۱۹}{۲۷},-\frac{۳}{۵},\frac{۳}{۹},-\frac{۳۳}{۲۷},\frac{۳۳}{۲۳},-\frac{۱۷}{۹},\frac{۱۷}{۵}\}$$

۴۴ مجموعهٔ $A=\{\{a,b,c,...\}\}$ دارای یک عضو است که آن یک عضو $\{a,b,c,...\}$ است.

۴۵ تعداد عضوهای هر کدام از مجموعه‌ها را مشخص می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): می‌دانیم ۱ به توان هر عددی برابر ۱ است؛ پس A فقط یک عضو دارد. $A=\{۱\}$

گزینهٔ (۲): هر عدد به توان صفر برابر عددِ یک است، پس مجموعهٔ B نیز فقط یک عضو دارد.

گزینهٔ (۳): چون $(-۲)^{۲}=۲^{۲}$ و $(-۱)^{۲}=۱^{۲}$ پس مجموعهٔ C دارای ۳ عضو است. $C=\{۰,۱,۴\}$

گزینهٔ (۴): ابتدا عضوها را ساده کرده و سپس عضوهای تکراری را حذف می‌کنیم:

$$D=\{۲^{۳۳},۸^{۱۱},۳۲^{۷},\sqrt{۶۴^{۱۱}}\}=\{۲^{۳۳},(۲^{۳})^{۱۱},(۲^{۵})^{۷},\sqrt{(۲^{۶})^{۱۱}}\}$$
$$=\{۲^{۳۳},۲^{۳۳},۲^{۳۵},۲^{۳۳}\}=\{۲^{۳۵},۲^{۳۳}\}$$

یعنی مجموعهٔ D دارای ۲ عضو است.

بنابراین مجموعهٔ C دارای بیشترین عضو است.

۴۶ ابتدا عضوهای تکراری را در A و B حذف می‌کنیم:

$A=\{۱,\{\},\{۱,۱\},\{\{۱,۱\}\}\}=\{۱,\{\},\{۱\},\{\{۱\}\}\} \Rightarrow n(A)=۴$

$B=\{\varnothing,\{\},\{\{\}\}\}=\{\varnothing,\{\{\}\}\} \Rightarrow n(B)=۲$

$n(A)-n(B)=۴-۲=۲$

۴۷ برای این‌که G تک‌عضوی باشد، باید دو عضو آن، با هم برابر باشند: $۲+a=b-۳ \Rightarrow a-b=-۵$

چون بی‌شمار حالت برای a و b وجود دارد که $a-b$ برابر -۵ باشد؛ پس $۲a+b^{۲}$ نیز دارای بی‌شمار حالت است.

۴۸ اگر نام‌گذاری عضوهای A را از n شروع کنیم، داریم:

توجه: دقت کنید که A، ۵ عضو دارد.

$A=\{a_n,a_{n-۱},a_{n-۲},a_{n-۳},a_{n-۴}\}$

پس پنجمین عضو، $a_{n-۴}$ یا همان $a_۵$ است؛ یعنی:

$n-۴=۵ \Rightarrow n=۹$

۴۹ اعداد صحیح محدودهٔ $-۳<n\le۵$ را به جای n در $\frac{n^{۲}}{۲^{n}}$ قرار می‌دهیم:

$$n=-۲ \Rightarrow \frac{(-۲)^{۲}}{۲^{-۲}}=\frac{۴}{\frac{۱}{۴}}=۱۶ \quad , \quad n=-۱ \Rightarrow \frac{(-۱)^{۲}}{۲^{-۱}}=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}=۲$$

$$n=۰ \Rightarrow \frac{۰^۲}{۲^۰}=\frac{۰}{۱}=۰ \quad , \quad n=۱ \Rightarrow \frac{۱^۲}{۲^۱}=\frac{۱}{۲}$$

$$n=۲ \Rightarrow \frac{۲^۲}{۲^۲}=\frac{۴}{۴}=۱ \quad , \quad n=۳ \Rightarrow \frac{۳^۲}{۲^۳}=\frac{۹}{۸}$$

$$n=۴ \Rightarrow \frac{۴^۲}{۲^۴}=\frac{۱۶}{۱۶}=۱ \quad , \quad n=۵ \Rightarrow \frac{۵^۲}{۲^۵}=\frac{۲۵}{۳۲}$$

حال با حذف عضوهای تکراری، A برابر است با:

$$A=\{۱۶,۲,۰,\frac{۱}{۲},۱,\frac{۹}{۸},\frac{۲۵}{۳۲}\}$$

بنابراین تعداد عضوهای A برابر ۷ است.

۵۰ با توجه به $x \neq ۱$ ، $-۴ \le x < ۳$ و $x \in \mathbb{Z}$، مقادیر $-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۲$ را به جای x در $\sqrt{x+۲}$ قرار می‌دهیم و در نهایت عددهای صحیح را انتخاب می‌کنیم:

$$x=-۴ \Rightarrow \sqrt{-۴+۲}=\sqrt{-۲} \notin \mathbb{Z}$$
$$x=-۳ \Rightarrow \sqrt{-۳+۲}=\sqrt{-۱} \notin \mathbb{Z}$$
$$x=-۲ \Rightarrow \sqrt{-۲+۲}=\sqrt{۰}=۰ \in \mathbb{Z}$$
$$x=-۱ \Rightarrow \sqrt{-۱+۲}=\sqrt{۱}=۱ \in \mathbb{Z}$$
$$x=۰ \Rightarrow \sqrt{۰+۲}=\sqrt{۲} \notin \mathbb{Z}$$
$$x=۲ \Rightarrow \sqrt{۲+۲}=\sqrt{۴}=۲ \in \mathbb{Z}$$

بنابراین A دارای سه عضو صحیح ۰، ۱ و ۲ است.

۵۱ چون $x=۳k$ و $k \in \mathbb{Z}$، پس در محدودهٔ $-۱۳۸۶ \le x < ۲۰۰۷$ به دنبال مضارب صحیح ۳ می‌گردیم.

$$-۱۳۸۶ \le x < ۲۰۰۷ \xrightarrow{x=۳k} -۱۳۸۶ \le ۳k < ۲۰۰۷$$
$$\xrightarrow{\div ۳} -۴۶۲ \le k < ۶۶۹$$

مقادیر k می‌توانند از -۴۶۲ تا ۶۶۸ باشند که تعداد آن‌ها برابر است با:

$$۶۶۸-(-۴۶۲)+۱=۱۱۳۱$$

پس مقادیر $x=۳k$ یا همان تعداد عضوهای A، برابر با ۱۱۳۱ است.

۵۲ $\frac{۵x}{۳} \in \mathbb{N}$ و ۵ و ۳ نسبت به هم اول‌اند، در نتیجه x باید مضرب طبیعی ۳ باشد. با توجه به این‌که $x \in \mathbb{Z}$ و $-۱۰ \le x \le ۱۰$، مقادیر x می‌توانند ۳،۶و۹ باشند:

$$A=\{\frac{۵\times۳}{۳},\frac{۵\times۶}{۳},\frac{۵\times۹}{۳}\}=\{۵,۱۰,۱۵\}$$

۵۳ برای مشخص‌کردن اعضای B کافی است امتحان کنیم کدام عضو A می‌تواند در رابطهٔ $\frac{x^۲}{۲} \in \mathbb{N}$ قرار بگیرد. (در واقع دنبال مقادیری هستیم که بعد از به توان ۲ رسیدن و تقسیم بر دو شدن، عدد طبیعی شوند.)

$$x=-۱ \Rightarrow \frac{x^۲}{۲}=\frac{(-۱)^۲}{۲}=\frac{۱}{۲} \notin \mathbb{N}$$
$$x=-\frac{۲}{۵} \Rightarrow \frac{x^۲}{۲}=\frac{(-\frac{۲}{۵})^۲}{۲}=\frac{\frac{۴}{۲۵}}{۲}=\frac{۸}{۲۵} \notin \mathbb{N}$$
$$x=۰ \Rightarrow \frac{x^۲}{۲}=\frac{۰^۲}{۲}=۰ \notin \mathbb{N}$$
$$x=۱ \Rightarrow \frac{x^۲}{۲}=\frac{۱^۲}{۲}=\frac{۱}{۲} \notin \mathbb{N}$$
$$x=\sqrt{۲} \Rightarrow \frac{x^۲}{۲}=\frac{(\sqrt{۲})^۲}{۲}=\frac{۲}{۲}=۱ \in \mathbb{N} \quad ✓$$
$$x=\sqrt{۳} \Rightarrow \frac{x^۲}{۲}=\frac{(\sqrt{۳})^۲}{۲}=\frac{۳}{۲} \notin \mathbb{N}$$
$$x=۲ \Rightarrow \frac{x^۲}{۲}=\frac{۲^۲}{۲}=\frac{۴}{۲}=۲ \in \mathbb{N} \quad ✓$$

بنابراین: $B=\{\sqrt{۲},۲\} \Rightarrow n(B)=۲$

۵۴ چون $\frac{۱۵}{x} \in \mathbb{Z}$ است، پس x باید تمام اعدادی باشد که ۱۵ بر آن‌ها بخش‌پذیر است.

توجه دقت کنید که گفته نشده x متعلق به چه مجموعهٔ عددی است؛ یعنی x می‌تواند مقسوم‌علیه‌های صحیح ۱۵ یا اعدادی مثل ۰/۱۵، ۱/۵ و ... باشد. پس بی‌شمار مقدار برای x وجود دارد.

۵۵ ابتدا مقادیر x را مشخص می‌کنیم:

$$x \in \mathbb{Z} \quad , \quad x^۲-۱<۱۸ \Rightarrow x^۲<۱۹$$
$$\Rightarrow x=\{۰,\pm۱,\pm۲,\pm۳,\pm۴\}$$

حال با محاسبهٔ $۵x^۴-۳$ برای مقادیر x، عضوهای A را مشخص می‌کنیم.

