

مقدمه مولفان

در این جلد سنگین (از نظر جرم، حجم و محتوا!) درس نامه‌ها و پاسخ تست‌های جلد سؤال رو آوردیم که ساختار و ویژگی‌هایش عبارت‌اند از:

- **درس‌نامه:** قبل از پاسخ تست‌های هر درس، اول درس‌نامه اون درس اومده. ما سعی کردیم فهمیدنی‌ترین و مفیدترین درس‌نامه‌های فیزیک رو بنویسیم. این درس‌نامه‌ها پر از تست‌های آموزشیه که خیلی باارزشن. بقیه ویژگی‌های درس‌نامه رو خودتون توی خود درس‌نامه‌ها ببینین. بهتون قول می‌دیم که اگه درس‌نامه‌ها رو خوب بخونید و یاد بگیرید، تست‌ها براتون خیلی آسون‌تر می‌شن. پس لطفاً خوندن درس‌نامه‌ها فراموش نشه.
- **و اما پاسخ‌های تشریحی:** برای خیلی از تست‌ها دو یا سه روش حل نوشتیم و تا جایی که امکانش بود روش‌های حل سریع معتبر و به‌دردبخور رو هم آوردیم. توصیه ما به شما اینه: حتماً پاسخ‌های خودتون رو با پاسخ‌های تشریحی ما چک کنید. اگه پاسخ‌های ما بهتر بود که بهترش رو یاد بگیرید. اگه پاسخ‌های شما بهتر بود به ما هم بگین تا ما پاسخ‌هامون رو بهتر کنیم. راستی تا یادمون نرفته یه خواهشی از شما داریم: از شما می‌خوایم که ایرادمون رو بهمون بگید. حتی اگه فکر می‌کنید ایراد کوچیکه بهمون بگید؛ همون جوری که یه دوست واقعی ایرادای دوستش رو می‌گه. دم همه شما گرم. براتون آرزوی کلی اتفاقای خوب و باحال داریم.

حرف آخر: یک مرد بزرگ گفت:

«ما با یکی از چغرف و بدبدن‌ترین حریفان عرصه تاریخ معاصر جهان مواجهیم! اما این نهایتاً بدان معنا است که ما کاری بسیار سخت و سترگ پیش رو داریم و نه بیشتر از این؛ بسیار سخت اما نه غیرممکن.»

پایدار باشید

Telegram:@Physics12om

Instagram:@Physics12om

دستون درد نكنه و از اين حرفا:

- خيلي ممنونيم از دكتر اميد و دكتر كميل نصرى و مهندس مهدى بقايى عزيز كه هر كدام به نوبه خود خيلي به موقع و به جا به ما شوک وارد كرديد و ما را از خواب غفلت رهانيدين!
- سپاس از خانم مليکا مهري كه مهرت از اندازه فزون است و وجودت رساننده اين كتاب. اميدواريم به هر چي مي خواهى برسى.
- امين امينى عزيز درود بر تو. رد چشمان تو در واژه واژه اين كتاب به جا مانده. الهى عاقبت به خير بشي جوان.
- درود و سپاس از كارشناسان خبره، آقاىان مجيد ساكى، سعيد فرهادى، على رضا گونه، حميد فدائى فرد، احسان حسينيان، امير عباسى منجزى و محمدرضا محمدى كه با نظرات گرانبهائشان در اين كتاب ما را يارى كردند.
- هم چنين سپاس ويژه از همكار دانشمند و بااخلاقمون جمال خم خاجى بزرگوار و درود و سپاس از ويراستاران دقيق و كاردرست، خانمها نرجس تيمناك، مريم گلى حسنلو، فريده قزوينى، زهرا دادخواه و سارا دانائى كجاني و آقاىان محمدرضا فضلى، مهدى لشگرى، محمد پوررضا، مهدى بابائى، احمد نعمتى، امير مقيم نژاد، بهزاد آزادفر، امير محمودى انزابى، امير محمد يوسفى، محمد احمدبيكى، على ونكى فراهانى، محمدجواد سورچى، اميرعلى فراهانى، اميد احسانى و محمد قريب كه در بهبود كيفيت علمى كتاب ما را يارى كردند.
- درود بى كران بر سهيل سمائى عزيز و بروبچه هاى توليد كه هميشه بيشترين همكارى رو با ما داشتند و سپاس از كاوه چمن كار و طراحان جلد باذوق و خلاق اين كتاب و هم چنين خانم لولاو مرادى كه براى به ثمر رسيدن جلد اين كتاب خيلي زحمت كشيدن.
- و يك تشكر ويژه از مهندس فرزاد وزيرى و همكاران پرتلاش چاپنده خيلى سبز و هم چنين دوست خوبمان ميثم درويش و تيم هميشه سرفراز فروش و خلاصه همه دست اندركاران توليد و پخش اين كتاب ...

فهرست

پاسخ

درسنامه

فصل اول

حرکت‌شناسی

۱۲	۸	بخش ۱: شناخت حرکت
۹۳	۸۹	بخش ۲: حرکت با سرعت ثابت
۱۱۶	۱۱۴	بخش ۳: حرکت راست خط شتاب ثابت

فصل دوم

دینامیک

۲۱۲	۲۱۲	بخش ۱: قانون‌های نیوتون در دینامیک
۲۴۰	۲۳۹	بخش ۲: نیروهای آشنا
۳۳۰	۳۲۷	بخش ۳: تکانه
۳۵۰	۳۴۸	بخش ۴: قانون گرانش عمومی

فصل سوم

نوسان و امواج

۳۵۹	۳۵۷	بخش ۱: آشنایی با حرکت‌های نوسانی ساده
۴۱۴	۴۱۱	بخش ۲: بررسی دو نوسانگر خاص
۴۳۶	۴۳۲	بخش ۳: انرژی نوسانگر ساده و پدیده تشدید
۴۶۱	۴۵۷	بخش ۴: آشنایی با موج‌ها
۴۹۸	۴۹۵	بخش ۵: موج‌های الکترومغناطیسی
۵۰۵	۵۰۳	بخش ۶: صوت
۵۲۵	۵۲۴	بخش ۷: بازتاب موج
۵۵۸	۵۵۷	بخش ۸: شکست موج

فصل چهارم

آشنایی با فیزیک اتمی و هسته‌ای

۵۹۴	۵۹۴	بخش ۱: آشنایی با فیزیک اتمی
۶۳۲	۶۲۹	بخش ۲: هسته و ویژگی‌های آن
۶۴۲	۶۳۹	بخش ۳: پرتوزایی و نیمه‌عمر

فصل اول حرکت شناسی



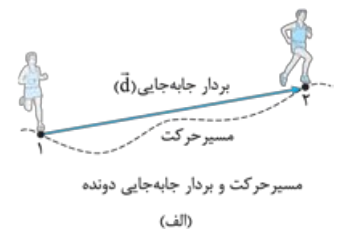
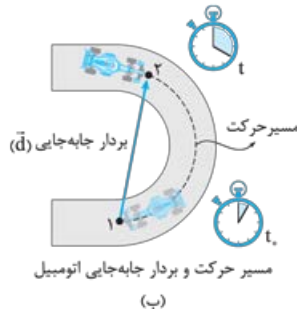
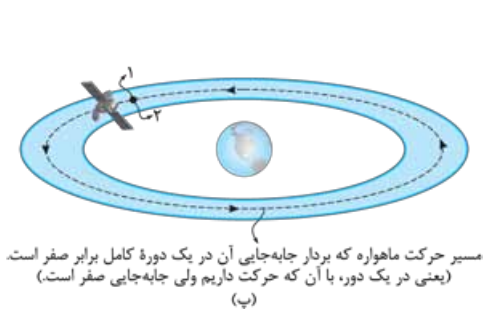
شناخت حرکت

درس اول جابه‌جایی و مسافت پیموده شده

وقتی می‌گوییم یک جسم حرکت کرده است، منظورمان این است که آن جسم در طی زمان، مسافتی را پیموده و احتمالاً جابه‌جا هم شده است. حالا پرا
احتمالاً! مگه می‌شه یک جسم راه بره ولی جابه‌جا نشه؟ جواب این سؤال را باید در تعریف جابه‌جایی جست‌وجو کنیم.

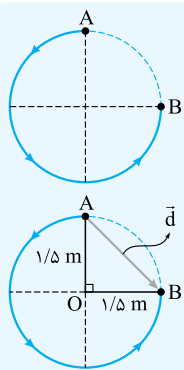
جابه‌جایی (تغییر مکان)

جابه‌جایی یا تغییر مکان، برداری است که از نقطه آغاز حرکت به نقطه پایان کشیده می‌شود. بردار جابه‌جایی را با \vec{d} نشان می‌دهیم. در شکل‌های (الف) و (ب)، مسیر حرکت و بردار جابه‌جایی متحرک را نشان داده‌ایم.



چند نکته ۱ جابه‌جایی یک کمیت برداری است. یعنی به‌جز اندازه، جهت هم دارد. در شکل‌های (الف) و (ب) جهت بردار جابه‌جایی را نشان داده‌ایم.

۲ جابه‌جایی بین دو نقطه معین اصلاً به مسیر حرکت ربطی ندارد و فقط نقطه ابتدا را به نقطه انتهای حرکت وصل می‌کند؛ یعنی چیزی که در جابه‌جایی برای ما اهمیت دارد نقطه اولیه و پایانی است. برای همین است که صفر شدن جابه‌جایی لزوماً به معنی بی‌حرکتی نیست! (شکل (ب))



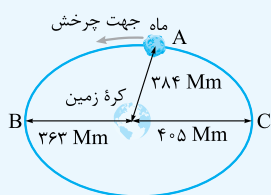
آست ۵ در شکل روبه‌رو متحرکی بر روی محیط دایره‌ای از مسیر نشان داده شده، از نقطه A به نقطه B می‌رود. اندازه جابه‌جایی متحرک چند متر است؟ (قطر دایره ۳ m است و $\pi = 3$)

(۱) $3\sqrt{2}$ (۲) $1/5\sqrt{2}$ (۳) $2/25$ (۴) $6/25$

پاسخ ۵ گفتیم جابه‌جایی ربطی به مسیر حرکت ندارد و برای رسم بردار جابه‌جایی کافی است مانند شکل روبه‌رو نقطه ابتدای حرکت (یعنی A) را به نقطه انتها (یعنی B) وصل کنید. در شکل روبه‌رو اندازه بردار \vec{d} برابر وتر مثلث OAB است:

$$d = \sqrt{(1/5)^2 + (1/5)^2} = 1/5\sqrt{2} \text{ m}$$

گاهی در صورت سؤال انتخاب نقطه‌های ابتدا و انتهای حرکت را بر عهده خودتان می‌گذارند. مثلاً وقتی می‌پرسند اندازه بزرگ‌ترین جابه‌جایی در طی مسیر چه قدر است، شما باید دو نقطه از مسیر را که بیشترین فاصله از هم دارند، به عنوان نقطه ابتدا و انتها انتخاب کنید. تست زیر را ببینید:



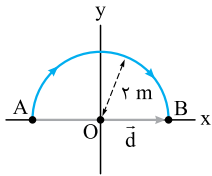
آست ۶ مطابق شکل، مدار چرخش ماه به دور زمین، یک بیضی است. با توجه به این شکل، اندازه بزرگ‌ترین جابه‌جایی که ماه نسبت به کره زمین در طول مسیر حرکتش دارد، چند مگامتر است؟

(۱) ۸۱۱ (۲) ۷۹۰ (۳) ۷۶۸ (۴) ۴۰۵

پاسخ ۶ واضح است که بزرگ‌ترین جابه‌جایی که ماه می‌تواند داشته باشد، از نقطه B تا C یا از نقطه C تا B است. پس قطر بزرگ بیضی (یعنی طول BC)، جواب این تست است:

$$BC = 363 + 405 = 768 \text{ Mm}$$

حواستون باشه در صورت تست گفتیم «جابه‌جایی ماه نسبت به کره زمین» یعنی کره زمین را مبدأ بگیرد و در نتیجه با حرکت ماه به خاطر چرخش زمین به دور خورشید کاری نداریم.



۳ بردار جابه‌جایی را مانند همه بردارها می‌توانید به صورت بردارهای یک‌هه هم بنویسید. مثلاً در شکل روبه‌رو متحرک بر روی مسیر نیم‌دایره از A تا B رفته است. همین‌طور که می‌بینید متحرک از A تا B، 4 m در جهت مثبت محور X جابه‌جا شده است؛ یعنی داریم:

$$\vec{d} = 4\vec{i}$$



آزمون ۱ طول عقربه دقیقه‌شمار یک ساعت دیواری، 18 cm است. بردار جابه‌جایی نوک عقربه دقیقه‌شمار، از ساعت $8:05$ تا ساعت $11:55$ در SI کدام است؟

(۱) $0.18\vec{i}$

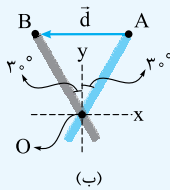
(۲) $-0.18\vec{i}$

(۳) $0.18\sqrt{3}\vec{i}$

(۴) $-0.18\sqrt{3}\vec{i}$



پاسخ ۲ گام اول: در شکل (الف) عقربه دقیقه‌شمار را در موقعیت $5'$ و $55'$ نشان داده‌ایم و در شکل (ب) بردار جابه‌جایی نوک این عقربه را از $5'$ تا $55'$ مشخص کرده‌ایم.



گام دوم: عقربه دقیقه‌شمار در هر 5 دقیقه زاویه بین دو عدد روی ساعت را طی می‌کند. می‌دانید که روی ساعت، 12 قسمت 5 دقیقه‌ای وجود دارد. پس زاویه‌ای که عقربه دقیقه‌شمار در هر 5 دقیقه طی می‌کند، برابر می‌شود با:

$$\alpha = \frac{\text{زاویه یک دور کامل}}{12} = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ = 3^\circ$$

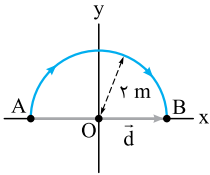
گام سوم: همین‌طور که در شکل ب می‌بینید، زاویه بین دو وضعیت عقربه دقیقه‌شمار از $5'$ تا $55'$

برابر 6° است. بنابراین مثلث OAB یک مثلث متساوی‌الاضلاع بوده و اندازه جابه‌جایی (طول ضلع AB) برابر طول عقربه دقیقه‌شمار (یعنی 18 cm) است.

$$\vec{d} = -(18\text{ cm})\vec{i} \xrightarrow{\text{در SI}} \vec{d} = -(0.18\text{ m})\vec{i}$$

با توجه به این‌که بردار جابه‌جایی (\vec{d}) در خلاف جهت محور X است، داریم:

مسافت پیموده‌شده (l) و مقایسه آن با جابه‌جایی (d)



به طول مسیری که متحرک می‌پیماید، مسافت می‌گوییم و آن را با حرف l نشان می‌دهیم. مثلاً در شکل روبه‌رو، متحرکی بر روی مسیر دایره‌ای شکل به شعاع 2 m حرکت می‌کند. اگر نقطه‌های (A) و (B) را ابتدا و انتهای حرکت در نظر بگیریم، مسیر حرکت یک نیم‌دایره است که طول آن برابر می‌شود با:

$$l = \frac{1}{2}(\text{محیط دایره}) = \frac{1}{2}(2\pi r) = \pi r = 3.14 \times 2 = 6.28\text{ m}$$

پس در این شکل طول مسیر حرکت یا مسافتی که این متحرک پیموده، برابر 6.28 m است، اما اندازه بردار جابه‌جایی (\vec{d}) برابر قطر دایره است. یعنی:

$$d = 2r = 2 \times 2 = 4\text{ m}$$

نتیجه این‌که «مسافت کاملاً به مسیر حرکت بستگی دارد ولی جابه‌جایی فقط به نقطه آغاز و پایان وابسته است.»

چند نکته ۱ جابه‌جایی یک کمیت برداری است (یعنی علاوه بر اندازه، جهت هم دارد)؛ اما مسافت یک کمیت زرده‌ای است و جهت ندارد.

۲ همیشه طول مسیر حرکت از طول پاره‌خطی که ابتدای مسیر را به انتهای آن وصل می‌کند، بزرگ‌تر یا مساوی با آن است. پس

می‌توانیم بگوییم: «همواره مسافت از اندازه جابه‌جایی بزرگ‌تر یا مساوی با آن است»

$$l \geq d$$

پرسش ۱ در چه صورتی مسافت طی‌شده توسط یک متحرک با اندازه جابه‌جایی آن برابر می‌شود؟

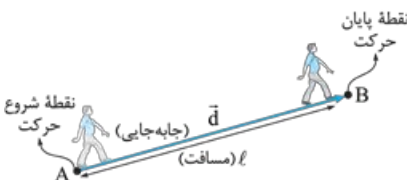
پاسخ ۱ برای آن‌که مسافت و اندازه جابه‌جایی برابر شود، دو شرط لازم است:

۱ مسیر حرکت مستقیم باشد.

۲ متحرک در طول مسیر تغییر جهت ندهد.

مثلاً در شکل روبه‌رو متحرک بدون این‌که تغییر جهت بدهد، بر روی خط راست از A تا B رفته است و

$$l = d$$



داریم:

تست ۱ سه متحرک طی مسیره‌های مختلف نشان داده شده در شکل روبه‌رو از نقطه A به نقطه B می‌روند. اختلاف مسافت طولانی‌ترین مسیر و کوتاه‌ترین مسیر و اندازه جابه‌جایی هر یک چند متر است؟ (مسیر (۱) یک ربع دایره است، $\sqrt{2} = 1/4$, $\pi = 3$)

(۱) $4/2, 1/8$
 (۲) $4/5, 1/8$
 (۳) $4/2, 0/5$
 (۴) $4/5, 0/5$

پاسخ ۱ گام اول: ابتدا مسافت طی شده در هر مسیر را حساب می‌کنیم:

مسیر ۱: متحرک (۱) مسیری به شکل ربع دایره را طی کرده است. با توجه به شکل، شعاع این دایره ۳ m است. مسافتی که متحرک (۱) طی کرده، برابر است با:

$$l_1 = \frac{1}{4} (\text{محیط دایره}) = \frac{\pi r}{2} = \frac{3 \times 3}{2} = 4/5 \text{ m}$$

مسیر ۲: متحرک (۲) پاره‌خط AB را طی کرده است، AB وتر مثلث ABC است، پس طبق رابطه فیثاغورس داریم:

$$l_2 = \overline{AB} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2} \text{ m} = 3 \times 1/4 = 4/2 \text{ m}$$

$$l_3 = \overline{AR} + \overline{RS} + \overline{ST} + \overline{TB} = 2 + 1 + 1 + 2 = 6 \text{ m}$$

مسیر ۳: متحرک (۳) هم مسافتی برابر با ۶ m را طی می‌کند، زیرا:

همین‌طور که می‌بینید طولانی‌ترین مسیر، مسیر (۳) و کوتاه‌ترین مسیر، مسیر (۲) است و اختلاف مسافت طولانی‌ترین و کوتاه‌ترین مسیر برابر می‌شود با:

$$l_3 - l_2 = 6 - 4/2 = 1/8 \text{ m}$$

گام دوم: و اما اندازه جابه‌جایی!