توجه دقت کنید چون توان x در $x^۴$ زوج است، حاصل $۵x^۴-۳$ برای هر مقدار x و قرینه‌اش یکسان است.

$$A=\{۵\times۰^۴-۳,۵\times۱^۴-۳,۵\times۲^۴-۳,۵\times۳^۴-۳,۵\times۴^۴-۳\}$$
$$=\{-۳,۲,۷۷,۴۰۲,۱۲۷۷\} \Rightarrow n(A)=۵$$

۵۶ ابتدا اعداد صحیحی که جذر آن‌ها کوچک‌تر یا مساوی ۵ است را مشخص می‌کنیم:

$$x \in \mathbb{Z} \quad , \quad \sqrt{x} \le ۵ \xrightarrow{\text{توان ۲}} x \le ۲۵$$

از طرفی عضو مثبت F یعنی $۲x-۳$ باید مثبت باشد، پس:

$$۲x-۳>۰ \Rightarrow ۲x>۳ \Rightarrow x>\frac{۳}{۲}$$

بنابراین xهای صحیحی را می‌خواهیم که $\frac{۳}{۲}<x \le ۲۵$ و چون $x \in \mathbb{Z}$، پس مقادیر x می‌توانند از ۲ تا ۲۵ باشند که تعداد آن‌ها برابر است با: $۲۵-۲+۱=۲۴$

۵۷ چون $k \in \mathbb{N}$ و $\sqrt{k} \in \mathbb{N}$، پس k حتماً از اعداد طبیعی مربع کامل است، یعنی: $k=۱,۴,۹,۱۶,...$

از طرفی $۲^k<۷۰$ است؛ پس k فقط می‌تواند ۱ و ۴ باشد؛ بنابراین:

$$A=\{۲\times۱,۲\times۴\}=\{۲,۸\} \Rightarrow n(A)=۲$$

۵۸ چون حاصل‌ضرب دو عدد صحیح a و b برابر ۱۰۰۰ شده و ۱۰۰۰ عددی زوج است، پس سه حالت داریم:

۱) $a=$ زوج , $b=$ زوج (مثال: $a=۲,b=۵۰۰$)

$$(-۱)^a+(-۱)^b=(-۱)^{\text{زوج}}+(-۱)^{\text{زوج}}=۱+۱=۲$$

۲) $a=$ زوج , $b=$ فرد (مثال: $a=۱۰۰۰,b=۱$)

$$(-۱)^a+(-۱)^b=(-۱)^{\text{زوج}}+(-۱)^{\text{فرد}}=۱+(-۱)=۰$$

۳) $a=$ فرد , $b=$ زوج (مثال: $a=۱,b=۱۰۰۰$)

$$(-۱)^a+(-۱)^b=(-۱)^{\text{فرد}}+(-۱)^{\text{زوج}}=-۱+۱=۰$$

بنابراین: $A=\{۰,۲\} \Rightarrow n(A)=۲$

۵۹ چون $x,y \in \mathbb{Z}$، تمام حالت‌های ممکن $xy=۸$ را در نظر می‌گیریم و x^y را به دست می‌آوریم:

۱) $x=۱,y=۸ \Rightarrow x^y=۱^۸=۱$

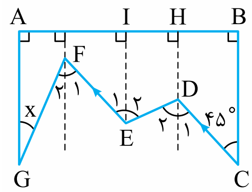
حال با توجه به رابطهٔ بین خطوط موازی و مورب داریم:

$AE \parallel CD$ و مورب $EC \Rightarrow \hat{E}_1+\hat{C}=۱۸۰^\circ$

$\Rightarrow ۸۰+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C}=۱۰۰^\circ$

۷۱۸ پاسخ به این سؤال چند مرحله دارد:

مرحلهٔ اول: AG و BC هر دو بر AB عمودند؛ پس موازی‌اند. اکنون خطوط موازی با AG و BC از نقاط D، E و F را رسم می‌کنیم.

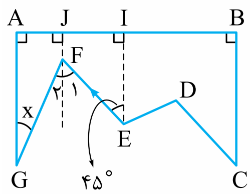


مرحلهٔ دوم: پیداکردن زاویهٔ $\hat{E}_1$:

$$\left.\begin{array}{l} BC \parallel DH \text{ و مورب } DC \Rightarrow \hat{D}_1=\hat{C}=۴۵^\circ \\ \left.\begin{array}{l} DC \parallel EF \text{ و مورب } ED \Rightarrow \hat{D}=\hat{E} \\ EI \parallel DH \text{ و مورب } ED \Rightarrow \hat{E}_2=\hat{D}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{E}_1=\hat{D}_1 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \hat{E}_1=۴۵^\circ$

مرحلهٔ سوم: پیداکردن مقادیر $\hat{F}_1$ و $\hat{F}_2$:



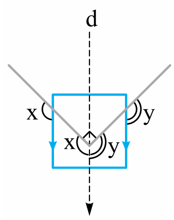
$EI \parallel FJ$ و مورب $EF \Rightarrow \hat{F}_1=۴۵^\circ$

$\hat{F}_1+\hat{F}_2=۷۰^\circ \Rightarrow \hat{F}_2=۲۵^\circ$

مرحلهٔ چهارم: پیداکردن مقدار x:

$FJ \parallel GA$ و مورب $FG \Rightarrow \hat{F}_2=x=۲۵^\circ$

۷۱۹ برای پیداکردن مقدار $x+y$ کافی است خطی عمودی به موازات دو ضلع مربع کوچک رسم کنیم که از رأس مربع بزرگ بگذرد:



با توجه به رابطهٔ بین خطوط موازی و مورب می‌توان مقادیر مساوی با x و y را روی شکل نشان داد.

همان‌طور که مشخص است $x+y+۹۰^\circ=۳۶۰^\circ$ پس $x+y=۲۷۰^\circ$.

۷۲۰ می‌دانیم در هر مثلث اندازهٔ یک زاویهٔ خارجی برابر است با حاصل‌جمع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورش. پس در مثلث بیان‌شده در صورت سؤال زاویهٔ خارجی با زاویهٔ داخلی مجاورش برابر است. از آن‌جایی که این دو زاویه مکمل یکدیگرند، اندازهٔ هر کدام ۹۰ درجه خواهد بود. پس مثلث مورد نظر قائم‌الزاویه است. می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه محل برخورد ارتفاع‌ها روی محیط مثلث است. پس گزینهٔ (۳) صحیح است.

۷۲۱ می‌دانیم در هر مثلث مجموع طول دو ضلع حتماً از ضلع سوم بزرگ‌تر است.

برای هر گزینه حالت‌های مختلف را بررسی می‌کنیم. دقت کنید از تفکر نظام‌دار یا الگوسازی استفاده خواهیم کرد.

گزینهٔ (۱): $۱+۱+۵ \Rightarrow ۱+۱<۵$ ✗

$۱+۲+۴ \Rightarrow ۱+۲<۴$ ✗

$۱+۳+۳ \Rightarrow ۱+۳>۳, ۳+۳>۱$ ✓

$۲+۲+۳ \Rightarrow ۲+۲>۳, ۲+۳>۲$ ✓

بنابراین با ۷ چوب‌کبریت دو مثلث با اضلاع ۱،۳،۳ و ۲،۲،۳ قابل ساخت هستند.

گزینهٔ (۲): $۱+۱+۴ \Rightarrow ۱+۱<۴$ ✗

$۱+۲+۳ \Rightarrow ۱+۲=۳$ ✗

$۲+۲+۲ \Rightarrow ۲+۲>۲$ ✓

مثلث متساوی‌الاضلاع با اضلاع ۲ با ۶ چوب‌کبریت قابل ساخت است.

گزینهٔ (۳): $۱+۱+۳ \Rightarrow ۱+۱<۳$ ✗

$۱+۲+۲ \Rightarrow ۱+۲>۲, ۲+۲>۱$ ✓

مثلث با اضلاع ۲، ۲ و ۱ با ۵ چوب‌کبریت قابل ساخت است.

گزینهٔ (۴): $۱+۱+۲ \Rightarrow ۱+۱<۲$ ✗

با ۴ چوب‌کبریت نمی‌توان مثلث ساخت. بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

۷۲۲ می‌دانیم در هر مثلث هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کم‌تر است. پس می‌توانیم نتیجه بگیریم هر ضلع از نصف محیط کم‌تر خواهد بود، در نتیجه در مثلث بیان‌شده در صورت سؤال بزرگ‌ترین ضلع ۱۱ خواهد بود.

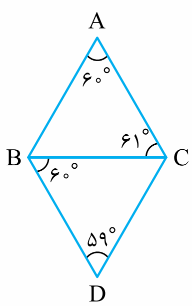
حالت‌های مختلف را بررسی می‌کنیم.

۳،۹،۱۱	۲،۱۰،۱۱	۱،۱۱،۱۱
۶،۶،۱۱	۵،۷،۱۱	۴،۸،۱۱
۵،۸،۱۰	۴،۹،۱۰	۳،۱۰،۱۰
۶،۸،۹	۵،۹،۹	۶،۷،۱۰
	۷،۸،۸	۷،۷،۹

در بین حالت‌های موجود ۸ تای آن تشکیل مثلث مختلف‌الاضلاع می‌دهند.

۷۲۳ می‌دانیم در مثلث اگر هر ۳ ضلع برابر باشند هر ۳ زاویه برابر با ۶۰ درجه هستند و اگر ضلعی بزرگ‌تر از بقیه باشد، حتماً زاویهٔ روبه‌روی آن نیز از ۶۰ درجه بزرگ‌تر خواهد بود.

۷۲۴ می‌دانیم در هر مثلث ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر از بقیهٔ اضلاع کوچک‌تر است. پس داریم:

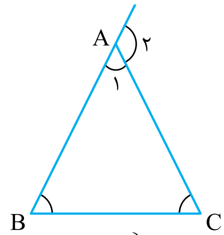


$$\overset{\Delta}{ABC}: \left.\begin{array}{l} \hat{A}=۶۰^\circ \\ \hat{B}=۵۹^\circ \\ \hat{C}=۶۱^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{AC}<\overline{BC}<\overline{AB}$$

$$\overset{\Delta}{BCD}: \left.\begin{array}{l} \hat{B}=۶۰^\circ \\ \hat{C}=۶۱^\circ \\ \hat{D}=۵۹^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{BC}<\overline{CD}<\overline{BD}$$

با توجه به دو نامساوی بیان‌شده و این‌که پاره‌خط BC در هر دو مشترک است می‌توان نتیجه گرفت پاره‌خط AC از بقیه کوچک‌تر است.

۷۲۵ می‌دانیم در هر مثلث اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی برابر است با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورش. بنابراین از عبارت صورت سؤال می‌توان نتیجه گرفت دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورِ زاویهٔ خارجی مورد نظر با یکدیگر مساوی‌اند. پس مثلث مورد نظر متساوی‌الساقین است.



این توضیح را در شکل پیاده می‌کنیم:
مثلث زیر که در آن زاویهٔ خارجی $A_۲$ با دو برابر زاویهٔ B برابر است را در نظر بگیرید:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_۲ = ۲B\\ A_۲ = B + C\end{array}\right\} \Rightarrow ۲B = B + C \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$$

پس مثلث متساوی‌الساقین است.

۷۲۶ با توجه به این‌که عدد ۱۲۰ را به یاد دارد پس مثلثی که یک زاویهٔ باز دارد دارای زاویهٔ ۱۲۰ درجه است.
حالت‌های مختلف را بررسی می‌کنیم:
می‌دانیم باید مجموع دو زاویهٔ دیگر ۶۰ درجه باشد و از آن‌جایی که زاویه‌های ۸۰، ۵۵ و ۱۰ درجه تشکیل مثلث نمی‌دهند و از طرفی جمع هیچ دوتایشان ۶۰ نمی‌شود، حتماً یکی از آن‌ها مربوط به مثلث با زاویهٔ باز است:

$$(۱)\begin{cases}۱۲۰^\circ + ۱۰^\circ = ۱۳۰^\circ \Rightarrow ۱۸۰^\circ - ۱۳۰^\circ = ۵۰^\circ\\ ۸۰^\circ + ۵۵^\circ = ۱۳۵^\circ \Rightarrow ۱۸۰^\circ - ۱۳۵^\circ = ۴۵^\circ\end{cases}$$

$\Rightarrow$ زاویه سوم مثلث با زاویه باز

$\Rightarrow$ زاویه سوم مثلث با زاویه‌های تند

$$(۲)\begin{cases}۱۲۰^\circ + ۵۵^\circ = ۱۷۵^\circ \Rightarrow ۱۸۰^\circ - ۱۷۵^\circ = ۵^\circ\\ ۸۰^\circ + ۱۰^\circ = ۹۰^\circ \Rightarrow ۱۸۰^\circ - ۹۰^\circ = ۹۰^\circ\end{cases}$$

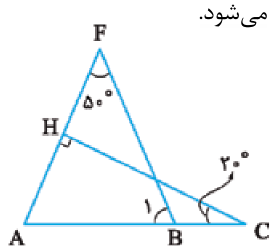
$\Rightarrow$ زاویه سوم مثلث با زاویه باز

$\Rightarrow$ زاویه سوم مثلث با زاویه‌های تند

در حالت اول زاویهٔ مورد نظر ۴۵ درجه است و حالت دوم قابل قبول نیست چون زاویهٔ مورد نظر قائمه بوده و تند نیست.

توجه دقت کنید که حالت سوم یعنی حالتی که زاویهٔ ۸۰°، زاویهٔ مثلث با زاویهٔ باز باشد، اتفاق نمی‌افتد چون در این صورت جمع زاویه‌های داخلی بیشتر از ۱۸۰° می‌شود.

۷۲۷ می‌دانیم در هر مثلث مجموع زوایای داخلی برابر با ۱۸۰ درجه است، پس داریم:



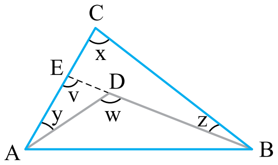
$$\overset{\Delta}{ABF}:\begin{cases}\hat{A} + \hat{B}_۱ + \hat{F} = ۱۸۰^\circ\\ ۷۰^\circ + \hat{B}_۱ + ۵۰^\circ = ۱۸۰^\circ\\ \hat{B}_۱ = ۶۰^\circ\end{cases} \qquad \overset{\Delta}{ACH}:\begin{cases}\hat{A} + \hat{C} + \hat{H} = ۱۸۰^\circ\\ \hat{A} + ۲۰^\circ + ۹۰^\circ = ۱۸۰^\circ\\ \hat{A} = ۷۰^\circ\end{cases}$$

۷۲۸ **روش اول** می‌دانیم در هر چهارضلعی دلخواه مجموع زاویه‌های داخلی ۳۶۰ درجه است، پس داریم:

$$ADBC: \hat{A} + \hat{D} + \hat{B} + \hat{C} = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow y + (۳۶۰^\circ - w) + z + x = ۳۶۰^\circ \Rightarrow x = w - y - z$$

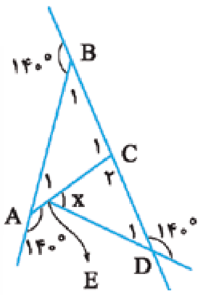
روش دوم پاره‌خط BD را امتداد می‌دهیم تا ضلع AC را در E قطع کند:



می‌دانیم در هر مثلث اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی برابر است با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورش، پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{BEC}: v = x + z\\ \overset{\Delta}{AED}: w = y + v\end{array}\right\} \Rightarrow w = y + x + z \Rightarrow x = w - y - z$$

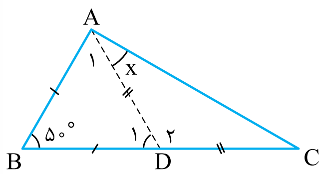
۷۲۹ ابتدا شکل را نام‌گذاری می‌کنیم. در مثلث ABC داریم:



$$\hat{A}_۱ + \hat{B}_۱ + \hat{C}_۱ = ۱۸۰^\circ$$
$$۴۰^\circ + ۴۰^\circ + \hat{C}_۱ = ۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{C}_۱ = ۱۰۰^\circ \ (*)$$
$$\hat{C}_۱ + \hat{C}_۲ = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{(*)} \hat{C}_۲ = ۸۰^\circ$$

در مثلث CDE داریم:
$$\hat{C}_۲ + \hat{D}_۱ + \hat{E} = ۱۸۰^\circ$$
$$۸۰^\circ + ۴۰^\circ + x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۶۰^\circ$$

۷۳۰ با توجه به اطلاعات مسئله می‌دانیم دو مثلث ABD و ACD متساوی‌الساقین هستند، پس $\hat{A}_۱ = \hat{D}_۱$ و $x = \hat{C}$. در مثلث ABD داریم:

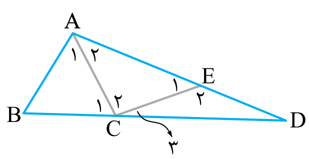


$$۵۰^\circ + \hat{A}_۱ + \hat{D}_۱ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\hat{A}_۱ = ۱۳۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{D}_۱ = ۶۵^\circ$$

می‌دانیم $\hat{D}_۱$ زاویهٔ خارجی مثلث ACD است، بنابراین برابر است با مجموع دو زاویهٔ x و $\hat{C}$. پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l}x + \hat{C} = ۶۵^\circ\\ x = \hat{C}\end{array}\right\} \Rightarrow x = ۳۲/۵^\circ$$

۷۳۱ با توجه به این‌که در مثلث ABC هر ۳ ضلع با هم مساوی هستند می‌توان نتیجه گرفت:



$$\hat{B} = \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱ = ۶۰^\circ$$

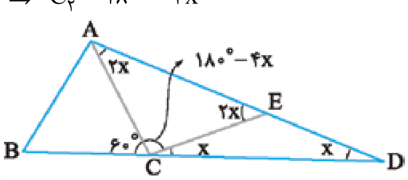
مقدار زاویهٔ D را x در نظر می‌گیریم، پس داریم:

$\overset{\Delta}{CED}: \hat{C}_۳ = \hat{D} = x$ متساوی‌الساقین

$\overset{\Delta}{CED}$: زاویهٔ خارجی $\hat{E}_۱ = \hat{C}_۳ + \hat{D} = ۲x$

$\overset{\Delta}{ACE}: \hat{E}_۱ = \hat{A}_۲ = ۲x$ متساوی‌الساقین

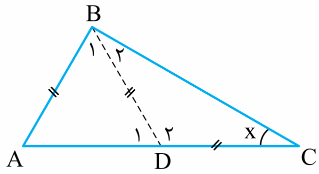
$$\overset{\Delta}{ACE}: \hat{A}_۲ + \hat{C}_۲ + \hat{E}_۱ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲x + \hat{C}_۲ + ۲x = ۱۸۰^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{C}_۲ = ۱۸۰^\circ - ۴x$$



پس در نقطهٔ C داریم: $\hat{C}_۱+\hat{C}_۲+\hat{C}_۳=۱۸۰^\circ$

$۶۰^\circ+۱۸۰^\circ-۴x+x=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲۴۰^\circ-۳x=۱۸۰^\circ \Rightarrow x=۲۰^\circ$

۷۳۲ با توجه به شکل دو مثلث ABD و BCD متساوی‌الساقین هستند، پس داریم:



$\hat{D}_۱=\hat{A}\,,\hat{B}_۲=\hat{C}=x$

از طرفی می‌دانیم $\hat{D}_۱$ زاویهٔ خارجی مثلث BCD است، پس داریم:

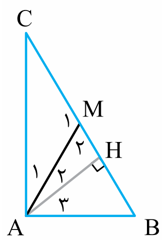
$\hat{D}_۱=\hat{B}_۲+\hat{C}=۲x \Rightarrow \hat{A}=۲x$

هم‌چنین چون BD نیمساز است داریم: $\hat{B}_۱=\hat{B}_۲=x$

بنابراین در مثلث ABC داریم: $\hat{A}+\hat{B}_۱+\hat{B}_۲+\hat{C}=۱۸۰^\circ$

$۲x+x+x+x=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۵x=۱۸۰^\circ \Rightarrow x=۳۶^\circ$

۷۳۳ ابتدا شکل مقابل را با توجه به اطلاعات صورت سؤال رسم می‌کنیم:



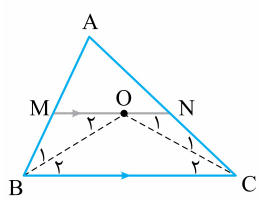
می‌دانیم در هر مثلث قائم‌الزاویه میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است پس AM = MC و در نتیجه مثلث AMC متساوی‌الساقین است، بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AM=MC \Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{C} \\ \text{زاویهٔ خارجی } \hat{M}_۲=\hat{A}_۱+\hat{C} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{M}_۲=۲\hat{C}=۶۰^\circ$$

از طرفی در مثلث AMH داریم: $\hat{A}_۲+\hat{M}+\hat{H}=۱۸۰^\circ$

$\hat{A}_۲+۶۰^\circ+۹۰^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۲=۳۰^\circ$

۷۳۴ با توجه به رابطهٔ بین خطوط موازی و مورب داریم:



$$\left.\begin{array}{l} MN \parallel BC \text{ مورب } OC \Rightarrow \hat{O}_۱=\hat{C}_۲ \\ \text{می‌دانیم } \hat{C}_۱=\hat{C}_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_۱=\hat{C}_۱$$

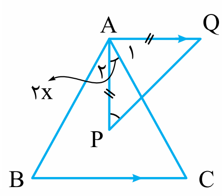
$\Rightarrow$ $\overset{\Delta}{ONC}$ متساوی‌الساقین است. $\Rightarrow ON=NC$

به همین ترتیب می‌توانیم نشان دهیم OM = MB. حال می‌خواهیم محیط مثلث AMN را محاسبه کنیم. داریم:

$P_{\overset{\Delta}{AMN}}=AM+MN+AN=AM+MO+ON+AN$

$=AM+MB+NC+AN=AB+AC=۷+۹=۱۶$

۷۳۵ اطلاعاتی که در صورت سؤال بیان شده است را روی شکل مشخص می‌کنیم، $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی‌الاضلاع است بنابراین: $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=۶۰^\circ$.

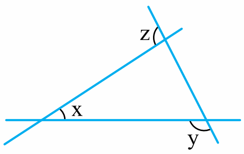


$AQ \parallel BC \text{ مورب } AC \Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{C}=۶۰^\circ$

$\overset{\Delta}{APQ}:\hat{A}_۱+۲x+\hat{P}+\hat{Q}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۶۰^\circ+۲x+۲\hat{Q}=۱۸۰^\circ$

$\Rightarrow ۲\hat{Q}=۱۲۰^\circ-۲x \Rightarrow \hat{Q}=۶۰^\circ-x$

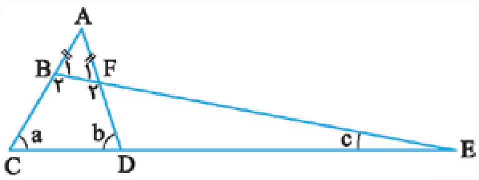
۷۳۶ می‌دانیم در هر مثلث مجموع زاویه‌های داخلی ۱۸۰ درجه است. پس داریم:



$۱۸۰^\circ-y+۱۸۰^\circ-z+x=۱۸۰^\circ$

$۳۶۰^\circ-(y+z-x)=۱۸۰^\circ \Rightarrow y+z-x=۱۸۰^\circ$

۷۳۷ با توجه به شکل داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABF}:\hat{A}+\hat{B}_۱+\hat{F}_۱=۱۸۰^\circ \\ \overset{\Delta}{ACD}:\hat{A}+\hat{C}+\hat{D}=۱۸۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B}_۱+\hat{F}_۱=\hat{C}+\hat{D}$$

$\xrightarrow{\hat{B}_۱=\hat{F}_۱} ۲\hat{B}_۱=\hat{C}+\hat{D}$

پس داریم: $۲\hat{B}_۱=a+b \quad (*)$

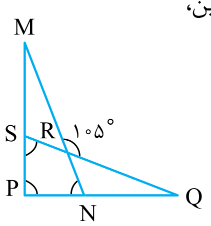
از طرفی در مثلث BCE داریم:

زاویهٔ خارجی $\hat{B}_۱=\hat{C}+\hat{E} \Rightarrow \hat{B}_۱=a+c \quad (**)$

$(*),(**) \Rightarrow ۲\times(a+c)=a+b \Rightarrow ۲a+۲c=a+b$

$\Rightarrow a+۲c=b$

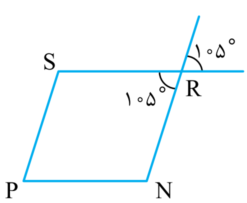
۷۳۸ می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین، زاویه‌های پای ساق با هم برابرند.