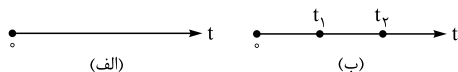
$$d_{AB} = \overline{AB} = 4/2 \text{ m}$$

اندازه جابه‌جایی هر سه مسیر برابر طول پاره‌خط AB (یعنی ۴/۲ m) است:

همین‌طور که می‌بینید در مسیر ۲، مسافت برابر اندازه جابه‌جایی است، اما در هر مسیری به جز این مسیر، مسافت از اندازه جابه‌جایی (یعنی ۴/۲ m) بزرگ‌تر است.

لحظه، بازه زمانی و نمایش آن‌ها بر روی محور زمان

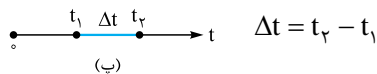
بالاخره هر تغییری، مدت زمانی طول می‌کشد. پس زمان، کمیت مهمی است. یکی از روش‌های نمایش زمان، رسم محور زمان است (شکل الف). جهت مثبت این محور، سپری شدن زمان را نشان می‌دهد.



نمایش لحظه بر روی محور زمان • یک لحظه را بر روی محور زمان با یک نقطه نشان می‌دهیم. در شکل (ب) لحظه‌های t_1 و t_2 را مشخص کرده‌ایم.

حواستون باشه! وقتی می‌گوییم $t_1 = 3 \text{ s}$ یعنی یک نقطه روی محور زمان که لفظ ۳ s رو نشون می‌ده. (نکنه فکر کنین $t_1 = 3 \text{ s}$ ، طول کشیده‌ها، در ضمن مبدأ زمان هم فوراً به لفظه است، لفظه $t_0 = 0$).

نمایش بازه زمانی بر روی محور زمان • فاصله زمانی بین دو لحظه را بازه زمانی می‌گوییم. بازه زمانی را با Δt نشان می‌دهیم.



مثلاً در شکل (ب)، Δt ، بازه زمانی بین دو لحظه t_1 و t_2 است و برابر است با:

نکته گاهی بازه زمانی t_1 تا t_2 را به صورت (t_1, t_2) هم نشان می‌دهیم. مثلاً وقتی می‌گوییم $(3 \text{ s}, 19 \text{ s})$ یعنی بازه زمانی $t_1 = 3 \text{ s}$ تا $t_2 = 19 \text{ s}$.

حواستون باشه! زمان هرگز به عقب برنمی‌گرده. پس همیشه بازه زمانی، عددی مثبت، $\Delta t > 0$.

مفهوم لحظه • گفتیم «لحظه» را بر روی محور t با یک نقطه نشان می‌دهیم. در واقع لحظه، یک بازه زمانی خیلی خیلی کوچک (به اندازه یک نقطه روی محور t) است.

نکته همین‌طور که می‌دانید، ثانیه (s) یکای زمان در SI است. میلی‌ثانیه (ms)، دقیقه (min)، ساعت (h)، روز (day) و ... یکاهای دیگر زمان هستند.

$$1 \text{ min} = 60 \text{ s} ; 1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$$

حواستون باشه! سال نوری واحد طول نه واحد زمان! (سال نوری مسافتی که نور در مدت ۱ سال در خلأ طی پیماید).

آشنایی با اصطلاحات زمان و جدول اصطلاحات زمان

در تست‌های کنکور با بعضی از اصطلاحات زمانی روبه‌رو می‌شویم، مثل لحظه $t = 3s$ ، ثانیه سوم، ۳ ثانیه اول یا ابتدای ۳ ثانیه سوم که همه این‌ها با هم فرق دارند و حل تست وابسته به دانستن مفهوم این اصطلاحات است. در جدول زیر در هر ستون یکی از این اصطلاحات را معرفی کرده‌ایم:

اصطلاح	توضیح	نمایش بر روی محور زمان	مثال
لحظه $t = n(s)$	یک نقطه بر روی محور زمان است و اصلاً طول نمی‌کشد.		لحظه $t = 2s$ یک نقطه بر روی محور t است.
ثانیه nام	به بازه زمانی $t_1 = (n-1)s$ تا $t_2 = ns$ می‌گوییم ثانیه n ام. ثانیه n ام، $1s$ طول می‌کشد.		ثانیه دوم یعنی بازه $t = 1s$ تا $t = 2s$
T ثانیه nام	به بازه زمانی $t_1 = (n-1)Ts$ تا $t_2 = nTs$ می‌گوییم T ثانیه n ام. T ثانیه n ام، T ثانیه طول می‌کشد.		۳ ثانیه دوم یعنی بازه $t = 3s$ تا $t = 6s$

نکته هر بازه زمانی محدود به دو لحظه ابتدا و انتهای آن است. مثلاً ابتدای ثانیه سوم، $t = 2s$ و انتهای آن $t = 3s$ است. یا ابتدای ۳ ثانیه سوم، $t = 6s$ و انتهای آن $t = 9s$ است.

تکنیک برای آن‌که بتوانید سریع‌تر ابتدا و انتهای T ثانیه n ام را تشخیص دهید. اول n را در T ضرب کنید تا انتهای آن بازه معلوم شود و سپس از nT به اندازه T ثانیه کم کنید تا ابتدای بازه مشخص شود.

پس ۷ ثانیه چهارم از لحظه $t_1 = 28 - 7 = 21s$ شروع می‌شود و در لحظه $t_2 = 4 \times 7 = 28s$ لحظه انتهای بازه \rightarrow ۷ ثانیه چهارم

پس ۷ ثانیه چهارم از لحظه $t_1 = 21s$ شروع می‌شود و در لحظه $t_2 = 28s$ تمام می‌شود.

تست ۱ ثانیه پنجم در کدام یک از بازه‌های زمانی زیر قرار دارد؟

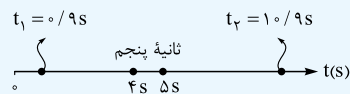
الف) $t = 5s$ (الف) و (ب) (پ) و (د) (ب) (الف) و (ت) (پ) ۳ ثانیه دوم (ب) ۲ ثانیه چهارم

ب) $(0/9s, 10/9s)$ (الف) و (ب) (پ) و (د) (ب) (الف) و (ت) (پ) ۳ ثانیه دوم (ب) ۲ ثانیه چهارم

پاسخ ۱ ثانیه پنجم یعنی بازه زمانی $t_1 = 4s$ تا $t_2 = 5s$. حالا حالت‌های (الف) تا (ت) را یکی یکی بررسی می‌کنیم: الف) لحظه $t = 5s$ فقط یک لحظه است و قبل و بعد ندارد. می‌دانید که ثانیه پنجم (که خودش یک بازه زمانی است) در یک لحظه نمی‌گنجد! *



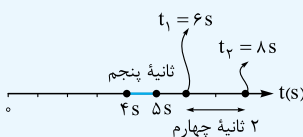
(الف)



(ب)



(پ)

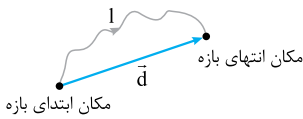


(ت)

ب) $(0/9s, 10/9s)$ یعنی بازه زمانی $t_1 = 0/9s$ تا $t_2 = 10/9s$. همین‌طور که در شکل (ب) می‌بینید، ثانیه پنجم در بازه $(0/9s, 10/9s)$ قرار دارد. ✓

پ) ۳ ثانیه دوم یعنی بازه زمانی $t_1 = 3s$ تا $t_2 = 6s$. همین‌طور که در شکل (پ) می‌بینید ثانیه پنجم در ۳ ثانیه دوم قرار دارد. ✓

ت) ۲ ثانیه چهارم یعنی بازه زمانی $t_1 = 6s$ تا $t_2 = 8s$ و ثانیه پنجم در این بازه قرار ندارد. (شکل (ت)) *



۱. گزینه ۴ مطابق شکل، مسافت طی شده، طول مسیری است که متحرک طی کرده است؛ اما جابه‌جایی، برداری است که مکان ابتدای حرکت را به مکان انتهایی آن وصل می‌کند.

برای همین هیچ‌وقت مسافت طی شده متحرک در یک بازه زمانی مشخص، کوچک‌تر از اندازه جابه‌جایی‌اش نخواهد بود. به زبان ریاضی:

اندازه جابه‌جایی \geq مسافت طی شده

اصلاح سایر گزینه‌ها:

۱ بردار جابه‌جایی متحرک در یک بازه زمانی، برداری است که مکان متحرک در ~~انتهای~~ بازه را به مکان آن در ~~ابتدای~~ بازه وصل می‌کند.

۲ مسافت طی شده و ~~جابه‌جایی متحرک~~، کمیت‌هایی نرده‌ای هستند.

(جابه‌جایی کمیتی جهت‌دار و برداری است.)

۳ در یک حرکت، مسافت طی شده و ~~جابه‌جایی متحرک~~ به مسیر حرکت وابسته است.

(جابه‌جایی بین دو نقطه، مستقل از مسیر حرکت است و فقط به مکان ابتدایی و انتهایی بستگی دارد.)

۲. گزینه ۴ اگر راستای حرکت و جهت آن تغییری نکند، مسافت طی شده توسط متحرک با اندازه جابه‌جایی‌اش برابر می‌شود؛ با این حساب فقط در شکل (ت) مسافت و اندازه جابه‌جایی متحرک برابر خواهد بود، چراکه نه راستای حرکت تغییری کرده، نه جهت آن!

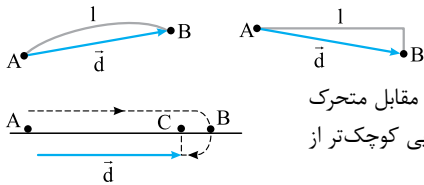
حواستون باشه! در شکل (ب) با آن که راستای حرکت (مسیر) یک خط راست است و تغییری نکرده، اما جهت حرکت متحرک روی آن تغییر کرده، به خاطر همین اندازه جابه‌جایی با مسافت طی شده آن یکی نیست!

۳. گزینه ۱ عبارت‌ها را تک‌تک بررسی می‌کنیم:

(الف) در حرکت رفت و برگشت کامل، مکان ابتدا و انتهای حرکت یکی است، پس اندازه جابه‌جایی صفر می‌شود. *

(ب) در این حالت طول پاره‌خطی که نقطه ابتدا و انتهای حرکت را به هم وصل می‌کند، حتماً از طول مسیر حرکت متحرک کوچک‌تر است! پس حتماً اندازه جابه‌جایی متحرک از مسافت طی شده توسط آن کوچک‌تر است. ✓

و برای درک بهتر:

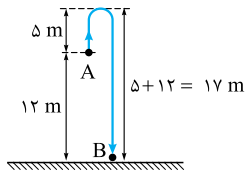


(پ) در این حالت هم اگر تغییر جهت داشته باشیم، مسافت و اندازه جابه‌جایی با هم برابر نمی‌شوند. مثلاً در شکل مقابل متحرک روی خط راست از نقطه A تا B می‌رود و سپس به نقطه C باز می‌گردد. اما همان‌طور که پیداست، اندازه جابه‌جایی کوچک‌تر از مسافت طی شده است. *

(ت) جابه‌جایی یک کمیت برداری است، برای همین علاوه بر اندازه (فاصله مکان آغازین و پایانی)، جهت هم دارد. *

۴. گزینه ۳ مطابق شکل، توپ از نقطه A حرکت کرده و در نهایت به نقطه B رسیده است؛ پس اندازه جابه‌جایی آن ۱۲ m می‌شود، اما در مورد مسافت قضیه فرق می‌کند. مطابق شکل توپ ۵ m بالا می‌رود و ۱۷ m پایین می‌آید؛ بنابراین:

$$\text{مسافت پیموده شده} = ۵ + (۵ + ۱۲) = ۲۲ \text{ m}$$

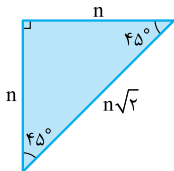


۵. گزینه ۳ با توجه به شکل اندازه جابه‌جایی متحرک برابر قطر مربع و مسافت طی شده، ۲ برابر ضلع مربع است. یعنی مسافت طی شده برابر با $۲x$ (m) است؛ حالا کافی است به کمک قضیه فیثاغورس X را حساب کنیم و دو برابر آن را مساوی مسافت قرار دهیم:

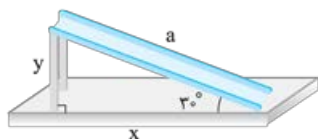
$$d = ۴ = \sqrt{x^2 + x^2} \Rightarrow ۴ = \sqrt{۲x^2} \Rightarrow ۱۶ = ۲x^2 \Rightarrow x^2 = ۸ \Rightarrow x = ۲\sqrt{۲} \text{ m} \Rightarrow l = ۲x = ۴\sqrt{۲} \text{ m}$$

تکنیک مانند شکل روبه‌رو مسیر حرکت و جابه‌جایی آن یک مثلث $۴۵^\circ - ۴۵^\circ$ تشکیل می‌دهد. بنابراین داریم:

$$n\sqrt{۲} = ۴ \Rightarrow n = \frac{۴}{\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow l = ۲n = ۴\sqrt{۲} \text{ m}$$



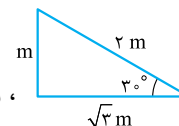
۶. گزینه ۱ مطابق شکل مسافت طی شده توسط کودک برابر $y + a$ و اندازه جابه‌جایی آن برابر X است. حالا برای آن که نسبت اندازه جابه‌جایی به مسافت طی شده توسط این کودک را حساب کنیم، کافی است کمی روابط مثلثاتی بلد باشیم:

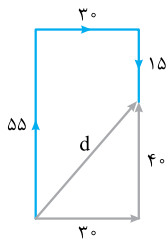
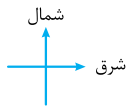


$$\frac{d}{l} = \frac{x}{y+a} \xrightarrow{\substack{x=a \cos 30^\circ \\ y=a \sin 30^\circ}} \frac{d}{l} = \frac{a \cos 30^\circ}{\frac{a \sin 30^\circ + a}{a(\sin 30^\circ + 1)}} = \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ + 1} \Rightarrow \frac{d}{l} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{d}{l} = \frac{\sqrt{3} \text{ m}}{m + ۲m} = \frac{\sqrt{3}}{۳}$$

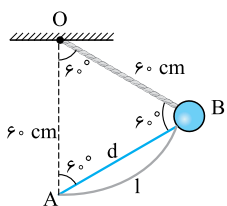
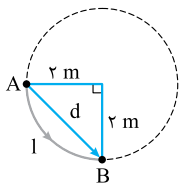
تکنیک با الگوی مثلث ۳۰° ، روبه‌رو هستیم؛ بنابراین:





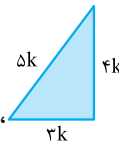
$$3k = 30 \Rightarrow d = \Delta k = 50 \text{ m}$$

$$l = 55 + 30 + 15 = 100 \text{ m} \Rightarrow \frac{l}{d} = \frac{100}{50} = 2$$



۷. **گزینه ۴** گام اول: رسم یک شکل خوب، کمک زیادی به حل این مسئله می‌کند. مطابق شکل خودرو ۵۵ m در جهت شمال و ۱۵ m در جهت جنوب حرکت کرده، پس در مجموع ۴۰ m در جهت شمال حرکت کرده و ۳۰ m در جهت شرق! بنابراین اندازه جابه‌جایی خودرو برابر است با:

$$d = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ m}$$



تکلیک با توجه به شکل، این‌جا با الگوی مثلث روبرو هستیم؛ بنابراین:

گام دوم: حالا مسافت طی‌شده و سپس نسبت مسافت به اندازه جابه‌جایی را حساب می‌کنیم:

۸. **گزینه ۱** مسافت پیموده‌شده؛ برابر طول کمان AB است. مطابق شکل، این مسیر ربع دایره‌ای به شعاع ۲ m است:

$$l = \widehat{AB} = \frac{\text{محیط دایره}}{4} = \frac{2\pi R}{4} = \frac{2\pi(2)}{4} = \pi \text{ m}$$

اندازه جابه‌جایی: برابر طول برداری است که A را به B وصل می‌کند. همان‌طور که در شکل روبرو می‌بینید، این بردار وتر

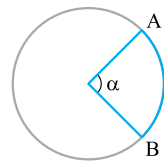
$$d = \widehat{AB} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \text{ m}$$

مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین با ساق‌هایی به طول ۲ m است:

۹. **گزینه ۲** گام اول: ابتدا مسافت طی‌شده و اندازه جابه‌جایی را باید حساب کنیم:

محاسبه مسافت طی‌شده: برای محاسبه مسافت طی‌شده، باید بینیم کمان ۶۰ درجه‌ای چه کسری از کل محیط دایره است:

$$l = \frac{\frac{1}{6}}{360} \times 2\pi R = \frac{\pi R}{3} = \frac{3/14 \times 60}{3} = 62/8 \text{ cm}$$



یادآوری برای محاسبه طول یک کمان در دایره، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{طول کمان} = \widehat{AB} = \frac{\alpha}{360} \times \text{محیط دایره}$$

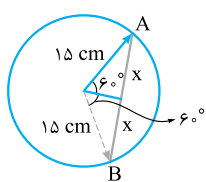
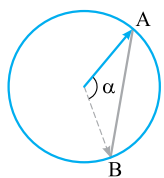
$$\frac{\widehat{AB} \text{ طول کمان}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\alpha}{360}$$

این رابطه به ما می‌گوید که کمان مورد نظر چه کسری از محیط دایره است:

محاسبه اندازه جابه‌جایی: با توجه به شکل از آن‌جا که $OA = OB$ و زاویه رأس آن 60° است؛ طول جابه‌جایی (AB) یکی از ضلع‌های مثلث متساوی‌الاضلاع 60° سانتی‌متری است؛ یعنی:

$$d = AB = 60 \text{ cm}$$

$$l - d = 62/8 - 60 = 2/8 \text{ cm}$$



گام دوم: حالا اختلاف این دو مقدار جواب تست را مشخص می‌کند:

۱۰. **گزینه ۳** گام اول: ابتدا با توجه به مسافت طی‌شده، باید بفهمیم چه کسری (چند درجه) از محیط دایره طی شده است. برای این کار محیط دایره را حساب می‌کنیم تا مقدار α را پیدا کنیم:

$$\text{محیط دایره} = 2\pi R = 2\pi \times 15 = 30\pi \Rightarrow \frac{\widehat{AB}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\alpha}{360} \Rightarrow \frac{10\pi}{30\pi} = \frac{\alpha}{360} \Rightarrow \alpha = 120^\circ$$

گام دوم: حالا باید اندازه پاره‌خط AB را حساب کنیم تا اندازه جابه‌جایی معلوم شود. برای این کار مطابق شکل نیمساز زاویه α را رسم می‌کنیم تا دو مثلث قائم‌الزاویه به دست آمده، اندازه X و سپس $2x$ (AB) را محاسبه کنیم:

$$\sin 60^\circ = \frac{x}{15} \Rightarrow x = 15 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15 \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = 2x = 2 \times 15 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3} \text{ cm}$$

۱۱. **گزینه ۲** از این‌که بیشینه ارتفاع توپ بعد از هر بار برخورد به سطح زمین، ۶۰ درصد نسبت به حالت

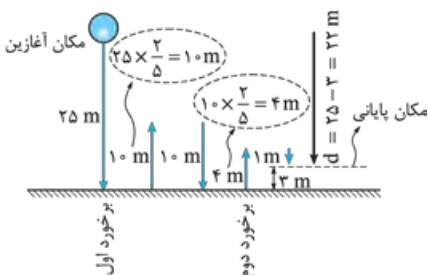
قبلش کم می‌شود می‌فهمیم که بیشینه ارتفاع توپ بعد از هر بار برخورد $\frac{2}{5}$ برابر (یا همان ۴۰ درصد) حالت قبلش است. پس برای آن‌که توپ مسافت ۵۰ m را طی کند باید مسیر شکل روبرو را بپیماید.

$$l = 50 \text{ m} = 25 + 10 + 10 + 4 + 1$$

همین‌طور که در شکل معلوم است، فاصله نهایی توپ از سطح زمین پس از طی مسافت ۵۰ m برابر ۳ m است. بنابراین جابه‌جایی از لحظه رها شدن توپ تا لحظه‌ای که توپ مسافت ۵۰ m را طی کرده برابر می‌شود با:

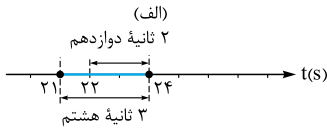
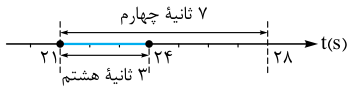
$$d = 25 - 3 = 22 \text{ m}$$

۱۲. **گزینه ۲** هفتمین نیم‌ثانیه یا نیم‌ثانیه هفتم می‌شود از $t_1 = (7-1) \times \frac{\circ}{5} S$ تا $t_2 = 7 \times \frac{\circ}{5} S$ ؛ یعنی بازه زمانی (۳ s, ۳/۵ s)

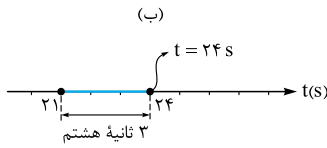


۱۳. گزینه ۱. ۳ ثانیه هشتم می شود بازه زمانی $t_1 = (8-1) \times 3 = 21$ s تا $t_2 = 8 \times 3 = 24$ s، حالا با توجه به این موضوع، بازه های زمانی «الف» تا «ت» را با ۳ ثانیه هشتم مقایسه می کنیم:

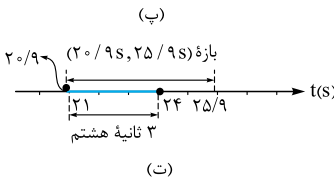
الف) ۷ ثانیه چهارم می شود بازه زمانی $t_1 = (4-1) \times 7 = 21$ s تا $t_2 = 4 \times 7 = 28$ s؛ همین طور که در شکل (الف) می بینید ۳ ثانیه هشتم در ۷ ثانیه چهارم قرار دارد. ✓



ب) ۲ ثانیه دوازدهم می شود بازه زمانی $t_1 = (12-1) \times 2 = 22$ s تا $t_2 = 12 \times 2 = 24$ s؛ در شکل (ب) نشان داده ایم که ۳ ثانیه هشتم از بازه ۲ ثانیه دوازدهم بزرگ تر است. (در کل هر ۳ ثانیه ای از هر ۲ ثانیه ای بزرگ تر است!) *



پ) فقط یک لحظه است و هیچ بازه زمانی ای در یک لحظه جا نمی شود! (شکل پ) *



ت) بازه زمانی $20/9$ s تا $25/9$ s را بر روی محور ببینید (شکل ت). ۳ ثانیه هشتم در داخل این بازه قرار دارد. ✓

درس دوم سرعت متوسط و تندی متوسط



در یک حرکت معین، جابه جایی و مسافت دو کمیتی است که هم زمان با هم ایجاد می شوند. اگر Δt زمان حرکت باشد، می توانیم با تقسیم جابه جایی و مسافت بر Δt به کمیت های جدیدی برسیم. اسم این کمیت ها به ترتیب «سرعت متوسط» و «تندی متوسط» است.

سرعت متوسط (\vec{v}_{av})

در یک حرکت، به نسبت جابه جایی (\vec{d}) به زمان حرکت (Δt)، سرعت متوسط (\vec{v}_{av}) می گوئیم:

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{\text{جابه جایی}}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t}$$

با توجه به رابطه بالا، یکای سرعت در SI، متر بر ثانیه (m/s) است.

در واقع سرعت متوسط، برداری است که جابه جایی متحرک در یکای زمان (مثلاً هر ثانیه) را به طور متوسط نشان می دهد. مثلاً اگر سرعت متوسط یک متحرک 2 m/s باشد، یعنی این متحرک به طور متوسط در هر ثانیه 2 m جابه جا می شود.

- چند نکته**
- سرعت متوسط یک کمیت برداری است، زیرا از حاصل ضرب $\frac{1}{\Delta t}$ در بردار جابه جایی (\vec{d}) به دست می آید. از آن جا که $\frac{1}{\Delta t}$ مقداری همواره مثبت است می توانیم بگوئیم، بردار سرعت متوسط همواره هم جهت با بردار جابه جایی است.
 - سرعت متوسط هم مثل جابه جایی اصلاً ربطی به مسیر حرکت ندارد و فقط به نقطه ابتدا و انتهای حرکت وابسته است. (یادمون نره بردار سرعت متوسط همیشه هم جهت با بردار جابه جاییه)

تندی متوسط (s_{av}) و مقایسه آن با سرعت متوسط (\vec{v}_{av})

تندی متوسط نسبت مسافتی که یک متحرک می پیماید به زمان حرکتش است و آن را با نماد s_{av} نشان می دهیم.

$$\text{تندی متوسط} = \frac{\text{مسافت}}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$$

بر اساس رابطه بالا، یکای تندی هم (مانند سرعت) در SI، متر بر ثانیه (m/s) است.

تندی متوسط به ما می گوید که متحرک به طور متوسط در یکای زمان (مثلاً هر ثانیه) چه مسافتی را می پیماید. مثلاً اگر تندی متحرکی $2/5 \text{ m/s}$ باشد، یعنی این متحرک به طور متوسط در هر ثانیه مسافت $2/5 \text{ m}$ را طی می کند.

۱ و ۲- av مخفف واژه «average» به معنی «متوسط» است. v هم مخفف واژه «velocity» به معنای «سرعت» است.
 ۳- s مخفف واژه «speed» به معنی «تندی» است.

چند نکته

بدانید و آگاه باشید که شباهت‌ها و تفاوت‌های سرعت متوسط و تندی متوسط مانند شباهت‌ها و تفاوت‌های جابه‌جایی و مسافت است. پس در تمام نکته‌های زیر این موضوع را فراموش نکنید:

۱) تندی متوسط مانند مسافت یک کمیت نرده‌ای است (برخلاف سرعت متوسط که مانند جابه‌جایی یک کمیت برداری و جهت‌دار است).
 ۲) همان‌طور که در یک حرکت مسافت همواره بزرگ‌تر یا مساوی تندی متوسط است، تندی متوسط هم همواره بزرگ‌تر یا مساوی

اندازه سرعت متوسط است. زیرا: $\frac{1}{\Delta t} \geq \frac{d}{\Delta t} \Rightarrow s_{av} \geq v_{av}$ دو طرف را بر Δt تقسیم می‌کنیم $1 \geq d$

۳) برای آن‌که در یک حرکت تندی متوسط برابر اندازه سرعت متوسط شود، دو شرط لازم است: (همون شرایطی که برای مسافت و جابه‌جایی هم داشتیم).
 شرط ۱: مسیر حرکت مستقیم باشد.
 شرط ۲: متحرک تغییر جهت ندهد.

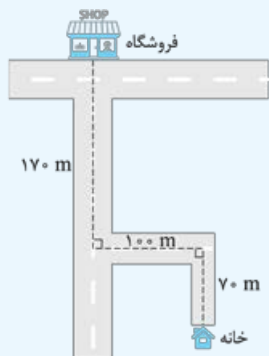
زیرا با وجود این دو شرط $l = d$ می‌شود و در نتیجه $\frac{1}{\Delta t}$ هم مساوی $\frac{d}{\Delta t}$ خواهد شد.

در جدول زیر سرعت متوسط و تندی متوسط را در یک نگاه با هم مقایسه کرده‌ایم.

رابطه	سرعت متوسط	تندی متوسط
	$\bar{v}_{av} = \frac{\bar{d}}{\Delta t}$	$s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$
یکا در SI	m / s	m / s
نوع کمیت	برداری (هم‌جهت با جابه‌جایی)	نرده‌ای
وابستگی به مسیر حرکت	مستقل از مسیر حرکت (به نقطه آغاز و پایان وابسته است).	وابسته به مسیر حرکت
مقایسه اندازه این دو کمیت	$s_{av} \geq v_{av}$ (اگر حرکت مستقیم و بدون تغییر جهت باشد، تندی متوسط برابر اندازه سرعت متوسط می‌شود).	

آزمون

شکل روبه‌رو موقعیت خانه و فروشگاه یک شخص را نشان می‌دهد. اگر این شخص در مدت ۸ min از روی مسیر مشخص‌شده در شکل از خانه به فروشگاه برود، تندی متوسط او چند متر بر ثانیه از اندازه سرعت متوسطش بیشتر است؟
 (برگرفته از کتاب درسی)



- ۱) $\frac{1}{6}$
- ۲) $\frac{1}{3}$
- ۳) ۱
- ۴) $\frac{1}{12}$

پاسخ

گام اول: با توجه به مسافتی که شخص برای رسیدن از خانه به فروشگاه می‌پیماید، تندی متوسط را به دست می‌آوریم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{70 + 100 + 170}{8 \times 60} = \frac{340}{8 \times 60} = \frac{17}{24} \text{ m/s}$$

گام دوم: برای محاسبه سرعت متوسط ابتدا باید جابه‌جایی را حساب کنیم.

همین‌طور که در شکل روبه‌رو می‌بینید، اندازه جابه‌جایی برابر وتر مثلث OAB است. پس داریم:

$$d = \sqrt{(100)^2 + (170 + 70)^2} = 260 \text{ m}$$

تکلیک اضلاع مثلث قائم‌الزاویه OAB مطابق با الگوی ۱۳n، ۱۲n، ۵n است. یعنی:

$$\begin{cases} OA = 5 \times 20 \\ OB = 12 \times 20 \end{cases} \Rightarrow d = AB = 13 \times 20 = 260 \text{ m}$$

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{260}{8 \times 60} = \frac{13}{24} \text{ m/s}$$

حالا اندازه سرعت متوسط را حساب می‌کنیم:

$$s_{av} - v_{av} = \frac{17}{24} - \frac{13}{24} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6} \text{ m/s}$$

گام سوم: روشن | اختلاف تندی متوسط و اندازه سرعت متوسط را می‌خواهیم:

روشن II | می‌توانید اول اختلاف مسافت و اندازه جابه‌جایی را به دست بیاورید و پس حاصل را بر زمان تقسیم کنید:

$$s_{av} - v_{av} = \frac{l - d}{\Delta t} = \frac{340 - 260}{8 \times 60} = \frac{1}{6} \text{ m/s}$$



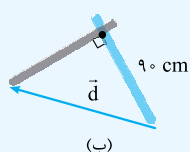
تست ۵ طول عقربه دقیقه‌شمار ساعت دیواری روبه‌رو ۹۰ cm است. در بازه زمانی ۹:۲۵ تا ۱۰:۴۰ تندی متوسط نوک عقربه دقیقه‌شمار چند متر بر ثانیه از اندازه سرعت متوسط آن بیشتر است؟ ($\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$, $\pi \approx 3$)

- (۱) 2×10^{-2}
- (۲) $1/22 \times 10^{-1}$
- (۳) 2×10^{-4}
- (۴) $1/22 \times 10^{-3}$

پاسخ ۴ گام اول: ابتدا باید بفهمیم که عقربه دقیقه‌شمار در بازه زمانی ۹:۲۵ تا ۱۰:۴۰ چه قدر پیشروی می‌کند. این بازه زمانی ۱ ساعت و ۱۵ دقیقه

طول می‌کشد. یعنی عقربه دقیقه‌شمار ۱ دور کامل و $\frac{1}{4}$ دور می‌زند. پس داریم:

$$l = (1 + \frac{1}{4})2\pi r = \frac{5}{4} \times 2 \times \pi \times 90 \xrightarrow{\pi=3} l = 675 \text{ cm}$$

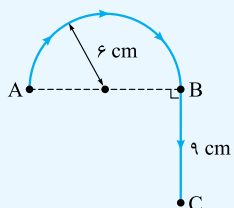


گام دوم: برای محاسبه جابه‌جایی، مهم نیست که عقربه چند دور چرخیده باشد! بلکه نقطه آغاز و پایان حرکت را باید در نظر بگیریم. مطابق شکل الف عقربه دقیقه‌شمار در ۹:۲۵ بر روی عدد ۵ و در ۱۰:۴۰ بر روی عدد ۸ قرار دارد. پس مطابق شکل (ب) زاویه بین دو وضعیت 90° است و جابه‌جایی نوک عقربه دقیقه‌شمار به این صورت حساب می‌شود:

$$d = \sqrt{90^2 + 90^2} = 90\sqrt{2} \xrightarrow{\sqrt{2}=1/\sqrt{2}} d = 90 \times 1/\sqrt{2} = 126 \text{ cm}$$

گام سوم: اختلاف تندی متوسط و اندازه سرعت متوسط را می‌خواهیم. پس داریم:

$$s_{av} - v_{av} = \frac{l - d}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t = 1 \text{ h}, 15 \text{ min} = 75 \times 60 \text{ s}} s_{av} - v_{av} = \frac{(675 - 126) \times 10^{-2}}{75 \times 60} = \frac{549 \times 10^{-2}}{75 \times 60} = \frac{549 \times 10^{-2}}{4500} = \frac{549}{450} \times 10^{-3} = 1/22 \times 10^{-3} \text{ m/s}$$



تست ۶ مطابق شکل روبه‌رو مورچه‌ای در مدت Δt ابتدا مسیر نیم‌دایره‌ای AB به شعاع ۶ cm و سپس در همان مدت مسیر مستقیم BC به طول ۹ cm را می‌پیماید. اگر تندی متوسط مورچه در مسیر نیم‌دایره ۳ cm/s باشد، تندی متوسط و اندازه سرعت متوسطش در کل مسیر به ترتیب از راست به چپ، چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟ ($\pi \approx 3$)

- (۱) $1/25 - 2/25$
- (۲) $2/25 - 1/25$
- (۳) $1/25 - 1/75$
- (۴) $1/75 - 2/25$

پاسخ ۱ گام اول: برای محاسبه Δt ، تندی متوسط در مسیر نیم‌دایره AB را داریم و مسافت طی شده در این مسیر (طول نیم‌دایره) را می‌توانیم حساب

$$l_{AB} = \frac{\text{محیط دایره}}{2} = \frac{2\pi r}{2} = \pi r = 3 \times 6 = 18 \text{ cm} \quad s_{av, AB} = \frac{l_{AB}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{l_{AB}}{s_{av, AB}} = \frac{18}{3} = 6 \text{ s}$$

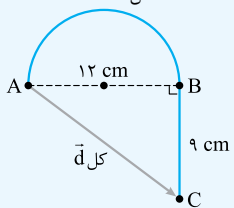
کنیم؛ یعنی:

گام دوم: صورت سؤال می‌گوید مورچه مسیر BC را هم در همین مدت (یعنی ۶ s) پیموده است. پس زمان کل حرکت $2\Delta t$ است و داریم:

$$s_{av, \text{کل}} = \frac{l_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}} = \frac{l_{AB} + l_{BC}}{2\Delta t} = \frac{18 + 9}{2 \times 6} = 2/25 \text{ cm/s}$$

(تا این‌جا یا ۱ درست است یا ۳)

گام سوم: برای محاسبه اندازه سرعت متوسط باید اندازه جابه‌جایی کل یعنی طول AC را داشته باشیم.



$$d = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15 \text{ cm}$$

$$v_{av, \text{کل}} = \frac{d_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}} = \frac{15}{12} = 1/25 \text{ cm/s}$$

با توجه به شکل داریم:

۱۴. گزینه ۱ عبارت‌ها را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

الف) درست؛ سرعت متوسط یک کمیت برداری است؛ یعنی جهت دارد. سرعت (چه متوسط و چه لحظه‌ای) جزء کمیت‌های فرعی است.