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{MPN}:MP=MN \Rightarrow \hat{P}=\hat{N} \\ \overset{\Delta}{SQP}:PQ=QS \Rightarrow \hat{P}=\hat{S} \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \hat{P}=\hat{N}=\hat{S}$

هم‌چنین می‌دانیم در هر ۴ضلعی دلخواه مجموع زاویه‌های داخلی ۳۶۰ درجه است، پس داریم:



$\hat{P}+\hat{N}+\hat{S}+۱۰۵^\circ=۳۶۰^\circ \Rightarrow \hat{P}+\hat{N}+\hat{S}=۳۶۰^\circ-۱۰۵^\circ=۲۵۵^\circ$

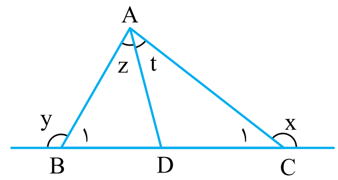
$\Rightarrow ۳\hat{P}=۲۵۵^\circ \Rightarrow \hat{P}=\hat{S}=\hat{N}=۸۵^\circ$

در مثلث PSQ داریم: $\hat{P}+\hat{S}+\hat{Q}=۱۸۰^\circ$

$۸۵+۸۵+\hat{Q}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{Q}=۱۰^\circ$

۷۳۹ با توجه به این‌که می‌دانیم AD نیمساز زاویهٔ A است، پس می‌توان نتیجه گرفت $z=t$. پس داریم:

$x+y=۳(z+t)=۳(z+z)=۶z \quad (*)$

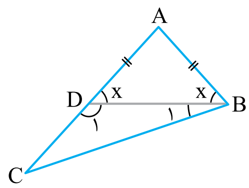


$\overset{\Delta}{ABC}$: زاویهٔ خارجی $x=z+t+\hat{B}_1=z+z+۱۸۰^\circ-y$

$\Rightarrow\ x+y=۲z+۱۸۰^\circ\ (**)$

$(*),(**)\ \Rightarrow\ ۶z=۱۸۰^\circ+۲z\ \Rightarrow\ ۴z=۱۸۰^\circ\ \Rightarrow\ z=۴۵^\circ$

۷۴۰ ابتدا زاویه‌های ABD و ADB را x می‌نامیم، سپس با تشکیل و حل معادله مقدار آن را به دست می‌آوریم:



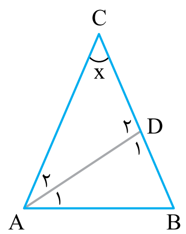
مطابق با صورت سؤال داریم: $x+\hat{B}_1-\hat{C}=۳۰^\circ\ (*)$

در مثلث DCB داریم: $x=\hat{C}+\hat{B}_1\ (**)$ (زاویهٔ خارجی)

بنابراین از (*) و (**) داریم:

$\hat{C}+\hat{B}_1+\hat{B}_1-\hat{C}=۳۰^\circ\ \Rightarrow\ ۲\hat{B}_1=۳۰^\circ\ \Rightarrow\ \hat{B}_1=۱۵^\circ$

۷۴۱ با توجه به اطلاعات صورت سؤال داریم:



$AC=CB\Rightarrow\hat{A}_1+\hat{A}_2=\hat{B}\Rightarrow ۲\hat{A}_2=\hat{B}$

$AD=AB\Rightarrow\hat{D}_1=\hat{B}$

$\Rightarrow\hat{D}_1=۲\hat{A}_2\quad(*)$

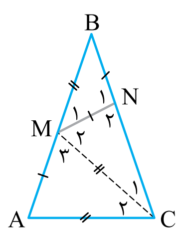
در مثلث ADC داریم:

$\left.\begin{array}{r}\text{زاویهٔ خارجی}\ \hat{D}_1=\hat{C}+\hat{A}_2\\ (*)\ \hat{D}_1=۲\hat{A}_2\end{array}\right\}\Rightarrow\ \hat{C}+\hat{A}_2=۲\hat{A}_2\ \Rightarrow\ \hat{C}=\hat{A}_2$

در مثلث ABC داریم:

$\underset{x}{\hat{C}}+\underset{x}{\hat{A}_1}+\underset{x}{\hat{A}_2}+\underset{۲x}{\hat{B}}=۱۸۰^\circ\ \Rightarrow\ ۵x=۱۸۰^\circ\ \Rightarrow\ x=۳۶^\circ$

۷۴۲ ابتدا اطلاعات مسئله را روی شکل نشان می‌دهیم:



$\overset{\Delta}{BMN}: MN=NB\ \Rightarrow\ \hat{B}=\hat{M}_1$

$\overset{\Delta}{BMC}: MB=MC\ \Rightarrow\ \hat{B}=\hat{C}_1$

$\overset{\Delta}{AMC}: MC=AC\ \Rightarrow\ \hat{A}=\hat{M}_3$

$\overset{\Delta}{ABC}: AB=CB\ \Rightarrow\ \hat{A}=\hat{C}_1+\hat{C}_2$

$\Rightarrow\ \hat{B}=۱۸۰^\circ-\hat{A}-(\hat{C}_1+\hat{C}_2)\ \Rightarrow\ \hat{B}=۱۸۰^\circ-۲\hat{A}$

$\Rightarrow\ A=\dfrac{۱۸۰^\circ-\hat{B}}{۲}$

$\overset{\Delta}{MNC}: \hat{N}_2+\hat{M}_2+\hat{C}_1=۱۸۰^\circ$

زاویهٔ خارجی $\overset{\Delta}{MNB}$: $\hat{N}_2=\hat{B}+\hat{M}_1=۲\hat{B}$ ، $\hat{C}_1=\hat{B}$

$\Rightarrow\ ۳\hat{B}+\hat{M}_2=۱۸۰^\circ\ \Rightarrow\ \hat{M}_2=۱۸۰^\circ-۳\hat{B}$

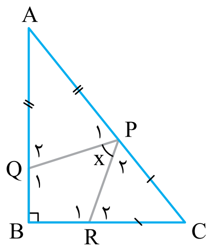
از طرفی:

$\underset{\hat{B}}{\hat{M}_1}+\underset{۱۸۰^\circ-۲\hat{B}}{\hat{M}_2}+\underset{\frac{۱۸۰^\circ-\hat{B}}{۲}}{\hat{M}_3}=۱۸۰^\circ$

$\Rightarrow\ \hat{B}+۱۸۰^\circ-۲\hat{B}+۹۰^\circ-\dfrac{\hat{B}}{۲}=۱۸۰^\circ$

$۹۰-\dfrac{۵\hat{B}}{۲}=۰\ \Rightarrow\ \dfrac{۵\hat{B}}{۲}=۹۰^\circ\ \Rightarrow\ \hat{B}=۳۶^\circ$

۷۴۳ می‌دانیم در هر مثلث اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی برابر است با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورش. پس داریم:



$\overset{\Delta}{AQP}: \hat{Q}_1=\hat{A}+\hat{P}_1 \xlongequal{\text{متساوی‌الساقین}} \hat{A}+\hat{Q}_2$

$\xlongequal{\text{مکمل}} \hat{A}+۱۸۰^\circ-\hat{Q}_1\ \Rightarrow\ ۲\hat{Q}_1=\hat{A}+۱۸۰^\circ$

$\Rightarrow\ \hat{Q}_1=۹۰^\circ+\dfrac{\hat{A}}{۲}$

به همین ترتیب در مثلث PRC نشان می‌دهیم: $\hat{R}_1=۹۰^\circ+\dfrac{\hat{C}}{۲}$

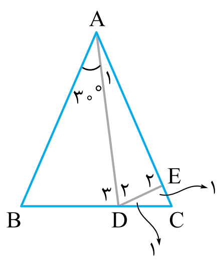
می‌دانیم در هر چهارضلعی مجموع زاویه‌های داخلی ۳۶۰ درجه است، پس داریم: $BQPR: \hat{B}+\hat{Q}_1+x+\hat{R}_1=۳۶۰^\circ$

$۹۰^\circ+۹۰^\circ+\dfrac{\hat{A}}{۲}+۹۰^\circ+\dfrac{\hat{C}}{۲}+x=۳۶۰^\circ$

$\Rightarrow\ \dfrac{\hat{A}+\hat{C}}{۲}+x=۹۰^\circ\ \xrightarrow{\hat{A}+\hat{C}=۹۰^\circ}\ x=۴۵^\circ$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

۷۴۴ می‌دانیم در هر مثلث متساوی‌الساقین زوایای پای ساق با یکدیگر برابرند.



همچنین می‌دانیم در هر مثلث اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی برابر است با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورش.

$\overset{\Delta}{ABC}: AB=AC\ \Rightarrow\ \hat{B}=\hat{C}$

$\overset{\Delta}{ADE}: AD=AE\ \Rightarrow\ \hat{D}_2=\hat{E}_2$

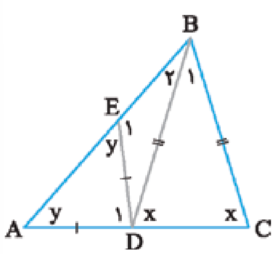
$\overset{\Delta}{ADB}: \underset{\text{زاویهٔ خارجی}}{A\hat{D}C}=\hat{B}+۳۰^\circ\ \Rightarrow\ \hat{D}_1+\hat{D}_2=\hat{B}+۳۰^\circ\quad(۱)$

$\overset{\Delta}{EDC}$: زاویهٔ خارجی $\hat{E}_2=\hat{D}_1+\hat{C}\quad(۲)$

$\xrightarrow{\hat{E}_2=\hat{D}_2\ ,\ (۱)}\ \hat{D}_1+\hat{E}_2=\hat{B}+۳۰^\circ\ \xrightarrow{(۲)}\ \hat{D}_1+\hat{D}_1+\hat{C}$

$=\hat{B}+۳۰^\circ\ \xrightarrow{\hat{B}=\hat{C}}\ ۲\hat{D}_1=۳۰^\circ\ \Rightarrow\ \hat{D}_1=۱۵^\circ$

۷۴۵ ابتدا اطلاعات مسئله را روی شکل نشان می‌دهیم، سپس به کمک تشکیل و حل معادله مقدار مجهول را محاسبه می‌کنیم: می‌دانیم در هر مثلث متساوی‌الساقین زاویه‌های پای ساق با یکدیگر برابرند،



بنابراین زاویه‌های مساوی را روی شکل نشان می‌دهیم.

هم‌چنین داریم:

$$\hat{B}_۱+\hat{B}_۲=\hat{C}=x$$

$$\begin{rcases}\overset{\Delta}{ADE}:\hat{D}_۱=۱۸۰^\circ-۲y\\ \hat{D}_۱+\underbrace{\overset{\Delta}{BDE}}_{۳۰^\circ}+x=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{D}_۱=۱۵۰^\circ-x\end{rcases}$$

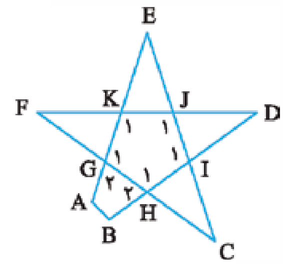
$$\Rightarrow ۱۸۰^\circ-۲y=۱۵۰^\circ-x \Rightarrow ۲y-x=۳۰^\circ \quad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{ABC}:\underset{y}{\underset{\downarrow}{\hat{A}}}+\underbrace{\hat{B}_۱+\hat{B}_۲}_{x}+\underset{x}{\underset{\downarrow}{\hat{C}}}=۱۸۰^\circ \Rightarrow y+۲x=۱۸۰^\circ \quad (۲)$$

$$(۱),(۲)\begin{cases}۲y-x=۳۰^\circ\\ y+۲x=۱۸۰^\circ\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}۴y-۲x=۶۰^\circ\\ y+۲x=۱۸۰^\circ\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۵y=۲۴۰^\circ \Rightarrow y=۴۸^\circ$$

۷۴۶ می‌دانیم در هر مثلث اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی برابر است با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورش، پس داریم:



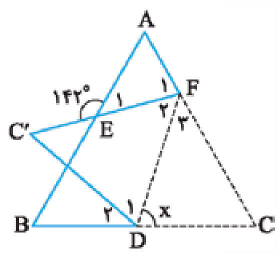
$\overset{\Delta}{HDF}$: زاویهٔ خارجی $\hat{H}_۲=\hat{F}+\hat{D}$

$\overset{\Delta}{GEC}$: زاویهٔ خارجی $\hat{G}_۲=\hat{E}+\hat{C}$

می‌دانیم مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی برابر با ۳۶۰ درجه است، پس در چهارضلعی ABHG داریم: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{H}_۲+\hat{G}_۲=۳۶۰^\circ$

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{F}+\hat{D}+\hat{E}+\hat{C}=۳۶۰^\circ$$

۷۴۷ با توجه به این‌که یک کاغذ، تا شده، می‌توانیم نتیجه بگیریم زاویه‌های ایجادشده با هم برابرند، بنابراین داریم:



$$\hat{D}_۱=x$$
$$\hat{F}_۲=\hat{F}_۳$$
$$\hat{C'}=\hat{C}=۶۰^\circ$$

با توجه به شکل داریم: $\hat{E}_۱+۱۴۲^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{E}_۱=۳۸^\circ$

$$\overset{\Delta}{AEF}:\hat{A}+\hat{E}_۱+\hat{F}_۱=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۶۰^\circ+۳۸+\hat{F}_۱=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{F}_۱=۸۲^\circ$$

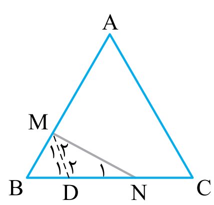
می‌دانیم:

$$\hat{F}_۱+\hat{F}_۲+\hat{F}_۳=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\hat{F}_۲=\hat{F}_۳} \hat{F}_۱+۲\hat{F}_۳=۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۸۲^\circ+۲\hat{F}_۳=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{F}_۳=۴۹^\circ$$

$$\overset{\Delta}{FDC}:\hat{F}_۳+\hat{C}+x=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۴۹^\circ+۶۰^\circ+x=۱۸۰^\circ \Rightarrow x=۷۱^\circ$$

۷۴۸ ابتدا پاره‌خط BC را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم، داریم:



$BM=BD=۱ \Rightarrow \overset{\Delta}{BMD}$ متساوی‌الساقین

$\hat{B}=۶۰^\circ \Rightarrow \hat{M}_۱=\hat{D}_۱=۶۰^\circ \quad (۱) \Rightarrow \overset{\Delta}{BMD}$ متساوی‌الاضلاع

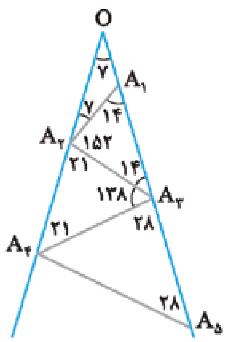
$\Rightarrow \begin{rcases}MD=۱\\ DN=۱\end{rcases} \Rightarrow \overset{\Delta}{DMN}$ متساوی‌الساقین $\Rightarrow \hat{M}_۲=\hat{N}_۱$

$\overset{\Delta}{DMN}$: زاویهٔ خارجی $\hat{D}_۱=\hat{M}_۲+\hat{N}_۱=۲\hat{M}_۲=۶۰^\circ$

$$\Rightarrow \hat{M}_۲=۳۰^\circ \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow B\hat{M}N=\hat{M}_۱+\hat{M}_۲=۹۰^\circ$$

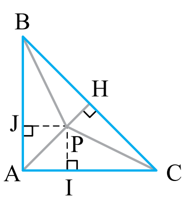
۷۴۹ بیایید به ترتیب زاویه‌ها را پیدا کنیم. همان‌طور که مشخص است در هر مثلث زاویهٔ پای ساق برابر است با: «شمارهٔ مثلث × ۷» این عدد حتماً باید کوچک‌تر از ۹۰ درجه باشد، تا مثلث مورد نظر تشکیل شود.



با توجه به این‌که ۸۴ = ۷ × ۱۲ و ۹۱ = ۷ × ۱۳ پس می‌توان گفت حداکثر ۱۲ مثلث و ۱۳ پاره‌خط خواهیم داشت.

۷۵۰ با توجه به این‌که محیط حلقه ۱ سانتی‌متر و هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع ۳ سانتی‌متر است پس حلقه روی هر ضلع سه دور می‌زند. در نتیجه در عبور از سه ضلع ۹ دور می‌زند. از طرفی در عبور حلقه از هر رأس، حلقه به اندازهٔ زاویهٔ خارجی نیز جابه‌جا می‌شود (حول رأس می‌چرخد). پس از آن‌جا که مجموع زوایای خارجی مثلث برابر ۳۶۰° است، پس حلقه در عبور از سه رأس مجموعاً یک دور می‌زند. در نتیجه حلقه کلاً ۱۰ دور می‌زند.

۷۵۱ می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. پس داریم:



$$\begin{rcases}\hat{B}\ \text{نیمساز}\ BP \Rightarrow PH=PJ\\ \hat{C}\ \text{نیمساز}\ CP \Rightarrow PH=PI\end{rcases} \Rightarrow PH=PJ=PI=\sqrt{۸}$$

بنابراین PJAI مربعی به ضلع $\sqrt{۸}$ است که قطر آن $\sqrt{۸}\times\sqrt{۲}$ برابر با $\sqrt{۱۶}=۴$ خواهد بود.

۷۵۲ تک‌تک جملات را بررسی می‌کنیم:

الف) هر مستطیل دلخواهی ۴ زاویهٔ قائمه دارد و لزومی برای مربع‌بودن نیست.

ب) هر لوزی دلخواهی ۴ ضلع مساوی دارد و لزومی برای مربع‌بودن نیست.

پ) در هر لوزی قطرها عمودمنصف یکدیگرند.

ت) در هر لوزی قطرها زاویه‌های نظیر را نصف می‌کنند.

بنابراین هیچ‌کدام از جملات تعریف مناسبی برای مربع نیست و گزینهٔ (۱) صحیح است.

$$x^2+5x+6=0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله‌مشترک}} (x+2)(x+3)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x+3=0 \Rightarrow x=-3 \end{cases}$$

$$x^3-9x=0 \Rightarrow x(x^2-9)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2-9=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3 \end{cases}$$

$$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1$$

این معادله جواب ندارد؛ زیرا مقدار عبارت x^2 هرگز منفی نمی‌شود.

بنابراین عبارت A به ازای مقادیر ۰، ۲-، ۳- و ۳ تعریف‌نشده است.

۲۱۵۱ عبارت را به صورت کسر نوشته و بدون ساده‌کردن، ریشه‌های مخرج را به دست می‌آوریم:

$$C=\frac{x-1}{5x^2+2\sqrt{5}x+1} \div \frac{x^3-5x}{1-\sqrt{5}x}=\frac{\dfrac{x-1}{5x^2+2\sqrt{5}x+1}}{\dfrac{x^3-5x}{1-\sqrt{5}x}}$$

$$5x^2+2\sqrt{5}x+1=0 \Rightarrow (\sqrt{5}x)^2+2\sqrt{5}x+1=0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}} (\sqrt{5}x+1)^2=0 \Rightarrow \sqrt{5}x+1=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{-1}{\sqrt{5}}=\frac{-\sqrt{5}}{5}$$

$$1-\sqrt{5}x=0 \Rightarrow \sqrt{5}x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{x^3-5x}{1-\sqrt{5}x}=0 \Rightarrow x^3-5x=0 \Rightarrow x(x^2-5)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2-5=0 \Rightarrow x^2=5 \Rightarrow x=\pm\sqrt{5} \end{cases}$$

بنابراین عبارت داده‌شده به ازای مقادیر $\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$، $\pm\sqrt{5}$ و صفر تعریف‌نشده است.

۲۱۵۲ مخرج عبارت $\frac{2x-3}{x^6+1}$ هرگز صفر نمی‌شود؛ زیرا:

$$x^6+1=0 \Rightarrow x^6=-1$$

چون حاصل x^6 همواره مثبت است پس به ازای هیچ مقداری برابر ۱- نیست.

بررسی سایر گزینه‌ها: در هر گزینه مخرج را برابر صفر قرار می‌دهیم:

گزینهٔ (۱): $x=0$

گزینهٔ (۲): $x^2+4x+4=0 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع}} (x+2)^2=0$

$$\Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

گزینهٔ (۳): $x^2-2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

۲۱۵۳ با توجه به علامت a و b ریشه‌های مخرج را مشخص می‌کنیم.

اگر $a>0$ و $b>0$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$ax^2+b=0 \Rightarrow x^2=-\frac{b}{a}$$

چون حاصل x^2 حتماً نامنفی و $-\frac{b}{a}$ حتماً منفی می‌شود پس معادله جواب ندارد و در نتیجه عبارت همواره تعریف‌شده است.

اگر $a<0$ و $b<0$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$ax^2+b=0 \Rightarrow x^2=-\frac{b}{a}$$

چون حاصل x^2 حتماً نامنفی و $-\frac{b}{a}$ حتماً منفی می‌شود پس معادله جواب ندارد و در نتیجه عبارت همواره تعریف‌شده است.

در هر دو حالت گفته‌شده، $\frac{a}{b}>0$ است.