یادآوری کمیت‌های اصلی عبارت‌اند از: ۱- طول ۲- جرم ۳- زمان ۴- جریان الکتریکی ۵- دما ۶- مقدار ماده (mol) ۷- شدت روشنایی

(ب) نادرست؛ تندی متوسط یک کمیت نرده‌ای است؛ یعنی اصلاً جهت ندارد که بخواد با جابه‌جایی هم‌جهت باشد.

(پ) نادرست؛ سرعت متوسط نسبت جابه‌جایی به زمان جابه‌جایی است؛ نه نسبت مسافت به زمان!

(ت) نادرست؛ اگر متحرک روی همان خط راست تغییر جهت بدهد، اندازه سرعت متوسط با تندی متوسط برابر نمی‌شود.

۱۵. گزینه ۲ برای آن که اندازه سرعت متوسط متحرک با تندی متوسط آن در یک بازه زمانی برابر شود، باید متحرک روی خط راست حرکت کند و تغییر جهت هم ندهد.

شکل‌های (الف) و (ب) این ویژگی را دارند.

حواستون باشه در شکل (ب) متحرک روی خط راست حرکت کرده ولی تغییر جهت داده!

۱۶. گزینه ۴ از آنجا که نقطه شروع حرکت (نقطه A) و نقطه پایان حرکت (نقطه B) هر دو متحرک یکسان است، جابه‌جایی هر دو متحرک برابر است.

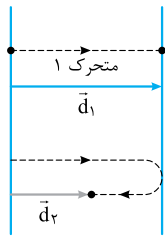
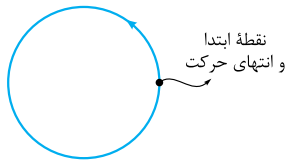
دلیل نادرستی سایر گزینه‌ها:

چون مسیر حرکت دو متحرک با هم فرق می‌کند، مسافت طی شده هم لزوماً برابر نیست. ضمناً چون اطلاعاتی از زمان حرکت دو متحرک نداریم، با وجود جابه‌جایی یکسان دو متحرک، نمی‌توانیم بگوییم سرعت متوسط آن‌ها الزاماً برابر است! در مورد تندی متوسط $(\frac{1}{\Delta t})$ هم نمی‌توانیم اظهار نظر قطعی کنیم، چون نه از طول مسیری چیزی می‌دانیم و نه از زمان حرکت دو متحرک.

۱۷. گزینه ۱ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱. وقتی تندی متوسط صفر است، یعنی مسافت طی شده توسط متحرک صفر است. یعنی متحرک اصلاً حرکت نکرده است. واضح است جابه‌جایی و سرعت متوسط متحرکی که حرکت نکند هم صفر است. ✓

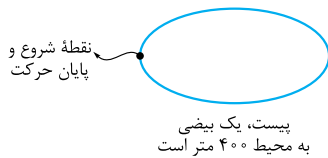
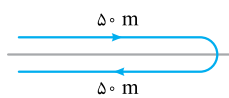
۲. متحرک می‌تواند مانند شکل روبه‌رو مسیری را طی کرده باشد و دوباره به مکان اولیه برگردد. در این حالت، سرعت متوسط صفر است ولی تندی متوسط صفر نیست. ✗



۳. برای رد این گزینه یک مثال نقض می‌زنیم. دو متحرک روبه‌رو را در نظر بگیرید. جابه‌جایی متحرک (۱) از جابه‌جایی متحرک (۲) بیشتر است. اما اگر این دو متحرک کل مسیر حرکتشان را در زمان‌های مساوی طی کنند، تندی متوسط متحرک (۲) بیشتر می‌شود. ✗

$$\begin{cases} \Delta t_1 = \Delta t_2 \\ l_1 < l_2 \end{cases} \Rightarrow s_{av,1} < s_{av,2}$$

۴. وقتی متحرک روی خط راست حرکت کند و تغییر جهت ندهد، تندی متوسط و اندازه سرعت متوسط برابر می‌شود. ✗



۱۸. گزینه ۳ چون تندی متوسط را می‌خواهیم، باید مسافت پیموده شده را تقسیم بر زمان طی مسافت کنیم. مطابق شکل، فلیس ۵۰ m می‌رود و هم برمی‌گردد؛ یعنی ۱۰۰ m را طی می‌کند، با این حساب:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{100}{50} = 2 \text{ m/s}$$

۱۹. گزینه ۴ با توجه به شکل روبه‌رو، رودیسا برای این که ۸۰۰ m را طی کند، ۲ بار بیضی را دور زده و به جای اول خودش برگشته است؛ پس جابه‌جایی رودیسا و سرعت متوسطش هم صفر می‌شود؛ به زبان ریاضی:

$$\Delta x = 0 \Rightarrow v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0}{100 \text{ s}} = 0$$

۲۰. گزینه ۴ گام اول: فرد مورد نظر در بازه (۲ s, ۱۶ s) از A تا B به اندازه ۱۰ m و از B تا C به اندازه ۴ m را طی می‌کند؛ پس تندی متوسط آن برابر است با:

$$l_{AC} = 10 + 4 = 14 \text{ m} \Rightarrow s_{av,AC} = \frac{l_{AC}}{\Delta t} = \frac{14}{16-2} = \frac{14}{14} = 1 \text{ m/s}$$

گام دوم: در مسیر A تا B، جابه‌جایی برابر ۱۰ m است؛ با این حساب سرعت متوسط در بازه زمانی (۲ s, ۱۲ s) برابر است با:

$$v_{av,AB} = \frac{d_{AB}}{\Delta t'} = \frac{10}{12-2} = \frac{10}{10} = 1 \text{ m/s}$$

گام سوم: چون $s_{av,AC} = v_{av,AB}$ است، نسبت $\frac{s_{av,AC}}{v_{av,AB}}$ برابر ۱ می‌شود.

۲۱. گزینه ۴ به کمک شکل روبه‌رو و با توجه به این که $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3 = \Delta t_4$ است، به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

اندازه جابه‌جایی هر سه متحرک با هم برابر است، ولی جهت بردار \vec{d}_4 در خلاف جهت بردارهای دیگر است.

$$\vec{d}_1 = \vec{d}_2 = \vec{d}_3 = -\vec{d}_4 \Rightarrow d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = L' \Rightarrow \frac{d_1}{\Delta t_1} = \frac{d_2}{\Delta t_2} = \frac{d_3}{\Delta t_3} = \frac{d_4}{\Delta t_4} \Rightarrow v_{av,1} = v_{av,2} = v_{av,3} = v_{av,4}$$

پس ۱ و ۳ درست هستند.

در شکل کاملاً مشخص است که $l_3 = L'$ و $l_4 = 3L'$ اما در مورد متحرک (۴) باید دقت کنیم که متحرک مسافتی بیش از $3L'$ را طی کرده است؛ یعنی:

با توجه به این موضوع می‌توانیم بفهمیم که $l_4 < l_3 < l_1 = l_2$ است و ۴ نادرست است. با این حال به سراغ ۲ هم می‌رویم. می‌دانیم که زمان‌های حرکت با هم برابر و مثبت است؛ پس:

$$l_4 > l_1 = l_2 > l_3 \xrightarrow{\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3 = \Delta t_4} \frac{l_4}{\Delta t_4} > \frac{l_1}{\Delta t_1} = \frac{l_2}{\Delta t_2} > \frac{l_3}{\Delta t_3} \Rightarrow s_{av,4} > s_{av,1} = s_{av,2} > s_{av,3}$$

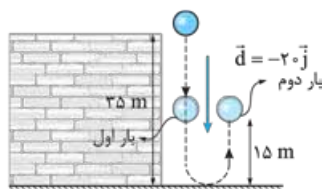
۲۲. گزینه ۳ گام اول: مطابق شکل توپ ابتدا ۳۵ m به سمت پایین و سپس ۱۵ m به سمت بالا حرکت کرده است؛ بنابراین اندازه جابه‌جایی (d) و مسافت طی شده

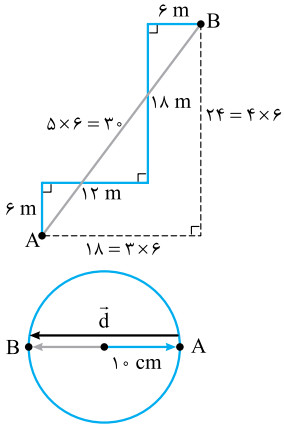
$$d = 20 \text{ m}, l = 35 + 15 = 50 \text{ m}$$

توسط آن برابر است با:

گام دوم: با توجه به این که $s_{av} = \frac{d}{\Delta t}$ و $v_{av} = \frac{d}{\Delta t}$ است، نسبت $\frac{s_{av}}{v_{av}}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{s_{av}}{v_{av}} = \frac{\frac{l}{\Delta t}}{\frac{d}{\Delta t}} = \frac{l}{d} = \frac{50}{20} = \frac{5}{2}$$





۲۳. گزینه ۳ گام اول: برای محاسبهٔ تندی کافی است طول‌ها را با هم جمع کنیم تا مسافت به دست آید و این مقدار را بر زمان طی مسافت تقسیم کنیم:

$$s_{av} = \frac{6+12+18+6}{10} = \frac{42}{10} = 4.2 \text{ m/s} = 4.2 \times 3.6 \text{ km/h} = 15.12 \text{ km/h}$$

گام دوم: برای محاسبهٔ اندازهٔ سرعت متوسط باید اندازهٔ جابه‌جایی را حساب کنیم برای این کار مطابق شکل طول AB را محاسبه و سپس در رابطهٔ سرعت متوسط قرار می‌دهیم:

$$AB = \sqrt{18^2 + 24^2} = 30 \text{ m}$$

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{30}{10} = 3 \text{ m/s} = 3 \times 3.6 \text{ km/h} = 10.8 \text{ km/h}$$

۲۴. گزینه ۴ برای محاسبهٔ سرعت متوسط، باید اندازهٔ جابه‌جایی و زمان آن را بدانیم. مطابق شکل نوک عقربهٔ دقیقه‌شمار از نقطهٔ A، (۳:۱۵) به نقطهٔ B، (۳:۴۵) رفته است؛ بنابراین:

$$\begin{cases} d = 2 \times 10 = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m} \\ \Delta t = 45 - 15 = 30 \text{ min} = 0.5 \text{ h} \end{cases} \Rightarrow v_{av} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{0.2}{0.5} = 0.4 \text{ m/h}$$

۲۵. گزینه ۴ گام اول: بازهٔ زمانی ۳:۱۰ تا ۴:۲۵ به اندازهٔ ۱ ساعت و ۱۵ دقیقه طول می‌کشد. یعنی عقربهٔ دقیقه‌شمار، ۱ دور کامل و $\frac{1}{4}$ دور می‌زند. پس مسافتی که نوک این عقربه می‌پیماید، برابر است با:

$$l = 2\pi r + \frac{1}{4}(2\pi r) = \frac{5}{4}(2\pi r) = \frac{5}{4} \times 2 \times \pi \times 36 = 90\pi \text{ cm}$$

گام دوم: حالا با داشتن مسافت و زمان حرکت، می‌توانیم تندی متوسط را حساب کنیم: $s_{av} = \frac{90\pi}{75 \times 60} = 0.02\pi \text{ cm/s}$

تکلیک از آن‌جایی که عقربه‌های ساعت به طور یکنواخت حرکت می‌کنند، تندی متوسط نوک عقربهٔ دقیقه‌شمار در هر بازهٔ زمانی دلخواه یکسان است (البته عقربه‌های ثانیه‌شمار و ساعت‌شمار هم همین‌طور هستند). پس می‌توانیم به جای تندی متوسط در تست، تندی متوسط

در مدت ۱h (یعنی یک دور چرخیدن عقربهٔ دقیقه‌شمار) را حساب کنیم: $s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{90\pi}{60 \times 60} = 0.02\pi \text{ cm/s}$

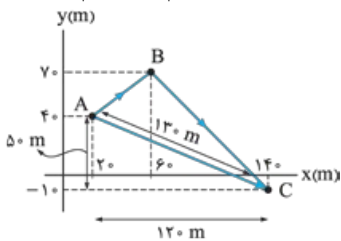
۲۶. گزینه ۱ با توجه به شکل عبارت‌ها را به ترتیب بررسی می‌کنیم: الف) مسافت طی شدهٔ متحرک در ۲ ثانیهٔ اول برابر مسافت طی شده در ۲ ثانیهٔ دوم است؛ پس تندی متوسط آن در ۲ ثانیهٔ اول با ۲ ثانیهٔ دوم برابر است. ✓

ب) با این‌که اندازهٔ جابه‌جایی ۲ ثانیهٔ اول (AB) با اندازهٔ جابه‌جایی ۲ ثانیهٔ دوم (BC) برابر است؛ اما چون جهت‌های متفاوتی دارند؛ سرعت متوسطشان برابر نخواهد بود. ✗

پ) در ۴ ثانیهٔ اول، متحرک از نقطهٔ A به نقطهٔ C می‌رود؛ بنابراین اندازهٔ سرعت متوسط آن برابر است با:

ت) برای محاسبهٔ تندی متوسط باید مسافت طی شده از نقطهٔ A تا C را حساب کنیم؛ از شکل پیداست که این مسافت، نصف محیط دایره است؛ یعنی:

$$s_{av} = \frac{\pi r}{4} = \frac{2 \times 3 / 14}{4} = 1 / 57 \text{ m/s} \times$$

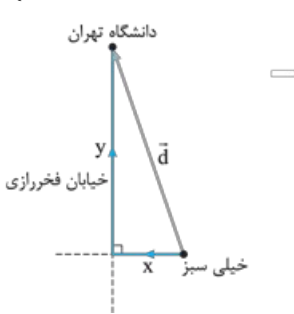


۲۷. گزینه ۴ محاسبهٔ سرعت متوسط: مطابق شکل مقابل نقطهٔ A را به C وصل می‌کنیم و جابه‌جایی را به کمک رابطهٔ فیثاغورس حساب می‌کنیم، سپس مقدار جابه‌جایی را تقسیم بر زمان می‌کنیم تا اندازهٔ سرعت متوسط به دست آید:

$$d = |AC| = \sqrt{50^2 + 120^2} = 130 \text{ m} \Rightarrow v_{av} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{130}{10} = 13 \text{ m/s}$$

محاسبهٔ تندی متوسط: برای به دست آوردن تندی متوسط، باید مسافت طی شده را حساب کنیم. برای به دست آوردن مسافت باید مطابق شکل طول‌های AB و BC را به دست آوریم:

$$\begin{cases} AB = \sqrt{(60-20)^2 + (70-40)^2} = \sqrt{1600+900} = \sqrt{2500} = 50 \text{ m} \\ BC = \sqrt{(140-60)^2 + (70-(-10))^2} = \sqrt{2 \times 80^2} = 80\sqrt{2} = 112 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow s_{av} = \frac{\text{مسافت طی شده}}{\text{زمان}} = \frac{50+112}{10} = \frac{162}{10} = 16.2 \text{ m/s}$$



۲۸. گزینه ۲ گام اول: مسیر حرکت مانند شکل روبه‌رو دو پاره‌خط عمود بر هم به طول‌های X و Y است. ما در این تست مقدار X را می‌خواهیم برای محاسبهٔ مقدار X در اولین قدم اندازهٔ d را به دست می‌آوریم:

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t = 5 \text{ min}} \frac{\sqrt{10}}{3} = \frac{d}{5 \times 60} \Rightarrow d = 100\sqrt{10} \text{ m}$$

گام دوم: از رابطهٔ فیثاغورس می‌دانیم $x^2 + y^2 = d^2$ است؛ پس:

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = (400)^2 = 160000 \text{ داریم، } x+y = 400 \text{ است، پس:}$$

$$(x^2 + y^2 + 2xy) - (x^2 + y^2) = 160000 - 100000 = 60000 \Rightarrow 2xy = 60000 \Rightarrow y = \frac{30000}{x}$$

گام چهارم: حالا مقدار $y = \frac{30000}{x}$ را در $x+y = 400$ قرار می‌دهیم و X را حساب می‌کنیم:

$$x + \frac{30000}{x} = 400 \Rightarrow x^2 - 400x + 30000 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 100 \text{ m} \\ x_2 = 300 \text{ m} \end{cases}$$

در واقع x_1 و x_2 همان X و Y در شکل بالا هستند، پس، باید مقدار کوچک‌تر یعنی x_1 را انتخاب کنیم.

گام اول: از تندی متوسط در ۴ ثانیه اول (۰, ۴ s) و ۲ ثانیه سوم (۴ s, ۶ s)، می توان مسافت طی شده در بازه زمانی (۰, ۶ s) را فهمید:

$$\left. \begin{aligned} s_{av(0,4)} &= \frac{l_{(0,4)}}{4-0} \Rightarrow 4 = \frac{l_{(0,4)}}{4} \Rightarrow l_{(0,4)} = 16 \text{ m} \\ s_{av(4,6)} &= \frac{l_{(4,6)}}{6-4} \Rightarrow 7 = \frac{l_{(4,6)}}{2} \Rightarrow l_{(4,6)} = 14 \text{ m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow l_{(0,6)} = l_{(0,4)} + l_{(4,6)} = 16 + 14 = 30 \text{ m}$$

گام دوم: حالا که مسافت طی شده در بازه زمانی (۰, ۶ s) را می دانیم، تندی متوسط آن هم به راحتی حساب می شود.

$$s_{av(0,6)} = \frac{l_{(0,6)}}{6-0} = \frac{30}{6} = 5 \text{ m/s}$$

گام اول: زمان طی مسافت را برای هر قسمت به دست می آوریم:

$$\Delta t_1 = \frac{l}{s_{av,1}} = \frac{16 \text{ m}}{4 \text{ m/s}} = 4 \text{ s}$$

$$\Delta t_2 = \frac{l}{s_{av,2}} = \frac{14 \text{ m}}{7 \text{ m/s}} = 2 \text{ s}$$

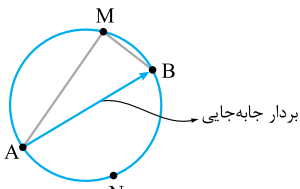
گام دوم: تندی متوسط کل حرکت برابر با مسافت طی شده در رفت و برگشت تقسیم بر زمان کل است:

$$s_{av, \text{کل}} = \frac{\text{مسافت پیموده شده کل}}{\text{زمان کل}} = \frac{30 \text{ m} \times 2}{4 \text{ s} + 2 \text{ s}} = 20 \text{ m/s}$$

گزینه ۲: با توجه به مقدار تندی متوسط در حرکت رفت و برگشت و اختلاف زمان رفت و برگشت، یک معادله می نویسیم تا فاصله بین دو شهر معلوم شود. (برای تسریع در محاسبات، سرعت ها را بر حسب کیلومتر بر ساعت و زمان را بر حسب ساعت قرار می دهیم.)

$$\Delta t_2 - \Delta t_1 = \frac{36}{60} \text{ h} \xrightarrow{\Delta t = \frac{l}{s_{av}}} \frac{1}{75} - \frac{1}{90} = \frac{36}{60} \Rightarrow \frac{6l - 4l}{450} = \frac{36}{60} \Rightarrow l = 450 \times \frac{36}{60} = 270 \text{ km}$$

گزینه ۴: از آن جا که جابه جایی (AB) و مدت زمان جابه جایی (۱ min) هر سه مسیر با هم برابر است، سرعت متوسط هم در هر سه مسیر یکسان است.