برای رد سایر گزینه‌ها مثال نقض می‌آوریم:

گزینهٔ (۱): $a=1, b=-1 (ab<0)$

$$\text{مخرج}=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1 \;※$$

گزینهٔ (۲): $a=4, b=-1 (a+b>0)$

$$\text{مخرج}=0 \Rightarrow 4x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2} \;※$$

گزینهٔ (۴): $a=-1, b=+4 (a-b<0)$

$$\text{مخرج}=0 \Rightarrow -x^2+4=0 \Rightarrow x=\pm 2 \;※$$

۲۱۵۴ چون عبارت به ازای $x=-1$ تعریف‌نشده است پس ۱- ریشهٔ مخرج است.

$$x^2-ax+1=0 \xrightarrow{x=-1} (-1)^2-a\times(-1)+1=0$$

$$1+a+1=0 \Rightarrow a=-2$$

۲۱۵۵ با توجه به این‌که عبارت به ازای $x=1$ و $x=-3$ تعریف‌نشده است پس این دو عدد ریشه‌های مخرج هستند.

$$x^2+ax+b=0$$

$$x=1 \Rightarrow (1)^2+a\times 1+b=0 \Rightarrow a+b=-1$$

$$x=-3 \Rightarrow (-3)^2+(-3)a+b=0 \Rightarrow -3a+b=-9$$

حالا با قراردادن تساوی‌های به دست آمده در دستگاه داریم:

$$\times 3\begin{cases} a+b=-1 \\ -3a+b=-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a+3b=-3 \\ -3a+b=-9 \end{cases}$$

$$4b=-12 \Rightarrow b=-3, a=2$$

حالا $a-b$ را حساب می‌کنیم. $a-b=2-(-3)=2+3=5$

۲۱۵۶ با توجه به این‌که عبارت به ازای ۳- تعریف‌نشده است پس ۳- ریشهٔ مخرج است.

اما از آن‌جا که درجهٔ عبارت مخرج برابر ۲ است و مخرج تنها یک ریشه دارد، پس مخرج به صورت $(x+3)^2$ است.

پس داریم: $(x+3)^2=x^2+6x+9$

بنابراین $m=6$ و $n=9$ است، پس $n-m$ برابر است با:

$$n-m=9-6=3$$

۲۱۵۷ از صورت $3a^5$ و از مخرج ۲، فاکتور می‌گیریم.

$$\frac{3a^{12}-6a^{30}}{2a^7-4a^{25}}=\frac{3a^5(a^7-2a^{25})}{2(a^7-2a^{25})}=\frac{3}{2}a^5$$

۲۱۵۸ با استفاده از دسته‌بندی و فاکتورگیری، عبارت صورت را تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{1-y+y^3-y^4}{1-y}=\frac{(1-y)+y^3(1-y)}{(1-y)}=\frac{(1-y)(1+y^3)}{(1-y)}=1+y^3$$

۲۱۵۹ ابتدا صورت و مخرج را به صورت زیر دسته‌بندی کرده و سپس فاکتور می‌گیریم.

$$\frac{x^۳-۴x+kx-۴k}{x^۲-kx-۴x+۴k}=\frac{(x^۳-۴x)+(kx-۴k)}{(x^۲-۴x)+(-kx+۴k)}$$
$$=\frac{x(x-۴)+k(x-۴)}{x(x-۴)-k(x-۴)}=\frac{(x-۴)(x+k)}{(x-۴)(x-k)}=\frac{x+k}{x-k}$$

۲۱۶۰ در صورت به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای داریم:

$$\frac{x^۲-۲xy+y^۲-x+y}{x^۲-xy-x}=\frac{(x-y)^۲-(x-y)}{x^۲-xy-x}$$

حالا با فاکتورگیری در صورت و مخرج داریم:

$$\frac{(x-y)(x-y-۱)}{x(x-y-۱)}=\frac{x-y}{x}$$

۲۱۶۱ ابتدا از صورت و مخرج عددِ ۲ را فاکتور می‌گیریم.

$$\frac{۲x^۲-۸x+۸}{۲x-۴}=\frac{\cancel{۲}(x^۲-۴x+۴)}{\cancel{۲}(x-۲)}$$

عبارت صورت به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای تجزیه می‌شود، پس:

$$\frac{x^۲-۴x+۴}{x-۲}=\frac{(x-۲)^۲}{x-۲}=x-۲$$

۲۱۶۲ عبارت صورت به کمک اتحاد مزدوج تجزیه می‌شود.

$$\frac{x^۲-y^۲}{x+y}=\frac{(x-y)(x+y)}{x+y}=x-y$$

۲۱۶۳ عبارت هر کدام از گزینه‌ها را تا حد امکان ساده می‌کنیم.

گزینهٔ (۱): ساده‌تر نمی‌شود.

$$\frac{a-۳}{a+۳}$$

گزینهٔ (۲): از مخرج منفی یک فاکتور می‌گیریم.

$$\frac{a^۲-۲a+۱}{۲a-a^۲-۱}=\frac{a^۲-۲a+۱}{-(-۲a+a^۲+۱)}=-۱$$

گزینهٔ (۳): عبارت صورت به کمک اتحاد مزدوج تجزیه می‌شود.

$$\frac{a^۲-۹}{(۳-a)(۳+a)}=\frac{\overset{-۱}{\cancel{(a-۳)}}\ \cancel{(a+۳)}}{\cancel{(۳-a)}\ \cancel{(۳+a)}}=-۱$$

گزینهٔ (۴): با ساده‌کردن عبارت صورت و فاکتورگرفتن ۱− داریم:

$$\frac{۲a-۳b-۶a}{۴a+۳b}=\frac{-۴a-۳b}{۴a+۳b}=\frac{-(۴a+۳b)}{۴a+۳b}=-۱$$

بنابراین فقط حاصل گزینهٔ (۱) متفاوت است.

۲۱۶۴ از صورت ۴ و از مخرج ۲− را فاکتور می‌گیریم.

$$\frac{-۱۲-۸x+۴x^۲}{-۲x+۶}=\frac{۴(x^۲-۲x-۳)}{-۲(x-۳)}$$

عبارت پرانتز صورت به کمک اتحاد جمله‌مشترک تجزیه می‌شود.

$$\frac{۴(x-۳)(x+۱)}{-۲(x-۳)}=-۲(x+۱)=-۲x-۲$$

۲۱۶۵ در صورت با فاکتورگیری از ۱− به اتحاد مربع دوجمله‌ای می‌رسیم، پس:

$$\frac{c^۲-a^۲-b^۲-۲ab}{a+b-c}=\frac{c^۲-(a^۲+b^۲+۲ab)}{a+b-c}$$
$$=\frac{c^۲-(a+b)^۲}{a+b-c}$$

حالا در صورت با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$\frac{(c+a+b)(c-(a+b))}{a+b-c}=-a-b-c$$

۲۱۶۶ در صورت $x^۲-۴$ به کمک اتحاد مزدوج تجزیه می‌شود، هم‌چنین عبارت مخرج پس از فاکتورگیری از ۱− به کمک اتحاد جمله‌مشترک تجزیه می‌شود.

$$\frac{(x-۳)(x^۲-۴)}{۶+x-x^۲}=\frac{(x-۳)(x-۲)(x+۲)}{-(x^۲-x-۶)}$$
$$=\frac{(x-۳)(x-۲)(x+۲)}{-(x+۲)(x-۳)}=-(x-۲)=۲-x$$

۲۱۶۷ حاصل‌ضرب هر عبارت در معکوسش برابر ۱− است. بنابراین سؤال از ما قرینهٔ معکوس عبارت داده‌شده را می‌خواهد تا با ضرب در عبارت داده‌شده حاصل برابر ۱− شود. پس قرینهٔ معکوس عبارت داده‌شده را نوشته و صورت آن را با اتحاد مزدوج و مخرجش را با اتحاد جمله‌مشترک تجزیه می‌کنیم.

$$-\frac{x^۲-۹}{x^۲-۲x-۳}=\frac{-(x-۳)(x+۲)}{(x-۳)(x+۱)}=\frac{-x-۲}{x+۱}\qquad (x\neq -۱)$$

۲۱۶۸ ابتدا با معکوس‌کردن پایه‌ها، توان‌ها را مثبت می‌کنیم.

$$\frac{a^{-۴}-b^{-۴}}{a^{-۲}-b^{-۲}}=\frac{\frac{۱}{a^۴}-\frac{۱}{b^۴}}{\frac{۱}{a^۲}-\frac{۱}{b^۲}}=\frac{\frac{b^۴-a^۴}{a^۴b^۴}}{\frac{b^۲-a^۲}{a^۲b^۲}}$$
$$=\frac{(b^۴-a^۴)(a^۲b^۲)}{(a^۴b^۴)(b^۲-a^۲)}=\frac{b^۴-a^۴}{a^۲b^۲(b^۲-a^۲)}$$

حالا با تجزیهٔ صورت به کمک اتحاد مزدوج داریم:

$$\frac{(b^۲-a^۲)(b^۲+a^۲)}{a^۲b^۲(b^۲-a^۲)}=\frac{b^۲+a^۲}{a^۲b^۲}=\frac{b^۲}{a^۲b^۲}+\frac{a^۲}{a^۲b^۲}$$
$$\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}=a^{-۲}+b^{-۲}$$

۲۱۶۹ با معکوس‌کردن پایه‌ها، توان‌ها را به صورت مثبت می‌نویسیم.

$$\frac{ab(a^{-۲}+b^{-۲}+۲a^{-۱}b^{-۱})}{a+b}=\frac{ab(\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}+\frac{۲}{ab})}{a+b}$$
$$=\frac{ab(\frac{b^۲}{a^۲b^۲}+\frac{a^۲}{a^۲b^۲}+\frac{۲ab}{a^۲b^۲})}{a+b}=\frac{ab(\frac{a^۲+b^۲+۲ab}{a^۲b^۲})}{a+b}$$
$$=\frac{\frac{a^۲+b^۲+۲ab}{ab}}{a+b}=\frac{\frac{(a+b)^۲}{ab}}{a+b}=\frac{(a+b)^۲}{ab(a+b)}=\frac{a+b}{ab}$$
$$=\frac{a}{ab}+\frac{b}{ab}=\frac{۱}{b}+\frac{۱}{a}$$

۲۱۷۰ عبارت داده‌شده را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$(a^{-۲}b^{-۲}-۳a^{-۱}b^{-۱}+۲)\div(a^{-۱}b^{-۱}-۲)$$
$$=\frac{a^{-۲}b^{-۲}-۳a^{-۱}b^{-۱}+۲}{a^{-۱}b^{-۱}-۲}$$

صورت عبارت به کمک اتحاد جمله‌مشترک تجزیه می‌شود، پس:

$$\frac{(a^{-۱}b^{-۱}-۲)(a^{-۱}b^{-۱}-۱)}{a^{-۱}b^{-۱}-۲}=a^{-۱}b^{-۱}-۱=\frac{۱}{ab}-۱=\frac{۱-ab}{ab}$$

۲۱۷۱ $(x+1)$ را برابر a در نظر می‌گیریم.

$$\frac{(x+1)^3-3(x+1)^2+3(x+1)-1}{(x+1)^2-2(x+1)+1}=\frac{a^3-3a^2+3a-1}{a^2-2a+1}$$

عبارت صورت به کمک اتحاد مکعب دوجمله‌ای و عبارت مخرج به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای تجزیه می‌شود.

$$\frac{(a-1)^3}{(a-1)^2}=a-1\xrightarrow{a=x+1}x+1-1=x$$

۲۱۷۲ ابتدا مخرج را به صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم:

$$\frac{1+x^3}{1+2x+2x^2+x^3}=\frac{1+x^3}{(1+x^3)+(2x+2x^2)}$$

حالا به کمک اتحاد چاق و لاغر و فاکتورگیری داریم:

$$\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)+2x(x+1)}=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1+2x)}$$
$$=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$$

۲۱۷۳ با اضافه و کم کردن $-2x^4y^4$ در صورت و استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای داریم:

$$\frac{x^8+x^4y^4+y^8}{x^4+x^2y^2+y^4}=\frac{x^8+y^8+2x^4y^4-2x^4y^4+x^4y^4}{x^4+x^2y^2+y^4}$$
$$=\frac{(x^4+y^4)^2-x^4y^4}{x^4+x^2y^2+y^4}$$

حالا صورت را با اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم.

$$\frac{(x^4+y^4-x^2y^2)(x^4+y^4+x^2y^2)}{x^4+x^2y^2+y^4}=x^4+y^4-x^2y^2$$

۲۱۷۴ $2x^2-3x$ را برابر a فرض می‌کنیم و با استفاده از اتحاد جمله‌مشترک داریم:

$$\frac{(2x^2-3x-2)(2x^2-3x-5)+2}{(2x^2-3x-1)(2x^2-3x-5)+4}=\frac{(a-2)(a-5)+2}{(a-1)(a-5)+4}$$
$$=\frac{a^2-7a+10+2}{a^2-6a+5+4}=\frac{a^2-7a+12}{a^2-6a+9}$$

حالا صورت و مخرج را به کمک اتحاد جمله‌مشترک تجزیه می‌کنیم.

$$\frac{(a-4)(a-3)}{(a-3)(a-3)}=\frac{a-4}{a-3}\xrightarrow{a=2x^2-3x}\frac{2x^2-3x-4}{2x^2-3x-3}$$

توجه ما برای راحتی محاسبات، $2x^2-3x$ را برابر a فرض کردیم ولی اگر شما با اصل عبارت به راحتی کار می‌کنید و در فصل عبارت جبری حسابی حرفه‌ای شدید نیازی به تغییر متغیر نیست!