گزینه ۳: **گام اول:** مطابق شکل جابه جایی های هر سه متحرک با هم برابر است، از طرفی طبق گفته سؤال، سرعت متوسط سه متحرک هم با هم برابر است، با این حساب:

$$v_{av,1} = v_{av,2} = v_{av,3} \Rightarrow \frac{\vec{d}_1}{\Delta t_1} = \frac{\vec{d}_2}{\Delta t_2} = \frac{\vec{d}_3}{\Delta t_3} \xrightarrow{\text{جابه جایی ها برابر } \vec{d} \text{ است}} \Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3$$

گام دوم: حالا که فهمیدیم زمان حرکت هر سه متحرک یکسان است. تشخیص این که تندی متوسط کدام متحرک بیشتر است، اصلاً کاری ندارد؛ چون مطابق شکل

$$l_1 < l_2 < l_3 \xrightarrow{\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3} \frac{l_1}{\Delta t_1} < \frac{l_2}{\Delta t_2} < \frac{l_3}{\Delta t_3} \Rightarrow s_{av,1} < s_{av,2} < s_{av,3}$$

یعنی: $l_1 < l_2 < l_3$ است؛

تکلیک وقتی که در یک جابه جایی یکسان، سرعت متوسط چند متحرک با هم برابر می شود، آن متحرکی که بیشترین مسافت طی شده را دارد، بیشترین تندی متوسط را هم دارد. ($s_{av} \propto l$)

گزینه ۱: **گام اول:** با توجه به شکل روبه رو و این که $\widehat{ANB} > \widehat{AMB}$ است، فهمیدیم که بین مسافت ها رابطه $l_3 > l_2 > l_1$ برقرار است.

از طرفی چون تندی متوسط متحرک ها برابر است، داریم:

$$\left. \begin{aligned} l_3 &> l_2 > l_1 \\ s_{av,3} &= s_{av,2} = s_{av,1} \\ \Delta t &= \frac{l}{s_{av}} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{تندی همواره مثبت است.}} \frac{l_3}{s_{av,3}} > \frac{l_2}{s_{av,2}} > \frac{l_1}{s_{av,1}} \Rightarrow \Delta t_3 > \Delta t_2 > \Delta t_1 \quad (I)$$

گام دوم: همان طور که در شکل بالا می بینید جابه جایی هر سه متحرک \vec{d} است؛ پس اندازه جابه جایی این سه متحرک برابر با $d_1 = d_2 = d_3 = d$ است. از طرفی براساس نامساوی (I) و مثبت بودن بازه های زمانی داریم:

$$\Delta t_3 > \Delta t_2 > \Delta t_1 \Rightarrow \frac{1}{\Delta t_3} < \frac{1}{\Delta t_2} < \frac{1}{\Delta t_1} \xrightarrow{\times d} \frac{d}{\Delta t_3} < \frac{d}{\Delta t_2} < \frac{d}{\Delta t_1} \Rightarrow v_{av,3} < v_{av,2} < v_{av,1}$$

تکلیک وقتی تندی متوسط چند متحرک با هم برابر می شود، یعنی نسبت $\frac{l}{\Delta t}$ آن ها برابر است، پس آن متحرکی که مسافت کمتری طی کرده است، زمان حرکتش هم کمتر بوده است. حالا اگر جابه جایی ها یکسان باشد، متحرکی که زمان حرکتش کمتر است، بیشترین سرعت متوسط را

دارد. پس مسیر کوتاه تر (یعنی (I)) را انتخاب می کنیم:

گزینه ۱: عبارت ها را به ترتیب بررسی می کنیم:

(الف) طبق رابطه $s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$ ، اگر تندی متوسط متحرک ها یکسان باشد، آن متحرکی که مسافت کمتری طی می کند، زودتر به مقصد می رسد! ($\Delta t \propto l$). با این حساب چون جابه جایی متحرک ها یکسان است، متحرکی که بیشترین زمان طی شده را دارد، سرعت متوسط کمتری دارد. $(v_{av} \propto \frac{1}{\Delta t})$

(ب) از شکل واضح است که جابه جایی متحرک مسیر (۱)، همان مسافت طی شده متحرک مسیر (۲) است. *

(پ) چون جابه‌جایی هر سه متحرک یکسان است، اگر هر سه متحرک با هم به نقطه B برسند ($\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3$)، قاعدتاً سرعت‌های متوسط برابری هم خواهند داشت. *

$$v_{av} = \frac{\overset{\text{یکسان}}{\vec{d}}}{\underset{\text{یکسان}}{\Delta t}}$$

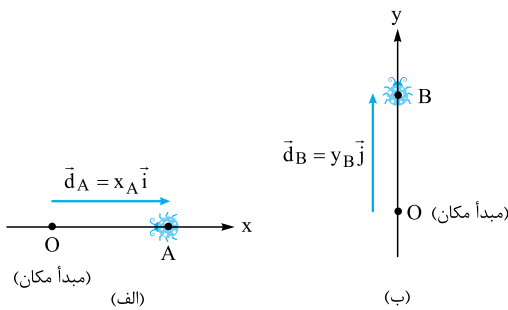
(ت) در عبارت (الف) فهمیدیم که اگر تندی متوسط متحرک‌ها یکسان باشد، متحرکی که مسیر کم‌تری طی می‌کند، زودتر به مقصد می‌رسد؛ یعنی همان متحرک مسیر (۲) ✓

درس سوم حرکت در راستای خط راست



حرکت می‌تواند در یک راستا (یک‌بعدی) یا در یک صفحه (دو‌بعدی) یا در فضا (سه‌بعدی) باشد. از این‌جا به بعد، کتاب درسی حرکت در یک راستا را بررسی کرده است. ما هم سعی می‌کنیم از چهارچوب کتاب درسی خارج نشویم. ما به حرکت‌هایی که مسیر آن مستقیم است اصطلاحاً حرکت راست‌خط می‌گوییم. برای تحلیل این حرکت‌ها محوری (مانند محور X) را منطبق بر مسیر حرکت در نظر می‌گیریم تا بتوانیم مفاهیمی مانند «بردار مکان» و «جابه‌جایی» را بر روی آن تفسیر کنیم.

بردار مکان در حرکت یک‌بعدی



بر روی هر محوری مانند X و Y یک نقطه به نام مبدأ مکان مشخص می‌کنیم. مبدأ مکان جایی است که مکان آن صفر ($x = 0$) است. «بردار مکان» برداری است که از «مبدأ مکان» به محل جسم کشیده می‌شود. شکل (الف) متحرک (کفشدوزک) در نقطه A بر روی محور X و در شکل (ب) متحرک (کفشدوزک) در نقطه B، بر روی محور Y قرار دارد. همین‌طور که در شکل‌ها می‌بینید بردارهای مکان A و B را با \vec{d}_A و \vec{d}_B نشان داده‌ایم و آن‌ها را برحسب بردارهای یکه نوشته‌ایم.

چند نکته ۱ برحسب این‌که مکان جسم، قبل یا بعد از مبدأ باشد، علامت بردار مکان می‌تواند منفی یا مثبت شود. مثلاً در شکل روبه‌رو کفشدوزک قبل از مبدأ است و بردار مکان آن منفی است.

۲ ویژگی جسم متحرک این است که بردار مکانش لحظه به لحظه تغییر می‌کند.

$\vec{d}_{A'} = (-2)\vec{i}$

$\vec{d}_{A'} = -2\vec{i}$

آزمون ۱ در شکل زیر، متحرکی از نقطه A به نقطه B جابه‌جا شده است. بردارهای مکان اولیه متحرک (\vec{d}_i) و مکان نهایی آن (\vec{d}_f) در SI کدام است؟

$\vec{d}_f = 4\vec{j}$ و $\vec{d}_i = -2\vec{i}$ (۱)

$\vec{d}_f = 4\vec{i}$ و $\vec{d}_i = -2\vec{j}$ (۲)

$\vec{d}_f = -2\vec{j}$ و $\vec{d}_i = 4\vec{i}$ (۳)

$\vec{d}_f = -2\vec{i}$ و $\vec{d}_i = 4\vec{j}$ (۴)

پاسخ ۲ نقطه A در مکان -2 m محور Y و نقطه B در مکان $+4\text{ m}$ محور X قرار دارد. پس داریم:

$\vec{d}_i = \vec{d}_A = -2\vec{j}$ و $\vec{d}_f = \vec{d}_B = 4\vec{i}$

آزمون ۲ در یک ساعت دیواری طول عقربه ساعت‌شمار 12 cm و طول عقربه دقیقه‌شمار 15 cm است. اگر مطابق شکل زیر محور چرخش عقربه‌ها در مبدأ مختصات باشد، در ساعت ۹، بردار مکان نوک عقربه ساعت‌شمار (\vec{d}_h) و دقیقه‌شمار (\vec{d}_m) در SI به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

$\vec{d}_m = -0/12\vec{i}$ و $\vec{d}_h = 0/15\vec{j}$ (۱)

$\vec{d}_m = -0/15\vec{i}$ و $\vec{d}_h = 0/12\vec{j}$ (۲)

$\vec{d}_m = 0/12\vec{j}$ و $\vec{d}_h = -0/15\vec{i}$ (۳)

$\vec{d}_m = 0/15\vec{j}$ و $\vec{d}_h = -0/12\vec{i}$ (۴)



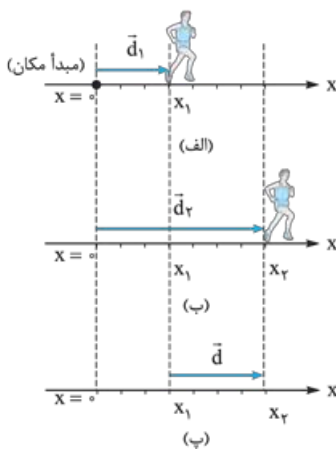
پاسخ ۱۴ مطابق شکل روبه‌رو در ساعت ۹ عقربه ساعت‌شمار در خلاف جهت محور X و عقربه دقیقه‌شمار در جهت مثبت محور Y است، پس داریم:

$$\vec{d}_m = 0/15\vec{j} \text{ و } \vec{d}_h = -0/12\vec{i}$$

مقایسه بردار مکان و بردار جابه‌جایی در حرکت راست‌خط

در درس‌های قبل گفتیم که بردار جابه‌جایی برداری است که ابتدای آن مکان اولیه جسم و انتهای آن مکان نهایی جسم است. به «مکان اولیه متحرک» گاهی «مبدأ حرکت» هم می‌گویند. مکان اولیه یا «مبدأ حرکت» را با x_0 نشان می‌دهیم:
نقطه‌ای که متحرک در لحظه $t_0 = 0$ آن‌جا بوده است = مبدأ حرکت = مکان اولیه = x_0

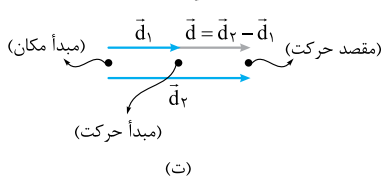
نکته ممکن است متحرک حرکتش را از «مبدأ مکان» شروع نکند. یعنی لزوماً «مبدأ حرکت»، «مبدأ مکان» نیست.



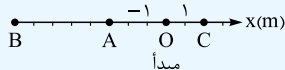
حواستون باشه اگر واژه «مبدأ» به تنهایی بیاید، منظور «مبدأ مکان» است، نه مبدأ حرکت. برای مقایسه بردار مکان و جابه‌جایی به نمونه زیر توجه کنید:

فرض کنید دنده‌ای که بر روی محور X حرکت می‌کند، در لحظه t_1 در مکان x_1 (شکل الف) و در لحظه t_2 در مکان x_2 (شکل ب) قرار دارد. در این صورت بردار مکان این دنده در دو لحظه t_1 و t_2 برحسب بردار یکه \vec{i} به این صورت است:

در شکل (ب) بردار جابه‌جایی همین دنده را در بازه زمانی t_1 تا t_2 نشان داده‌ایم. اگر کمی به شکل‌ها دقت کنید ارتباط بین بردارهای مکان اولیه و نهایی (\vec{d}_1, \vec{d}_2) و بردار جابه‌جایی (\vec{d}) را کشف می‌کنید. در شکل (ت) همه بردارها را سرچایشان کنار هم کشیده‌ایم. همین‌طور که می‌بینید، بردار جابه‌جایی در یک بازه زمانی برابر با تفاضل دو بردار مکان نهایی و اولیه آن بازه زمانی است:

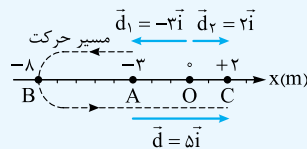


$$\vec{d} = \vec{d}_2 - \vec{d}_1 \Rightarrow \vec{d} = x_2\vec{i} - x_1\vec{i} = (x_2 - x_1)\vec{i} \Rightarrow \boxed{\vec{d} = \Delta x\vec{i}}$$



آزمون ۱۵ مطابق شکل متحرکی بر روی محور X ابتدا از نقطه A به B و سپس از B به C می‌رود. کدام گزینه درباره این حرکت نادرست است؟

- ۱) بردار جابه‌جایی کل این متحرک برابر با $(+5\text{ m})\vec{i}$ است.
- ۲) بردار مکان اولیه این متحرک $(-3\text{ m})\vec{i}$ و بردار مکان نهایی آن $(+2\text{ m})\vec{i}$ است.
- ۳) متحرک در طول مسیرش مسافت ۱۵ m را می‌پیماید.
- ۴) طول بزرگ‌ترین بردار جابه‌جایی در طی مسیر ۸ m است.

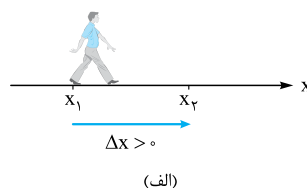


پاسخ ۱۶ در شکل روبه‌رو بردارهای مکان اولیه (\vec{d}_1)، مکان نهایی (\vec{d}_2) و بردار جابه‌جایی کل (\vec{d}) و مسیر حرکت را نشان داده‌ایم؛ که همگی درستی ۱، ۲ و ۳ را تأیید می‌کنند. اما ۴ نادرست است زیرا بزرگ‌ترین جابه‌جایی در طول مسیر از B تا C است که طول آن برابر ۱۰ m می‌شود.

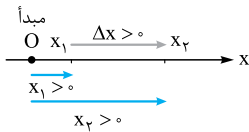
چند نکته ۱ بردار جابه‌جایی را در همه حرکت‌ها (یک یا دو یا سه بعدی) می‌توانیم با حرف \vec{d} نشان دهیم. اما در حرکت‌های

یک‌بعدی در فرمول‌ها برای نشان دادن جابه‌جایی، از \vec{d} (به عنوان نماد کلی جابه‌جایی) کمتر استفاده می‌کنیم و چون متحرک بیشتر روی محور X حرکت می‌کند، جابه‌جایی را با Δx نشان می‌دهیم.

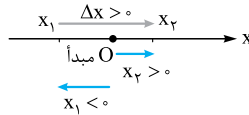
۲) در همه کمیت‌های برداری (مثل جابه‌جایی و سرعت متوسط) علامت مثبت یا منفی نشان‌دهنده جهت کمیت است؛ مثلاً وقتی می‌گوییم $\Delta x = -2\text{ m}$ یعنی متحرک ۲ m در جهت منفی محور X جابه‌جا شده است.



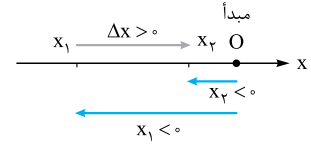
۳ بردارهای مکان اولیه و نهایی لزوماً هم جهت با بردار جابه‌جایی نیستند. مثلاً به جهت جابه‌جایی و بردارهای مکان اولیه و نهایی در شکل‌های زیر نگاه کنید. با آن‌که بردار جابه‌جایی در هر سه شکل در جهت مثبت است، ولی علامت بردارهای مکان (بسته به محل مبدأ) متفاوت است.



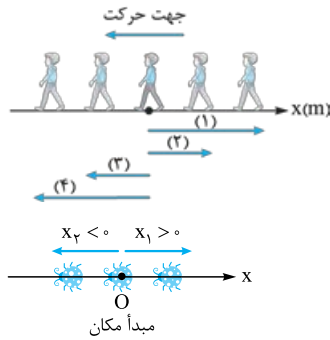
(پ) این‌جا هر دو بردار مثل جابه‌جایی مثبت‌اند.



(ب) در این شکل بردار مکان اولیه در جهت منفی و بردار مکان نهایی مثبت است. جابه‌جایی هم که مثل شکل‌های دیگر مثبت است.



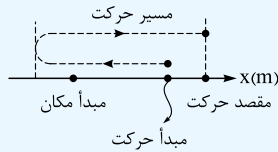
(الف) در این شکل بردارهای مکان در جهت منفی ولی جابه‌جایی مثبت است.



۴ بردار مکان متحرک در لحظه عبور از مبدأ صفر می‌شود. پس می‌توانیم بگوییم، متحرک هرگاه به مبدأ نزدیک می‌شود، اندازه بردار مکانش به سمت صفر شدن می‌رود. پس اندازه بردار مکان با نزدیک شدن متحرک به مبدأ، کوچک و با دور شدن آن از مبدأ بزرگ می‌شود. مثلاً در شکل مقابل متحرک ابتدا به مبدأ نزدیک و سپس از آن دور می‌شود. به بردارهای مکان این شخص توجه کنید.

۵ اگر متحرک در طی حرکتش از مبدأ مکان عبور کند، بلافاصله پس از عبور از مبدأ، بردار مکانش تغییر جهت می‌دهد. در شکل روبه‌رو قبل از عبور متحرک از مبدأ مکان، جهت بردار مکان مثبت و پس از عبور از مبدأ، جهت بردار مکان منفی است.

تست ۱ متحرکی مطابق شکل روبه‌رو بر روی محور x حرکت می‌کند. در طی مسیر بردار جابه‌جایی از لحظه $t_0 = 0$ و بردار مکان متحرک به ترتیب از راست به چپ، چند بار تغییر جهت می‌دهند؟



(۲) ۲ و ۲

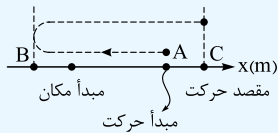
(۱) ۱ و ۱

(۴) ۱ و ۱

(۳) ۲ و ۱

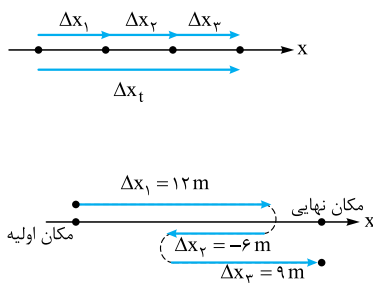
پاسخ ۱ گام اول: هر بار که متحرک از مبدأ عبور می‌کند، بردار مکانش تغییر جهت می‌دهد. با توجه به شکل، این متحرک ۲ بار از مبدأ عبور کرده، پس بردار مکانش هم ۲ بار تغییر جهت داده است.

گام دوم: به شکل روبه‌رو نگاه کنید. این متحرک از نقطه A به سمت نقطه B حرکت کرده و در نقطه B تغییر جهت می‌دهد و در برگشت از نقطه A عبور می‌کند. تا قبل از عبور متحرک از نقطه A، بردار جابه‌جایی (از لحظه $t_0 = 0$ به سمت چپ و پس از عبور از نقطه A به سمت راست خواهد بود. پس می‌توانیم بگوییم بردار جابه‌جایی (از لحظه $t_0 = 0$) ۱ بار تغییر جهت داده است.



۶ اگر چند جابه‌جایی متوالی داشته باشیم، جابه‌جایی کل متحرک برابر جمع برداری جابه‌جایی‌ها خواهد بود. مثلاً اگر مانند شکل روبه‌رو یک متحرک سه جابه‌جایی متوالی به ترتیب Δx_1 ، Δx_2 و Δx_3 داشته باشد، جابه‌جایی کل برابر می‌شود با:

$$\Delta x_t = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3$$



حواستون باشه ممکنه یک یا چند جابه‌جایی در جهت منفی باشند؛ در این صورت یادتون نره که علامت جابه‌جایی‌ها رو هم در رابطه بالا قرار بدید. مثلاً فرض کنید یک متحرک سه جابه‌جایی متوالی $\Delta x_1 = 12 \text{ m}$ ، $\Delta x_2 = -6 \text{ m}$ و $\Delta x_3 = 9 \text{ m}$ رو داشته. پس جابه‌جایی کل این متحرک این‌جوری حساب می‌شه:

$$\Delta x_t = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 12 + (-6) + 9 = 15 \text{ m}$$

۷ در ادامه نکته قبل باید بگوییم که برای محاسبه مسافت طی‌شده کل، کافی است که اندازه جابه‌جایی‌ها را با هم جمع کنیم:

$$|s| = |x_1| + |x_2| + |x_3| = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3|$$

تست ۲ متحرکی دو جابه‌جایی متوالی Δx_1 و Δx_2 را انجام می‌دهد. اگر جابه‌جایی کل این متحرک در SI، $-3\vec{i}$ و $\Delta x_2 = -2\Delta x_1$ باشد، بردار جابه‌جایی «۱» برحسب متر کدام است؟

(۴) $3\vec{i}$

(۳) $-3\vec{i}$

(۲) $6\vec{i}$

(۱) $-6\vec{i}$

پاسخ ۴ گفتیم در جابه‌جایی‌های متوالی، جابه‌جایی کل برابر جمع برداری تمام جابه‌جایی‌ها است. پس داریم:

$$\Delta x_t = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \Delta x_1 + (-2\Delta x_1) = -\Delta x_1 \Rightarrow \Delta x_1 = -\Delta x_t = -(-3) = 3 \text{ m} \Rightarrow \vec{d}_1 = \Delta x_1 \vec{i} = (3 \text{ m})\vec{i}$$

محاسبه سرعت متوسط و تندی متوسط در حرکت روی خط راست

هر جا که بتوانیم جابه‌جایی و مسافت متحرک را حساب کنیم؛ از سرعت متوسط و تندی متوسط آن هم می‌توانیم صحبت کنیم، برای حرکت بر روی محور x می‌توانیم رابطه سرعت متوسط و تندی متوسط را به صورت زیر بنویسیم:

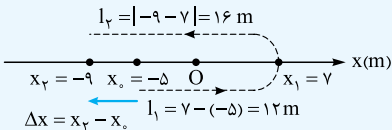
به چند تست زیر توجه کنید:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t}, \quad \bar{v}_{av} = \frac{\Delta \bar{x}}{\Delta t}$$

تست ۱ متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند در بازه صفر تا t ثانیه مستقیماً از مکان $x_0 = -5 \text{ m}$ به مکان $x_1 = 7 \text{ m}$ و در بازه t ثانیه تا 8 s مستقیماً از مکان $x_1 = 7 \text{ m}$ به مکان $x_2 = -9 \text{ m}$ می‌رود. در بازه صفر تا 8 s تندی متوسط متحرک چند متر بر ثانیه از اندازه سرعت متوسطش بیشتر است؟

- (۱) $0/5$ (۲) $3/5$ (۳) 4 (۴) 3

پاسخ ۱ آن‌طور که صورت مسئله می‌گوید، متحرک در لحظه t ثانیه تغییر جهت داده است و در مدت 8 s مسیر شکل روبه‌رو را طی کرده است.



$$s_{av} = \frac{l_1 + l_2}{\Delta t} = \frac{12 + 16}{8 - 0} = \frac{28}{8} = 3.5 \text{ m/s}$$

با توجه به شکل داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_0}{\Delta t} = \frac{-9 - (-5)}{8 - 0} = -\frac{4}{8} = -0.5 \text{ m/s} \Rightarrow |v_{av}| = 0.5 \text{ m/s}$$

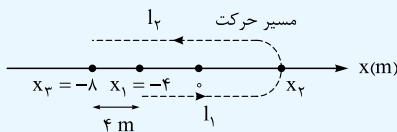
$$s_{av} - |v_{av}| = 3.5 - 0.5 = 3 \text{ m/s}$$

بنابراین تندی متوسط 3 m/s از اندازه سرعت متوسط بیشتر است:

تست ۲ متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، در لحظه $t_1 = 2 \text{ s}$ در حال حرکت در جهت محور x از مکان $\bar{x}_1 = -4 \text{ i}$ عبور می‌کند و در مکان \bar{x}_2 تغییر جهت داده و در لحظه $t_2 = 4 \text{ s}$ در مکان $\bar{x}_2 = -8 \text{ i}$ قرار دارد. اگر تندی متوسط این متحرک در بازه $t_1 = 2 \text{ s}$ تا $t_2 = 4 \text{ s}$ برابر 8 m/s باشد، \bar{x}_2 کدام است؟ (همه بردارهای مکان بر حسب متر است.)

- (۱) $+2 \text{ i}$ (۲) $+4 \text{ i}$ (۳) -2 i (۴) -14 i

پاسخ ۲ شکل روبه‌رو را با توجه به این‌که متحرک در لحظه t_1 در جهت محور x در حال حرکت بوده رسم کردیم. در این شکل مسیر حرکت جسم معلوم است.



فرض کنید متحرک از x_1 تا x_2 مسافت l_1 و از x_2 تا x_1 مسافت l_2 را پیموده است. در این صورت داریم:

$$s_{av} = \frac{l_1 + l_2}{t_2 - t_1} \Rightarrow 8 = \frac{l_1 + l_2}{4 - 2} \Rightarrow l_1 + l_2 = 16 \text{ cm}$$

هم‌چنین در شکل می‌بینیم که فاصله x_1 تا x_2 برابر 4 m است. پس $l_2 = l_1 + 4$ است:

$$l_1 + l_2 = 16 \xrightarrow{l_2 = l_1 + 4} l_1 + l_1 + 4 = 16 \Rightarrow 2l_1 = 12 \Rightarrow l_1 = 6 \text{ m}$$

$$\bar{x}_2 = (-4 + 6)\text{i} = 2\text{i}$$

پس مکان x_2 به اندازه 6 m جلوتر از $x_1 = -4 \text{ m}$ است:

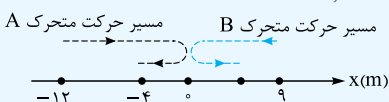
با تست زیر می‌خواهیم مفاهیم این درس‌نامه را تا به این‌جا جمع‌بندی کنیم:

تست ۳ جدول زیر وضعیت دو متحرک A و B را در مدت 5 s نشان می‌دهد. اگر دو متحرک یک بار در مبدأ تغییر جهت بدهند و تندی متوسط آن‌ها در کل حرکت برابر باشد، کدام‌یک از گزینه‌های زیر بر حسب SI نادرست است؟

(برگرفته از کتاب درسی)

	تندی متوسط	سرعت متوسط	مکان نهایی	مکان اولیه	
متحرک A	s_{av}	$\bar{v}_{av,A}$	$(-4 \text{ m})\text{i}$	$(-12 \text{ m})\text{i}$	
متحرک B	s_{av}	$\bar{v}_{av,B}$	$\bar{d}_{r,B}$	$(9 \text{ m})\text{i}$	

- (۱) $\bar{v}_{av,A} = 1/6 \text{ i}$ (۲) $\bar{d}_{r,B} = 7 \text{ i}$ (۳) $s_{av} = 3/2$ (۴) $\bar{v}_{av,B} = -0/2 \text{ i}$



پاسخ ۳ در شکل روبه‌رو با توجه به اطلاعات تست، مسیر حرکت دو متحرک را نشان داده‌ایم: سرعت متوسط متحرک A را حساب می‌کنیم:

$$\bar{v}_{av,A} = \frac{\bar{d}_A}{\Delta t_A} = \frac{-4\text{i} - (-12\text{i})}{5} = \frac{8\text{i}}{5} = (1.6 \text{ m/s})\text{i}$$

پس ۱ درست است.

حالا به سراغ تندی متوسط متحرک A می‌رویم متحرک A در مبدأ تغییر جهت داده است، پس از مکان -12i به مبدأ رفته و سپس تغییر جهت داده و به مکان -4i بازگشته است. با توجه به این موضوع مسافت طی شده برابر است با: $l_A = |\Delta x_{1,A}| + |\Delta x_{2,A}| = |0 - (-12)| + |(-4) - 0| = 12 + 4 = 16 \text{ m}$

در نتیجه تندی متوسط برابر با $s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{16}{5} = 3.2 \text{ m/s}$ است و ۳ هم درست است.

چون تندی متوسط دو متحرک با هم برابر است، مسافت طی شده توسط دو متحرک هم برابر است. از آن جایی که هر دو متحرک فقط یک بار و در مبدأ تغییر جهت داده‌اند، متحرک B از $\vec{d}_{1,B} = 9\vec{i}$ به مبدأ و پس از تغییر جهت در مبدأ به نقطه $\vec{d}_{\gamma,B}$ رفته است. با توجه به این که مسافت طی شده در این حرکت ۱۶ m است؛ داریم:

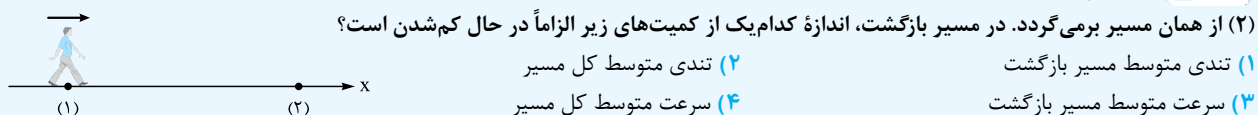
$$l_B = |\Delta x_{1,B}| + |\Delta x_{\gamma,B}| \xrightarrow{l_A=l_B} 16 = |-9| + |x_{\gamma} - 0| \Rightarrow 16 = 9 + x_{\gamma} \Rightarrow x_{\gamma} = 7 \text{ m} \Rightarrow d_{\gamma,B} = 7\vec{i}$$

$$\vec{v}_{av,B} = \frac{\vec{d}_B}{\Delta t_B} = \frac{7\vec{i} - 9\vec{i}}{5} = -\frac{2\vec{i}}{5} = (-0.4 \text{ m/s})\vec{i}$$

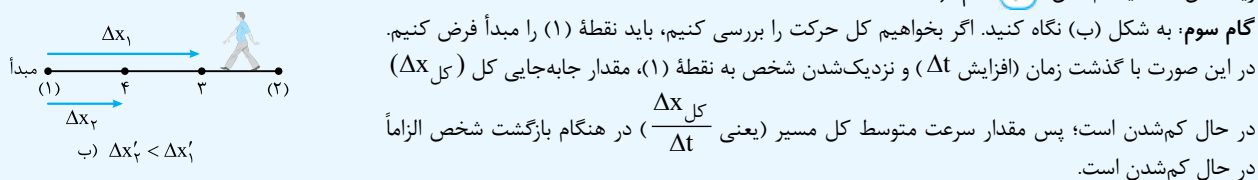
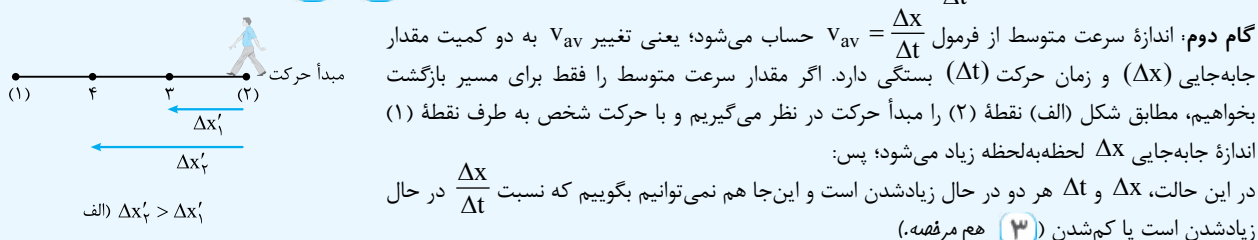
پس (۲) درست است. حالا به سراغ این که چرا (۴) نادرست است، می‌رویم:

و اما یک تست مفهومی دیگر که به کمی دقت و تمرکز نیاز دارد:

تست ۱۵ شخصی در حال پیاده‌روی بر روی محور x است. این شخص مطابق شکل زیر از مکان (۱) شروع به حرکت کرده و پس از رسیدن به مکان



پاسخ ۱۴ گام اول: تندی متوسط با فرمول $s_{av} = \frac{1}{\Delta t}$ تغییر می‌کند. چه در مسیر برگشت و چه در کل مسیر، مسافت (l) و بازه زمانی حرکت (Δt) هر دو در حال افزایش‌اند. اما این که نسبت $\frac{1}{\Delta t}$ چه‌طور تغییر می‌کند، بسته به شرایط متفاوت است. (پس تا این جا (۱) و (۲) نادرست‌اند.)



سرعت متوسط در چند جابه‌جایی متوالی

گاهی در یک حرکت مستقیم، سرعت‌های متوسط متحرک را در چند جابه‌جایی متوالی می‌دهند و سرعت متوسط متحرک در جابه‌جایی کل را می‌خواهند. این جور تست‌ها دو حالت دارند، یا جابه‌جایی‌های متوالی را می‌دهند یا بازه‌های زمانی متوالی را: (الف) اگر سرعت‌های متوسط متحرکی در جابه‌جایی‌های متوالی $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ به ترتیب $v_{av,1}, v_{av,2}, v_{av,3}$ باشد، داریم:

$$v_{av,کل} = \frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t_{کل}} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3} \xrightarrow{v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{v_{av}}} v_{av,کل} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3}{\frac{\Delta x_1}{v_{av,1}} + \frac{\Delta x_2}{v_{av,2}} + \frac{\Delta x_3}{v_{av,3}}}$$

(ب) اگر سرعت‌های متوسط متحرکی در بازه‌های زمانی متوالی $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3$ به ترتیب $v_{av,1}, v_{av,2}, v_{av,3}$ باشد، می‌توانیم بنویسیم:

$$v_{av,کل} = \frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t_{کل}} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3} \xrightarrow{v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = v_{av} \Delta t} v_{av,کل} = \frac{v_{av,1} \Delta t_1 + v_{av,2} \Delta t_2 + v_{av,3} \Delta t_3}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3}$$

ما در واقع کمیتی که داده نشده (در حالت (الف)، Δt و در حالت (ب)، Δx) را جایگزین می‌کنیم و از رابطه حذف می‌کنیم.