۲۱۷۵ در صورت و مخرج‌ها با قدرت فاکتورگیری می‌کنیم و سپس حاصل را به دست می‌آوریم.

$$\frac{x^2+xy}{5x+5y+xz+yz}\times\frac{10+2z}{6x}$$
$$=\frac{x(x+y)}{5(x+y)+z(x+y)}\times\frac{2(5+z)}{6x}=\frac{2x(x+y)(5+z)}{6x(x+y)(5+z)}=\frac{1}{3}$$

۲۱۷۶ a^3+a را برابر x فرض می‌کنیم.

$$\frac{(a^3+a-1)(a^3+a+2)-4}{(a^3+a-2)(a^3+a+2)-5}=\frac{(x-1)(x+2)-4}{(x-2)(x+2)-5}$$

حالا با استفاده از اتحاد جمله‌مشترک در صورت و اتحاد مزدوج در مخرج داریم:

$$\frac{x^2+x-2-4}{x^2-4-5}=\frac{x^2+x-6}{x^2-9}$$

در ادامه صورت را با اتحاد جمله‌مشترک و مخرج را با اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم.

$$\frac{(x+3)(x-2)}{(x-3)(x+3)}=\frac{x-2}{x-3}\xrightarrow{x=a^3+a}\frac{a^3+a-2}{a^3+a-3}$$

۲۱۷۷ از مخرج کسر دوم ۱− فاکتور می‌گیریم و سپس حاصل عبارت را به دست می‌آوریم.

$$\frac{x}{x-y}-\frac{y}{y-x}=\frac{x}{x-y}-\frac{y}{-(x-y)}=\frac{x}{x-y}+\frac{y}{x-y}=\frac{x+y}{x-y}$$

۲۱۷۸ چون x و y معکوس هم هستند، پس: $y=\frac{1}{x}$

با جای‌گذاری y و مخرج‌مشترک‌گیری داریم:

$$\frac{3-5x}{7x}-\frac{9+3y}{7}=\frac{3-5x}{7x}-\frac{x(9+3\frac{1}{x})}{7x}$$
$$=\frac{3-5x-9x-3}{7x}=\frac{-14x}{7x}=-2$$

۲۱۷۹ با فاکتورگیری از صورت و مخرج کسر دوم داریم:

$$K=\frac{a^2-b^2}{ab}-\frac{ab-b^2}{ab-a^2}=\frac{a^2-b^2}{ab}-\frac{b\,\cancelto{-1}{(a-b)}}{a\,\cancel{(b-a)}}$$
$$=\frac{a^2-b^2}{ab}+\frac{b}{a}=\frac{a^2-b^2+b^2}{ab}=\frac{a^2}{ab}=\frac{a}{b}$$

۲۱۸۰ با فاکتورگیری در مخرج کسرها و مخرج‌مشترک‌گیری داریم:

$$\frac{8x-15}{x^2-3x}+\frac{3}{3-x}=\frac{A}{x}\Rightarrow\frac{8x-15}{x(x-3)}+\frac{3}{-(x-3)}=\frac{A}{x}$$
$$\Rightarrow\frac{8x-15-3x}{x(x-3)}=\frac{A}{x}\Rightarrow\frac{5x-15}{x(x-3)}=\frac{A}{x}$$
$$\Rightarrow\frac{5(x-3)}{x(x-3)}=\frac{A}{x}\Rightarrow\frac{5}{x}=\frac{A}{5}\Rightarrow A=5$$

۲۱۸۱ ابتدا عبارت را تا حد امکان ساده می‌کنیم، برای تجزیه، از فاکتورگیری و اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم.

$$\frac{5b}{5a-5b}-\frac{a^2+ab}{a^2-b^2}+\frac{a+b}{-a-b}$$
$$=\frac{5b}{5(a-b)}-\frac{a(a+b)}{(a-b)(a+b)}+\frac{a+b}{-(a+b)}=\frac{b}{a-b}-\frac{a}{a-b}-1$$
$$=\frac{b-a}{a-b}-1=\frac{-(a-b)}{a-b}-1=-1-1=-2$$

۲۱۸۲ مخرج کسر اول را به کمک اتحاد مزدوج و مخرج کسر دوم را به کمک اتحاد جمله‌مشترک تجزیه می‌کنیم.

$$\frac{x-3}{x^2-9}+\frac{x+7}{x^2+10x+21}=\frac{x-3}{(x+3)(x-3)}+\frac{x+7}{(x+3)(x+7)}$$
$$=\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+3}=\frac{2}{x+3}$$

۲۱۸۳ ابتدا عبارت داده‌شده را تا حد امکان ساده می‌کنیم، برای این کار در تجزیهٔ صورت کسر اول از فاکتورگیری و در مخرج آن از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم. در تجزیهٔ مخرج کسر دوم فاکتورگیری می‌کنیم،

در تجزیهٔ صورت کسر سوم از اتحاد جمله‌مشترک استفاده می‌کنیم.

$$\frac{x^۲-xy}{x^۲-y^۲}+\frac{xy}{xy+x^۲}+\frac{x^۲-۳x+۲}{(x-۱)(x-۲)}$$
$$=\frac{x(x-y)}{(x-y)(x+y)}+\frac{xy}{x(y+x)}+\frac{(x-۱)(x-۲)}{(x-۱)(x-۲)}$$
$$=\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+x}+۱=\frac{x+y}{x+y}+۱=۱+۱=۲$$

۲۱۸۴ کلاً ۴۰ جمله داریم که ۲۰تا از آن $\frac{۴}{x}$ و ۲۰تای دیگر $\frac{x}{۴}$ هستند، پس مجموع ۴۰ جمله برابر است با:

$$\text{مجموع ۴۰ جمله}=(۲۰\times\frac{۴}{x})+(۲۰\times\frac{x}{۴})=\frac{۸۰}{x}+\frac{۲۰x}{۴}$$
$$=\frac{۸۰}{x}+۵x=\frac{۸۰+۵x^۲}{x}$$

۲۱۸۵ ابتدا عبارت A را ساده می‌کنیم. برای تجزیهٔ صورت از اتحاد مزدوج و برای تجزیهٔ مخرج از فاکتورگیری استفاده می‌کنیم.

$$A=\frac{x^۲-۴}{۲x+۴}=\frac{(x-۲)(x+۲)}{۲(x+۲)}=\frac{x-۲}{۲}$$

حالا $\frac{۱}{A}+۱$ را به دست می‌آوریم.

$$\frac{۲}{x-۲}+۱=\frac{۲+x-۲}{x-۲}=\frac{x}{x-۲}$$

۲۱۸۶ ابتدا $A^۲$ را حساب می‌کنیم.

$$A^۲=\frac{(۲x)^۲}{(۱-x^۲)^۲}=\frac{۴x^۲}{(۱-x^۲)^۲}$$

حالا حاصل $۱+\frac{۱}{A^۲}$ را به دست می‌آوریم.

$$۱+\frac{۱}{A^۲}=۱+\frac{(۱-x^۲)^۲}{۴x^۲}=\frac{۴x^۲+(۱-x^۲)^۲}{۴x^۲}$$
$$=\frac{۴x^۲+۱-۲x^۲+x^۴}{۴x^۲}=\frac{۱+۲x^۲+x^۴}{۴x^۲}=\frac{(۱+x^۲)^۲}{(۲x)^۲}$$

با کمی دقت حاصل $۱+\frac{۱}{A^۲}$ برابر $\frac{۱}{B^۲}$ است.

۲۱۸۷ از صورت کسر اول منفی یک را فاکتور گرفته و مخرج آن را با استفاده از اتحاد جمله‌مشترک تجزیه می‌کنیم.

$$\frac{۲-n}{n^۲-۳n+۲}+\frac{۲}{n+۲}=\frac{-(n-۲)}{(n-۱)(n-۲)}+\frac{۲}{n+۲}=\frac{-۱}{n-۱}+\frac{۲}{n+۲}$$

حالا مخرج‌مشترک گرفته و حاصل عبارت را به دست می‌آوریم.

$$\frac{-(n+۲)+۲(n-۱)}{(n-۱)(n+۲)}=\frac{-n-۲+۲n-۲}{(n-۱)(n+۲)}=\frac{n-۴}{n^۲+n-۲}$$

۲۱۸۸ ابتدا $A+B-C$ را تشکیل می‌دهیم.

$$A+B-C=\frac{۲x^۲+۴x}{x^۲-۹}+\frac{۱}{x-۳}-\frac{۲x}{x-۳}$$

مخرج کسر اول را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم و سپس با مخرج‌مشترک‌گیری داریم:

$$\frac{۲x^۲+۴x}{(x-۳)(x+۳)}+\frac{۱-۲x}{x-۳}=\frac{۲x^۲+۴x+(۱-۲x)(x+۳)}{(x-۳)(x+۳)}$$
$$=\frac{۲x^۲+۴x+x+۳-۲x^۲-۶x}{(x-۳)(x+۳)}=\frac{-x+۳}{(x-۳)(x+۳)}$$

با فاکتورگیری ۱− از صورت داریم: $\frac{-(x-۳)}{(x-۳)(x+۳)}=\frac{-۱}{x+۳}$

۲۱۸۹ ابتدا مخرج کسر اول را به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای و مخرج کسر دوم را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم.

$$\frac{۲x}{x^۲+۲x+۱}+\frac{۱}{x^۲-۱}-\frac{۲}{۱+x}=\frac{۲x}{(x+۱)^۲}+\frac{۱}{(x+۱)(x-۱)}-\frac{۲}{۱+x}$$

حالا مخرج‌مشترک گرفته و حاصل عبارت را به دست می آوریم.

$$\frac{۲x(x-۱)+(x+۱)-۲(x+۱)(x-۱)}{(x+۱)^۲(x-۱)}$$
$$=\frac{۲x^۲-۲x+x+۱-۲(x^۲-۱)}{(x+۱)^۲(x-۱)}$$
$$=\frac{۲x^۲-x+۱-۲x^۲+۲}{(x+۱)^۲(x-۱)}=\frac{۳-x}{(x+۱)^۲(x-۱)}$$