تست ۱۶ جابه‌جایی کل متحرکی که بر روی محور x حرکت کرده است، Δx است. اگر این متحرک جابه‌جایی $\Delta x_1 = -\frac{\Delta x}{5}$ را با سرعت متوسط

-20 m/s و بقیه مسیرش را با سرعت متوسط 30 m/s پیموده باشد، سرعت متوسط آن در کل مسیر چند متر بر ثانیه است؟

(۱) ۵ (۲) ۲۵ (۳) ۱۰ (۴) ۲۰

پاسخ ۱۶ سرعت متوسط در جابه‌جایی‌های متوالی Δx_1 و Δx_2 داده شده است. اول باید ببینیم، چه کسری از Δx است:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 \xrightarrow{\Delta x_1 = -\frac{\Delta x}{5}} \Delta x = -\frac{\Delta x}{5} + \Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2 = \Delta x + \frac{\Delta x}{5} = \frac{6\Delta x}{5}$$

متحرک Δx_1 را با سرعت -20 m/s و Δx_2 را با سرعت 30 m/s پیموده است. پس داریم:

$$v_{av,کل} = \frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t_{کل}} = \frac{\Delta x}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{\Delta x}{\frac{\Delta x_1}{v_{av,1}} + \frac{\Delta x_2}{v_{av,2}}} = \frac{\Delta x}{\frac{-\Delta x}{-20} + \frac{6\Delta x}{30}} = \frac{\Delta x}{\frac{\Delta x}{100} + \frac{\Delta x}{25}} = \frac{\Delta x}{\frac{5\Delta x}{100}} = 20 \text{ m/s}$$

تست ۱ متحرکی که روی محور x در حال حرکت است، مسیری را در مدت Δt می‌پیماید. اگر سرعت متوسط این متحرک در $\frac{\Delta t}{4}$ از زمان حرکتش 8 m/s و در $\frac{\Delta t}{3}$ از زمان حرکتش -12 m/s و در ادامه مسیر 4 m/s باشد، اندازه سرعت متوسط متحرک در کل مسیر چند متر بر ثانیه است؟

(۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۶

پاسخ ۱ در این تست سرعت‌های متوسط در بازه‌های $\frac{\Delta t}{4}$ ، $\frac{\Delta t}{3}$ و ادامه مسیر داده شده است. ابتدا بازه زمانی آخر را حساب می‌کنیم:

$$\Delta t_{\text{آخر}} = \Delta t - \left(\frac{\Delta t}{4} + \frac{\Delta t}{3} \right) = \Delta t - \frac{7\Delta t}{12} = \frac{5\Delta t}{12}$$

در رابطه $v_{\text{av}} = \frac{\Delta x_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}}$ به جای $\Delta x_{\text{کل}}$ معادله را قرار می‌دهیم:

$$v_{\text{av, کل}} = \frac{\Delta x_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}} = \frac{v_{\text{av,1}}\Delta t_1 + v_{\text{av,2}}\Delta t_2 + v_{\text{av,3}}\Delta t_3}{\Delta t} = \frac{8 \times \frac{\Delta t}{4} + (-12) \times \frac{\Delta t}{3} + 4 \times \frac{\Delta t}{4}}{\Delta t} = \frac{2\Delta t + (-6\Delta t) + \Delta t}{\Delta t} = \frac{(2-6+1)\Delta t}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow v_{\text{av, کل}} = -3 \text{ m/s} \Rightarrow |v_{\text{av, کل}}| = 3 \text{ m/s}$$

معادله مکان - زمان در حرکت راست‌خط

ما باید بتوانیم مکان جسم را در هر لحظه دلخواه مشخص کنیم. یکی از راه‌های تعیین مکان جسم در هر لحظه «معادله مکان - زمان» یا «معادله $x-t$ » است. این معادله، مکان جسم را به صورت تابعی از زمان نشان می‌دهد:

مثلاً $x = 2t^2 - 4t - 2$ می‌تواند معادله مکان - زمان یک حرکت راست‌خط برحسب یکاهای SI باشد. در این صورت متحرک در لحظه‌هایی مثل $t_0 = 0$ ، $t_1 = 1 \text{ s}$ ، $t_2 = 2 \text{ s}$ و $t_3 = 3 \text{ s}$ در مکان‌های x_0 ، x_1 ، x_2 و x_3 قرار دارد که به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} t_0 = 0 &\Rightarrow x_0 = 2(0)^2 - 4(0) - 2 = -2 \text{ m} & t_2 = 2 \text{ s} &\Rightarrow x_2 = 2(2)^2 - 4(2) - 2 = -2 \text{ m} \\ t_1 = 1 \text{ s} &\Rightarrow x_1 = 2(1)^2 - 4(1) - 2 = -4 \text{ m} & t_3 = 3 \text{ s} &\Rightarrow x_3 = 2(3)^2 - 4(3) - 2 = 4 \text{ m} \end{aligned}$$

لحظه	$t_0 = 0$	$t_1 = 1 \text{ s}$	$t_2 = 2 \text{ s}$	$t_3 = 3 \text{ s}$
مکان	$x_0 = -2 \text{ m}$	$x_1 = -4 \text{ m}$	$x_2 = -2 \text{ m}$	$x_3 = +4 \text{ m}$

در معادله‌های مکان - زمان که به صورت $x = At^n + Bt^{n-1} + \dots + Yt + Z$ است، عدد ثابت (یعنی Z) بیانگر مکان اولیه است؛ (پهن آگه به پای t صفر بنذاریم، فقط Z می‌مونه) مثلاً در نمونه بالا، مکان اولیه برابر $x_0 = -2 \text{ m}$ است.

تست ۱ معادله مکان - زمان جسمی در SI به صورت $x = t^2 - 5t - 4$ است. فاصله متحرک از مبدأ مکان در مبدأ زمان و اندازه جابه‌جایی آن در ثانیه سوم به ترتیب چند متر است؟

(۱) ۴ و صفر (۲) ۲ و ۴ (۳) ۲ و صفر (۴) ۴ و ۴

پاسخ ۱ اول این که مکان اولیه متحرک $x_0 = -4 \text{ m}$ است پس فاصله متحرک از مبدأ مکان در مبدأ زمان برابر 4 m است. دوم این که ثانیه سوم حرکت یعنی بازه زمانی $t_1 = 2 \text{ s}$ تا $t_2 = 3 \text{ s}$. مکان جسم را در این دو لحظه حساب می‌کنیم:

$$t_1 = 2 \text{ s} \Rightarrow x_1 = (2)^2 - 5(2) - 4 = -10 \text{ m}, \quad t_2 = 3 \text{ s} \Rightarrow x_2 = (3)^2 - 5(3) - 4 = -10 \text{ m}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = -10 - (-10) = 0$$

در نتیجه جابه‌جایی جسم در ثانیه سوم برابر است با:

تکلیک اگر معادله مکان - زمان را بدهند و جابه‌جایی در یک بازه زمانی را بخواهند، می‌توانید در محاسبات از مکان اولیه چشم‌پوشی کنید.

$$\Delta x_{(2,3)} = [(3)^2 - 5(3) - 4] - [(2)^2 - 5(2) - 4] = 0 \quad \text{داریم:}$$

تست ۱ معادله مکان - زمان دو متحرک A و B که هم‌زمان حرکت می‌کنند در SI به صورت $x_A = t^2 - 4t + 8$ و $x_B = t^2 + 3t - 6$ است. در مبدأ زمان این دو متحرک در چه فاصله‌ای از هم قرار دارند و در چه لحظه‌ای به هم می‌رسند؟

(۱) $t = 0 / 5 \text{ s}$ ، 2 m (۲) $t = 2 \text{ s}$ ، 2 m (۳) $t = 0 / 5 \text{ s}$ ، 14 m (۴) $t = 2 \text{ s}$ ، 14 m

پاسخ ۱ گام اول: با توجه به نکته بالا، مکان اولیه متحرک A برابر $x_{0A} = +8 \text{ m}$ و مکان اولیه متحرک B برابر $x_{0B} = -6 \text{ m}$ است. پس فاصله آن‌ها از هم در لحظه $t = 0$ برابر می‌شود با:

$$|\Delta x_0| = |x_{0A} - x_{0B}| = 8 - (-6) = 14 \text{ m}$$

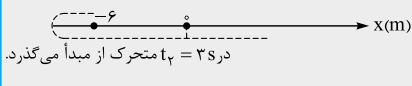
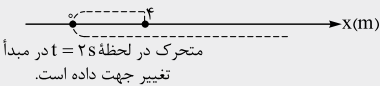
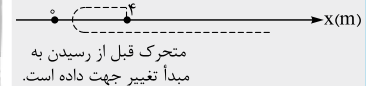
گام دوم: وقتی دو متحرک به هم می‌رسند، x ‌هایشان برابر می‌شود، پس داریم:

$$x_A = x_B \Rightarrow t^2 - 4t + 8 = t^2 + 3t - 6 \Rightarrow 7t = 14 \Rightarrow t = 2 \text{ s}$$

• چه وقت متحرک از مبدأ عبور می‌کند؟ • در لحظه‌های عبور متحرک از مبدأ دو اتفاق می‌افتد:

(۱) مکان متحرک صفر می‌شود (یعنی $x = 0$). (۲) مکان (x) تغییر علامت می‌دهد.

برای تشخیص لحظه‌های عبور متحرک از مبدأ در تست‌هایی که معادله مکان - زمان آن‌ها درجه ۲ است الگوریتم زیر را اجرا می‌کنیم (هم‌زمان سه نمونه متفاوت را هم با این الگوریتم مرور می‌کنیم و حالت‌های مختلف را می‌بینیم).

الگوریتم	$x = t^2 - t - 6$	$x = t^2 - 4t + 4$	$x = t^2 - 2t + 4$
۱) x را برابر صفر می‌گذاریم	$t^2 - t - 6 = 0$	$t^2 - 4t + 4 = 0$	$t^2 - 2t + 4 = 0$
۲) Δ را حساب می‌کنیم	$\Delta = (-1)^2 - (4 \times -6) = 25 > 0$	$\Delta = (-4)^2 - (4 \times 4) = 0$	$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 4 = -12 < 0$
۳) ریشه‌ها را حساب می‌کنیم	$t_1 = -2s$ و $t_2 = 3s$	ریشه مضاعف $t = 2s$	ریشه ندارد
۴) جواب را تفسیر می‌کنیم.	زمان منفی قبول نیست، پس متحرک فقط در لحظه $t_2 = 3s$ از مبدأ عبور کرده است.	ریشه مضاعف مثبت یعنی متحرک یک بار در لحظه $t = 2s$ به مبدأ رسیده و در آن‌جا تغییر جهت داده است.	متحرک هرگز به مبدأ نمی‌رسد.
مسیر حرکت بر روی محور x			

تست ۱ | معادله مکان - زمان متحرکی در SI، $x = t^2 - 4t$ است. به جز مبدأ زمان ($t = 0$) در چه لحظه‌ای بر حسب ثانیه، این متحرک در حال عبور از مبدأ مکان است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ ۲ | کافی است به جای x، صفر بگذاریم و معادله را حل کنیم.

$$x = 0 \Rightarrow t^2 - 4t = 0 \Rightarrow t(t^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t^2 - 4 = 0 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t = \pm 2s \end{cases}$$

زمان منفی معنی ندارد. پس می‌ماند $t = 2s$.

نکته به طور کلی اگر در معادله مکان - زمان به جای x مکان معینی را قرار دهیم و سپس معادله حاصل را حل کنیم، تهای مثبت به دست آمده، لحظه‌های رسیدن یا عبور متحرک از آن مکان معین را نشان می‌دهند. (اگر t به دست آمده ریشه مضاعف باشد، متحرک در آن مکان تغییر جهت می‌دهد و اگر t یا tهای به دست آمده ریشه معمولی باشند، متحرک در آن‌ها از آن مکان عبور می‌کند.)

به مثال زیر توجه کنید:

تست ۲ | معادله مکان - زمان متحرکی در SI به صورت $x = t^2 - t - 2$ است. به ترتیب از راست به چپ در چه لحظه‌ای بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد و متحرک در چه لحظه‌ای پس از $t = 0$ از مبدأ حرکت عبور می‌کند؟

۱) ۱s، ۱s ۲) ۲s، ۲s ۳) ۲s، ۱s ۴) ۱s، ۲s

پاسخ ۴ | گام اول: می‌دانید که بردار مکان در لحظه‌ای که متحرک از مبدأ عبور می‌کند، تغییر جهت می‌دهد. پس باید لحظه‌ای که متحرک از $x = 0$ می‌گذرد را پیدا کنیم:

$$x = t^2 - t - 2 \xrightarrow{x=0} 0 = t^2 - t - 2 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -1s & \text{غ ق} \\ t_2 = 2s & \text{ق ق} \end{cases}$$

پس بردار مکان متحرک در لحظه $t = 2s$ تغییر جهت می‌دهد.

گام دوم: مبدأ حرکت همان مکان اولیه متحرک یا مکان متحرک در لحظه $t = 0$ است. با توجه به معادله مکان - زمان در این تست، $x_0 = -2m$ است. پس مکان $-2m$ را در معادله به جای x می‌گذاریم و معادله را حل می‌کنیم:

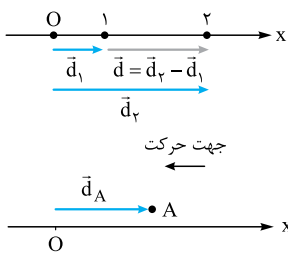
$$-2 = t^2 - t - 2 \Rightarrow t^2 - t = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_0 = 0 \\ t' = 1s \end{cases}$$

۳۶. گزینه ۳ | قاعدتاً باید گزینه‌ها را بررسی کرد:

۱) نه لزوماً؛ اگر تغییر جهت داشته باشیم، مسافت و اندازه جابه‌جایی برابر نمی‌شود. *

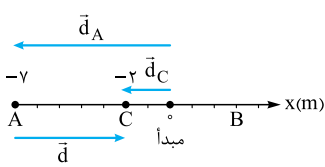
۲) خیر؛ بردار مکان، مبدأ مکان (مختصات) را به مکان متحرک وصل می‌کند. *

(در واقع برداری که مکان اولیه جسم را به مکان نهایی آن وصل می‌کند، بردار جابه‌جایی است.)



۳ دقیقاً جهت یادآوری شکل روبه‌رو را خوب نگاه کنید. بردار مکان اولیه، \vec{d}_1 بردار مکان نهایی و \vec{d} هم که بردار جابه‌جایی است. ✓

۴ نه همیشه، مثلاً در شکل روبه‌رو با این که بردار مکان متحرک A در جهت محور X است، متحرک در جهت منفی محور X حرکت می‌کند.



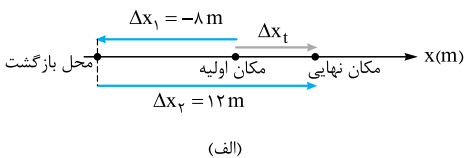
۳۷. گزینه ۳ در شکل روبه‌رو بردار مکان اولیه را با \vec{d}_A نشان داده‌ایم که از مبدأ به مکان اولیه وصل شده است. با توجه به این که متحرک در انتهای حرکت در نقطه C قرار دارد. بردار مکان نهایی را هم با \vec{d}_C نشان داده‌ایم.

بردار جابه‌جایی هم برداری است که مکان اولیه را به مکان نهایی وصل می‌کند که آن را با \vec{d} مشخص کرده‌ایم؛ با این حساب: بردار مکان اولیه: $\vec{d}_C = -2\vec{i}$ بردار مکان نهایی: $\vec{d}_A = -7\vec{i}$

بردار جابه‌جایی: $\vec{d} = \vec{d}_C - \vec{d}_A = -2\vec{i} - (-7\vec{i}) = 5\vec{i}$

$\vec{d} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 = 3\vec{i} + (-4\vec{i}) = -\vec{i}$

۳۸. گزینه ۲ بردار جابه‌جایی کل حرکت، برابر با جمع برداری جابه‌جایی‌هایی است که متحرک انجام می‌دهد:



۳۹. گزینه ۱ گام اول: متحرک دو جابه‌جایی متوالی $\Delta x_1 = -8\text{ m}$ و $\Delta x_2 = 12\text{ m}$ را پشت سر گذاشته است (شکل الف) پس جابه‌جایی کل برابر است با:

$\Delta x_t = \Delta x_1 + \Delta x_2 = -8 + 12 = +4 \Rightarrow \vec{d} = \Delta x_t \vec{i} = +4\vec{i}$

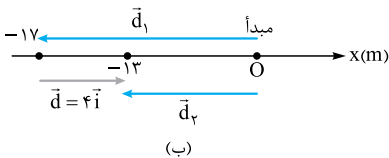
(تا این جا ۲ و ۳ پُر!)

$l_t = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 8 + 12 = 20\text{ m}$

گام دوم: می‌دانید که مسافت طی شده برابر مجموع اندازه جابه‌جایی‌ها است، پس داریم:

۴ هم حذف شد و فقط می‌ماند ۱ که درست است؛ بد نیست به قصد تمرین خواسته دیگر تست را هم حساب کنیم.)

گام سوم: مکان اولیه و جابه‌جایی متحرک را داریم و مکان نهایی را می‌خواهیم:



$\vec{d} = \vec{d}_2 - \vec{d}_1 \xrightarrow{\substack{\vec{d}=4\vec{i} \\ \vec{d}_1=-17\vec{i}}} \vec{d}_2 = \vec{d} + \vec{d}_1 = 4\vec{i} + (-17\vec{i}) = -13\vec{i}$

این هم شکل بردارهای مکان و جابه‌جایی:

۴۰. گزینه ۳ گام اول: ابتدا در یک شکل مناسب مسیر حرکت را بر روی محور X مشخص می‌کنیم.

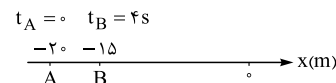
اگر متحرک از مکان منفی شروع به حرکت کند، مسیر حرکتش مانند شکل روبه‌رو خواهد بود.

گام دوم: مطابق شکل، بردار مکان نهایی و بردار جابه‌جایی جسم است.

از شکل واضح است که این دو بردار در خلاف جهت هم‌اند.

گام سوم: همان‌طور که می‌بینید متحرک ۲ بار از مبدأ مکان عبور کرده؛ پس یعنی جهت بردار مکان ۲ بار تغییر می‌کند.

اگر فرض می‌کردیم متحرک ابتدا در قسمت مثبت محور X است، باز به همین جواب می‌رسیدیم. بررسی آن بر عهده خودتان!