۲۱۹۰ برای تجزیهٔ صورت و مخرج‌ها کارهای زیر را انجام می‌دهیم. صورت کسر اول به کمک اتحاد چاق و لاغر و مخرج آن به کمک اتحاد جمله‌مشترک تجزیه می‌شود. از صورت و مخرج کسر دوم هم یک x فاکتور می‌گیریم.

$$\frac{x^۳+۱}{x^۲+۳x+۲}+\frac{x^۳-x}{x^۳+x^۲-۲x}$$
$$=\frac{\cancel{(x+۱)}(x^۲-x+۱)}{\cancel{(x+۱)}(x+۲)}+\frac{x(x^۲-۱)}{x(x^۲+x-۲)}$$

حالا صورت کسر دوم را با اتحاد مزدوج و مخرجش را با اتحاد جمله‌مشترک تجزیه می‌کنیم.

$$\frac{x^۲-x+۱}{x+۲}+\frac{\cancel{x}(x+۱)\cancel{(x-۱)}}{\cancel{x}\cancel{(x-۱)}(x+۲)}=\frac{x^۲-x+۱}{x+۲}+\frac{x+۱}{x+۲}$$
$$=\frac{x^۲-x+۱+x+۱}{x+۲}=\frac{x^۲+۲}{x+۲}$$

۲۱۹۱ ابتدا صورت هر کدام از عبارت‌ها را به کمک اتحاد چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم.

$$\frac{(a+b)^۳-c^۳}{a+b-c}=\frac{(a+b-c)[(a+b)^۲+(a+b)c+c^۲]}{a+b-c}$$
$$=a^۲+b^۲+۲ab+ac+bc+c^۲$$
$$\frac{(b+c)^۳-a^۳}{b+c-a}=\frac{(b+c-a)[(b+c)^۲+(b+c)a+a^۲]}{b+c-a}$$
$$b^۲+c^۲+۲bc+ba+ca+a^۲$$
$$\frac{(a+c)^۳-b^۳}{a+c-b}=\frac{(a+c-b)[(a+c)^۲+(a+c)b+b^۲]}{a+c-b}$$
$$=a^۲+c^۲+۲ac+ab+cb+b^۲$$

مجموع سه عبارت به دست آمده برابر حاصل عبارت سؤال است.

$$۳a^۲+۳b^۲+۳c^۲+۴ab+۴ac+۴bc$$

۲۱۹۲ تجزیه‌شدهٔ مخرج کسر سوم برابر $(x-y)(x+y)$ است، پس با مخرج‌مشترک‌گرفتن کسرها داریم:

$$\frac{x^۲+xy+y^۲}{x+y}-\frac{x^۲-xy+y^۲}{x-y}+\frac{۲y^۳-y^۲+x^۲}{(x-y)(x+y)}$$
$$=\frac{(x^۲+xy+y^۲)(x-y)-(x^۲-xy+y^۲)(x+y)}{(x-y)(x+y)}$$
$$+\frac{۲y^۳-y^۲+x^۲}{(x-y)(x+y)}$$

حالا با استفاده از اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$\frac{(x^۳-y^۳)-(x^۳+y^۳)+۲y^۳-y^۲+x^۲}{(x-y)(x+y)}$$

$$=\frac{-y^۲+x^۲}{(x-y)(x+y)}=\frac{x^۲-y^۲}{(x-y)(x+y)}$$

با تجزیهٔ صورت به کمک اتحاد مزدوج داریم: $\frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)(x+y)}=۱$

۲۱۹۳ ابتدا صورت کسر دوم را به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای و سپس اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم.

$$\frac{a^۲-b^۲+۱+۲a}{(a+b+۱)(۲ab+۱)}=\frac{(a^۲+۲a+۱)-b^۲}{(a+b+۱)(۲ab+۱)}$$

$$=\frac{(a+۱)^۲-b^۲}{(a+b+۱)(۲ab+۱)}=\frac{\cancel{(a+۱+b)}(a+۱-b)}{\cancel{(a+b+۱)}(۲ab+۱)}=\frac{a+۱-b}{۲ab+۱}$$

حالا حاصل عبارت را به دست می‌آوریم.

$$\frac{a^۲+b^۲}{(-a+b+۱)(۲ab+۱)}+\frac{a+۱-b}{۲ab+۱}$$

$$=\frac{a^۲+b^۲+(a+۱-b)(-a+b+۱)}{(-a+b+۱)(۲ab+۱)}$$

$$=\frac{a^۲+b^۲+(۱+(a-b))(۱-(a-b))}{(-a+b+۱)(۲ab+۱)}$$

حالا صورت را به کمک اتحاد مزدوج ساده می‌کنیم.

$$\frac{a^۲+b^۲+(۱-(a-b)^۲)}{(-a+b+۱)(۲ab+۱)}=\frac{a^۲+b^۲+۱-a^۲+۲ab-b^۲}{(-a+b+۱)(۲ab+۱)}$$

$$=\frac{۲ab+۱}{(-a+b+۱)(۲ab+۱)}=\frac{۱}{-a+b+۱}$$

۲۱۹۴ تفریق دو عبارت را نوشته و عبارت به دست آمده را به صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم.

$$\frac{a}{b(a+b)}+\frac{b}{c(b+c)}+\frac{c}{a(c+a)}-\left(\frac{b}{a(a+b)}+\frac{c}{b(b+c)}+\frac{a}{c(c+a)}\right)$$

$$=\left(\frac{a}{b(a+b)}-\frac{b}{a(a+b)}\right)+\left(\frac{b}{c(b+c)}-\frac{c}{b(b+c)}\right)$$

$$+\left(\frac{c}{a(c+a)}-\frac{a}{c(c+a)}\right)=\frac{a^۲-b^۲}{ab(a+b)}+\frac{b^۲-c^۲}{bc(b+c)}+\frac{c^۲-a^۲}{ac(c+a)}$$

صورت هر کدام از کسرها به کمک اتحاد مزدوج تجزیه شده و با مخرج ساده می‌شود. $\frac{a-b}{ab}+\frac{b-c}{bc}+\frac{c-a}{ac}$

حالا با تفکیک هر کدام از کسرها داریم:

$$\frac{a}{ab}-\frac{b}{ab}+\frac{b}{bc}-\frac{c}{bc}+\frac{c}{ac}-\frac{a}{ac}=\frac{۱}{b}-\frac{۱}{a}+\frac{۱}{c}-\frac{۱}{b}+\frac{۱}{a}-\frac{۱}{c}=۰$$

۲۱۹۵ مخرج‌مشترک بین هر سه کسر برابر $(x-y)(x-z)(y-z)$ است، پس:

$$\frac{x+۱}{(x-y)(x-z)}+\frac{y+۱}{(y-z)(y-x)}+\frac{z+۱}{(z-x)(z-y)}$$

$$=\frac{x+۱}{(x-y)(x-z)}+\frac{y+۱}{-(y-z)(x-y)}+\frac{z+۱}{(x-z)(y-z)}$$

$$=\frac{(x+۱)(y-z)-(y+۱)(x-z)+(z+۱)(x-y)}{(x-y)(x-z)(y-z)}$$

$$=\frac{xy-xz+y-z-yx+yz-x+z+zx-zy+x-y}{(x-y)(x-z)(y-z)}=۰$$

۲۱۹۶ ابتدا سمت راست تساوی را ساده می‌کنیم.

$$\frac{A}{x-۲}+\frac{B}{x^۲-۴}=\frac{A}{x-۲}+\frac{B}{(x-۲)(x+۲)}=\frac{A(x+۲)+B}{(x-۲)(x+۲)}$$

$$=\frac{Ax+۲A+B}{x^۲-۴}$$

با توجه به تساوی داریم:

$$\frac{۳x}{x^۲-۴}=\frac{Ax+۲A+B}{x^۲-۴}\Rightarrow ۳x=Ax+۲A+B$$

از متحد قراردادن صورت‌ها $A=۳$ و $۲A+B=۰$ است، پس:

$$۲A+B=۰\xrightarrow{A=۳}۲\times۳+B=۰\Rightarrow B=-۶$$

۲۱۹۷ ابتدا سمت چپ تساوی را تا حد امکان ساده می‌کنیم.

$$\frac{A}{۲x-۱}+\frac{B}{x+۱}=\frac{A(x+۱)+B(۲x-۱)}{(۲x-۱)(x+۱)}=\frac{Ax+A+۲Bx-B}{۲x^۲+۲x-x-۱}$$

$$=\frac{x(A+۲B)+(A-B)}{۲x^۲+x+۱}$$

با توجه به تساوی داریم:

$$\frac{x(A+۲B)+(A-B)}{۲x^۲+x+۱}=\frac{۷x+۱}{۲x^۲+x-۱}$$

$$\Rightarrow x(A+۲B)+(A-B)=۷x+۱$$

از متحد قراردادن صورت‌ها داریم: $\begin{cases}A+۲B=۷\\A-B=۱\end{cases}$

بنابراین $A-B$ برابر یک است.

۲۱۹۸ ابتدا سمت چپ تساوی داده‌شده را ساده می‌کنیم.

$$\frac{A}{x-۳}+\frac{B}{۳x-x^۲}=\frac{A}{x-۳}+\frac{B}{x(۳-x)}=\frac{A}{x-۳}+\frac{B}{-x(x-۳)}$$

$$=\frac{-Ax+B}{-x(x-۳)}$$

حالا با توجه به تساوی داریم:

$$\frac{-Ax+B}{-x(x-۳)}=\frac{x+۵}{x}\Rightarrow\frac{-Ax+B}{-(x-۳)}=x+۵$$

طرفین‌وسطین می‌کنیم و داریم:

$$-Ax+B=-(x+۵)(x-۳)$$

$$\Rightarrow -Ax+B=-(x^۲+۲x-۱۵)$$

$$\Rightarrow -Ax+B=-x^۲-۲x+۱۵$$

می‌دانیم B یک عدد است پس از متحد قراردادن صورت‌ها داریم: $-Ax=-x^۲-۲x$ و $B=۱۵$. بنابراین:

$$\begin{cases}-Ax=-x^۲-۲x\Rightarrow -Ax=-x(x+۲)\Rightarrow A=x+۲\\B=۱۵\end{cases}$$

پس $A-B$ برابر است با: $A-B=x+۲-۱۵=x-۱۳$

۲۱۹۹ سمت راست عبارت را تا حد امکان ساده می‌کنیم.

$$\frac{N_۱}{x-۱}+\frac{N_۲}{x-۲}=\frac{N_۱(x-۲)+N_۲(x-۱)}{(x-۱)(x-۲)}$$

$$=\frac{N_۱x-۲N_۱+N_۲x-N_۲}{x^۲-۳x+۲}=\frac{(N_۱+N_۲)x+(-۲N_۱-N_۲)}{x^۲-۳x+۲}$$

با توجه به تساوی داده‌شده داریم:

$$\frac{(N_۱+N_۲)x+(-۲N_۱-N_۲)}{x^۲-۳x+۲}=\frac{۳۵x-۲۹}{x^۲-۳x+۲}$$

$$\Rightarrow (N_۱+N_۲)x+(-۲N_۱-N_۲)=۳۵x-۲۹$$