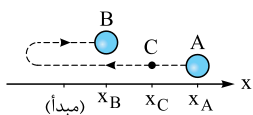
۴۱. گزینه ۳ به ترتیب گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ چون متحرک در بخش منفی محور X است؛ بردار مکان آن همواره در خلاف جهت محور X خواهد بود. ✓

۲ چون متحرک در بخش منفی محور X در حال نزدیک شدن به مبدأ است، بردار جابه‌جایی آن حتماً در جهت محور X خواهد بود. ✓

۳ متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ است؛ پس طول بردار مکان آن همواره در حال کاهش است. ✗

۴ چون حرکت روی خط راست است و تغییر جهت هم ندارد؛ اندازه جابه‌جایی متحرک با مسافت طی شده آن برابر خواهد بود. ✓



۴۲. گزینه ۱ مطابق شکل برای آن که متحرک از فاصله معینی از مبدأ (نقطه A) شروع به حرکت کند و ۲ مرتبه هم از مبدأ مکان بگذرد، باید حداقل ۱ بار تغییر جهت بدهد. به همین ترتیب متحرک برای n بار عبور از مبدأ مکان باید حداقل n-1 بار تغییر جهت

دهد. هواستون باشه در این فاصله متحرک بدون اون که از مبدأ عبور کنه، می‌تونه هر چندبار که بقواد، تغییر جهت بده؛ یعنی مثلاً از مکان X_A تا X_C رو بارها بره و برگرده! پس متحرک حداکثر بی‌شمار بار می‌تونه تغییر جهت بده.

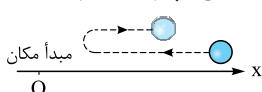
۴۳. گزینه ۴ مطابق شکل:

۱ می‌دانید که بردار مکان پس از عبور متحرک از مبدأ مکان تغییر جهت می‌دهد. در این جا بردار مکان متحرک ابتدا در جهت

محور X، (\vec{d}_1) و پس از عبور متحرک از مبدأ، در خلاف جهت محور X، (\vec{d}_2) است.

۲ بردار مکان در مبدأ مکان صفر است، پس از ابتدای حرکت تا مبدأ مختصات، اندازه بردار مکان کوچک می‌شود و پس از عبور از مبدأ مختصات تا انتهای حرکت، اندازه آن افزایش می‌یابد.

تکنیک با توجه به این که بردار مکان در مبدأ مکان صفر است و این بردار پس از عبور از مبدأ تغییر جهت می‌دهد، گزینه‌های «پیوسته» دار غلط‌اند.



۴۴. گزینه ۲ با توجه به شکل روبه‌رو:

۱ متحرک در تمام لحظه‌ها در طرف مثبت محور X بوده، پس بردار مکان متحرک، پیوسته در جهت محور X است.

۲ متحرک ابتدا به مبدأ نزدیک و سپس از آن دور شده است. پس، اندازه بردار مکان ابتدا کم و سپس زیاد می‌شود.

۴۵. گزینه ۲

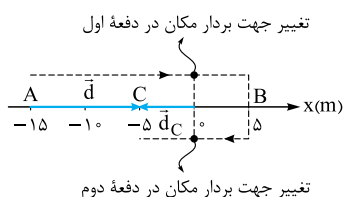
عبارت‌های (پ) و (ت) درست هستند. به بررسی عبارت‌ها می‌پردازیم:

(الف) زمانی که متحرک از مبدأ عبور کند، جهت بردار مکان عوض می‌شود. همان‌طور که در شکل روبه‌رو می‌بینید، متحرک ۲ بار از مبدأ عبور کرده است؛ بنابراین ۲ بار بردار مکان تغییر جهت می‌دهد. (نادرست بودن عبارت (الف)).

(ب) متحرک در انتهای حرکت در نقطه C قرار می‌گیرد؛ پس مطابق شکل روبه‌رو جهت بردار مکان نهایی در خلاف جهت محور X است ($\vec{d}_C = -5\vec{i}$) و از طرفی متحرک به مقدار $\vec{d} = 10\vec{i}$ جابه‌جا می‌شود. پس بردار جابه‌جایی در جهت محور X و در خلاف جهت بردار مکان نهایی است. (نادرست بودن عبارت (ب))

(پ) متحرک از B تا C، 10 m در خلاف جهت محور X حرکت کرده است پس اندازه جابه‌جایی آن برابر است با:

(درست بودن عبارت (پ))



$$\vec{d}_{BC} = -10\vec{i} \Rightarrow d_{BC} = 10\text{ m}$$

$$l = d_{AB} + d_{BC} = |5 - (-15)| + |-5 - 5| = 20 + 10 = 30\text{ m}$$

(ت) مسافت پیموده شده برابر مجموع اندازه جابه‌جایی‌ها از A تا B و B تا C است:

$$\frac{l}{d} = \frac{30}{10} = 3$$

پس با توجه به این که اندازه جابه‌جایی برابر $d = 10\text{ m}$ است، داریم:

(درست بودن عبارت (ت))

۴۶. گزینه ۳

محاسبه اندازه جابه‌جایی: مطابق شکل متحرک از مکان x_1 به مکان x_3 رفته است؛ پس اندازه

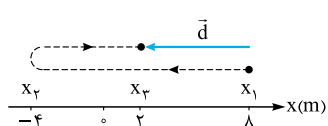
$$d = |8 - 2| = 6\text{ m}$$

جابه‌جایی آن برابر است با:

محاسبه مسافت طی شده: مطابق شکل، برای آن که متحرک از x_1 به x_3 برود و سپس به x_3 ! حداقل مسافتی که باید

$$l_{\min} = |-4 - 8| + |2 - (-4)| = 18\text{ m}$$

طی کند؛ برابر است با:

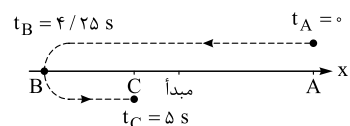


حالا متحرک اگر دلش بخواهد، می‌تواند مسافت بیشتری هم در این فاصله طی کند؛ مثلاً می‌تواند ابتدا از مکان $x_1 = 8\text{ m}$ به $x_1 = 10\text{ m}$ و بعد به مکان $x_3 = -4\text{ m}$ و در نهایت به $x_3 = 2\text{ m}$ برود. بنابراین:

$$l \geq 18\text{ m}$$

۴۷. گزینه ۴

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:



لحظه (s)	صفر	۲/۲۵	۳/۲۵	۲/۵	۴/۲۵	۵
مکان (m)	صفر	۲	-۴	-۱	-۵	-۳

۱) $2/5$ ثانیه دوم یعنی از $t = 2/5\text{ s}$ تا $t = 5\text{ s}$. با توجه به شکل بالا می‌بینیم که متحرک در $t = 4/25\text{ s}$ تغییر جهت می‌دهد. از آن‌جا که این لحظه در بازه زمانی $2/5$ ثانیه دوم است. ✓

یادآوری

m ثانیه nم یعنی بازه زمانی‌ای که از لحظه (n-1)m ثانیه شروع می‌شود و تا لحظه nm ثانیه ادامه دارد. این‌جا $m = 2/5$ و $n = 2$ است؛ پس:

$$t_1 = (2-1)(2/5\text{ s}) = 2/5\text{ s}$$

$$t_2 = (2)(2/5\text{ s}) = 4/5\text{ s}$$

۲) $0/5$ ثانیه پنجم یعنی بازه $(2\text{ s}, 2/5\text{ s})$. بردار مکان در لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ عبور می‌کند. همان‌طور که در جدول بالا می‌بینید متحرک در $t = 2/25\text{ s}$ از مبدأ عبور می‌کند که این لحظه در بازه $0/5$ ثانیه پنجم (یعنی $(2\text{ s}, 2/5\text{ s})$) قرار دارد. ✓

۳) بردار جابه‌جایی در $2/5$ ثانیه اول برابر است با:

$$\vec{x}' = \vec{x}_{2/5} - \vec{x}_0 = (-1\vec{i}) - (5\vec{i}) = -6\vec{i}$$

بردار مکان در لحظه $t = 2\text{ s}$ را نمی‌دانیم ولی به کمک جهت و شکل بالا می‌فهمیم که بردار مکان در تمام لحظه‌های قبل از $t = 2/25\text{ s}$ مثبت است. بنابراین بردار جابه‌جایی در $2/5$ ثانیه اول با بردار مکان در لحظه $t = 2\text{ s}$ هم‌جهت نیست. ✓

۴) $1/5$ ثانیه آخر حرکت یعنی از $t = 3/5\text{ s}$ تا $t = 5\text{ s}$ ؛ متحرک در این بازه زمانی از مکانی بین -4 m و -5 m حرکت کرده است و در نهایت به مکان -3 m می‌رود؛ پس جابه‌جایی‌اش مثبت است. ✗

۴۸. گزینه ۱

سرعت متوسط برابر است با جابه‌جایی تقسیم بر مدت‌زمان جابه‌جایی؛ پس:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-16 - 8}{10 - 2} = \frac{-24}{8} = -3\text{ m/s} \Rightarrow \vec{v}_{av} = -3\vec{i}$$

۴۹. گزینه ۱

سرعت متوسط کل حرکت برابر است با جابه‌جایی کل تقسیم بر کل زمان حرکت، یعنی:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x_{AO} + \Delta x_{OB}}{\Delta t_{AO} + \Delta t_{OB}} = \frac{300 + 500}{30 + 20} = \frac{800}{50} = 16\text{ m/s}$$

۵۰. گزینه ۳

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) بازیکن (الف) از $x = -6\text{ m}$ به $x = 8\text{ m}$ رفته و در این نقطه تغییر جهت داده است و به $x = 4\text{ m}$ بازگشته است؛ پس مسافت طی شده توسط این بازیکن به

$$l_{\text{الف}} = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = |8 - (-6)| + |4 - 8| = 14 + 4 = 18\text{ m}$$

صورت روبه‌رو است:

$$l_{\text{ب}} = |\Delta x'_1| + |\Delta x'_2| = |2 - 14| + |4 - 2| = 12 + 2 = 14\text{ m}$$

به همین ترتیب برای بازیکن (ب) داریم:

$$\Rightarrow l_{\text{الف}} - l_{\text{ب}} = 18 - 14 = 4\text{ m}$$

پس بازیکن (الف) 4 m بیشتر از بازیکن (ب) دویده است. ✓

۲) ابتدا جابه‌جایی‌های دو بازیکن را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x_{\text{الف}} = 4 - (-6) = 10\text{ m} \Rightarrow |\Delta x_{\text{الف}}| = 10\text{ m}$$

$$\Delta x_{\text{ب}} = 4 - 14 = -10\text{ m} \Rightarrow |\Delta x_{\text{ب}}| = 10\text{ m}$$

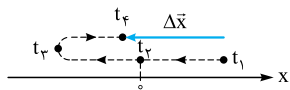
همان‌طور که می‌بینید، جابه‌جایی دو بازیکن در بازه زمانی یکسان ($0, 5\text{ s}$)، برابر است؛ پس سرعت متوسطشان هم باید برابر باشد. ✓

۳) چون در بازه $(0, 5\text{ s})$ مسافت‌ها با هم برابر نیستند؛ تندی متوسط دو بازیکن برابر نیست. ✗

۴) بازیکن (ب) همواره در قسمت مثبت محور X است؛ پس جهت بردار مکان آن تغییر نکرده است. ✓



۵۱. گزینه ۲ مطابق شکل، عبارت‌ها را بررسی می‌کنیم:



الف) اگر نقطه t_1 را به نقطه t_2 وصل کنیم، می‌بینیم که بردار جابه‌جایی $(\Delta \bar{x})$ در خلاف جهت محور x است. ✓

ب) در بازه t_1 تا t_2 متحرک در طرف منفی محور x است. پس در تمام لحظه‌های این بازه (از جمله t_2) بردار مکان منفی است. در واقع در لحظه t_2 جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند! نه جهت بردار مکان آن! ✗

پ) طبق رابطه $\bar{v}_{av} = \frac{\Delta \bar{x}}{\Delta t}$ ، بردار سرعت متوسط هم‌جهت با جابه‌جایی است؛ با توجه به این، چه در بازه زمانی t_1 تا t_2 ، چه t_2 تا t_3 ، بردار سرعت متوسط در خلاف جهت محور x است؛ چرا که متحرک در خلاف محور x جابه‌جا شده است. ✗

ت) در بازه t_1 تا t_2 چون متحرک در بخش منفی محور است! بردار مکان آن خلاف جهت محور x است. از طرفی چون متحرک در این بازه، در جهت مثبت محور جابه‌جا شده است بردار سرعت متوسط در جهت محور x است. ✓

۵۲. گزینه ۳ کافی است اطلاعات مفید مسئله (یعنی اطلاعات ابتدا و انتهای حرکت) را در فرمول $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ جای‌گذاری کنیم:

$$v_{av} = \frac{x_2 - x_0}{t_2 - t_0} = \frac{20 - (-40)}{10 - 0} = \frac{60}{10} = 6 \text{ m/s}$$

(همین‌طور که دیدید $t_1 = 6 \text{ s}$ و $x_1 = 100 \text{ m}$ اطلاعات بی‌مصرف و اضافی بود.)

۵۳. گزینه ۴ گام اول: ابتدا باید مسافت طی‌شده را حساب کنیم. مطابق گفته سؤال، متحرک فقط در لحظه t_2 تغییر جهت می‌دهد؛ بنابراین:

$$l = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| = |-60 - 10| + |30 - (-60)| = 70 + 90 = 160 \text{ m}$$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{160}{8} = 20 \text{ m/s}$$

گام دوم: حالا به سراغ رابطه تندی متوسط می‌رویم تا مقدار آن معلوم شود:

۵۴. گزینه ۲ با استفاده از تعریف سرعت متوسط داریم:

$$\bar{v}_{av} = \frac{\bar{d}_2 - \bar{d}_1}{\Delta t} \Rightarrow 2\bar{i} = \frac{\bar{d}_2 - (-4\bar{i})}{11 - 4} \Rightarrow 2\bar{i} = \frac{\bar{d}_2 + 4\bar{i}}{7} \Rightarrow 14\bar{i} = \bar{d}_2 + 4\bar{i} \Rightarrow \bar{d}_2 = 10\bar{i}$$

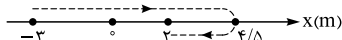
۵۵. گزینه ۲ متحرک با اندازه سرعت متوسط 4 m/s در خلاف جهت محور y حرکت می‌کند، پس بردار سرعت متوسط متحرک در مدت 4 s در SI به صورت $\bar{v}_{av} = -4\bar{j}$ می‌شود، پس براساس تعریف سرعت متوسط داریم:

$$\bar{v}_{av} = \frac{\bar{d}}{\Delta t} \Rightarrow -4\bar{j} = \frac{\bar{d}}{4} \Rightarrow \bar{d} = -16\bar{j} \Rightarrow \bar{y}_2 - \bar{y}_1 = -16\bar{j} \Rightarrow \bar{y}_2 - (-8\bar{j}) = -16\bar{j} \Rightarrow \bar{y}_2 = -24\bar{j}$$

۵۶. گزینه ۳ گام اول: سرعت متوسط دو متحرک با هم برابر است؛ پس با مساوی قرار دادن رابطه سرعت‌ها به راحتی مکان نهایی متحرک B را حساب می‌کنیم:

$$\bar{v}_{av,B} = \bar{v}_{av,A} \Rightarrow \frac{\bar{d}_B}{\Delta t} = \frac{\bar{d}_A}{\Delta t} \Rightarrow \bar{d}_{r,B} - \bar{d}_{1,B} = \bar{d}_{r,A} - \bar{d}_{1,A} \Rightarrow \bar{d}_{r,B} - (-3\bar{i}) = -5\bar{i} - (-10\bar{i}) \Rightarrow \bar{d}_{r,B} = (-5 + 10 - 3)\bar{i} = 2\bar{i}$$

گام دوم: حالا باید مسافت طی‌شده توسط متحرک B را محاسبه کنیم. این متحرک روی خط راست ابتدا از مکان $-3\bar{i}$ به مکان $4/\delta\bar{i}$ می‌رود و سپس تغییر جهت می‌دهد و به مکان $2\bar{i}$ می‌رود. در شکل روبه‌رو مسیر حرکت متحرک B را نشان داده‌ایم، پس مسافت طی‌شده برابر است با:



$$l_B = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = |4/5 - (-3)| + |2 - (4/5)| = 7/5 + 2/5 = 10 \text{ m}$$

$$s_{av,B} = \frac{l_B}{\Delta t} = \frac{10}{2/5} = 4 \text{ m/s}$$

گام سوم: با داشتن مسافت، تندی متوسط متحرک B حساب می‌شود:

۵۷. گزینه ۱ گام اول: ابتدا مکان اولیه دو متحرک را تعیین می‌کنیم:

$$\bar{v}_{av,A} = \frac{\bar{d}_A}{\Delta t} = \frac{\bar{y}_{2,A} - \bar{y}_{1,A}}{\Delta t} \Rightarrow -2\bar{j} = \frac{2\bar{j} - \bar{y}_{1,A}}{2} \Rightarrow -4\bar{j} = 2\bar{j} - \bar{y}_{1,A} \Rightarrow \bar{y}_{1,A} = 6\bar{j}$$

$$\bar{v}_{av,B} = \frac{\bar{d}_B}{\Delta t} = \frac{\bar{y}_{2,B} - \bar{y}_{1,B}}{\Delta t} \Rightarrow 2\bar{j} = \frac{-2\bar{j} - \bar{y}_{1,B}}{2} \Rightarrow 4\bar{j} = -2\bar{j} - \bar{y}_{1,B} \Rightarrow 6\bar{j} = -\bar{y}_{1,B} \Rightarrow \bar{y}_{1,B} = -6\bar{j}$$

گام دوم: با این حساب، فاصله دو متحرک در لحظه $t = 0$ برابر است با:

$$\Delta y = |\bar{y}_{1,A} - \bar{y}_{1,B}| = |6\bar{j} - (-6\bar{j})| = |12\bar{j}| = 12 \text{ m}$$

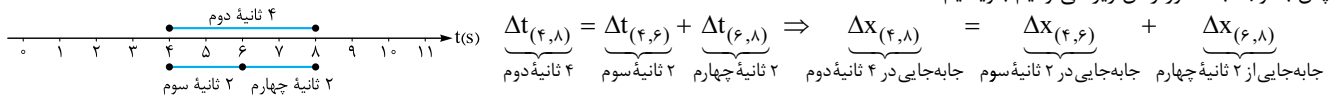
۵۸. گزینه ۲ گام اول: برای حل این تست کافی است معنی بازه‌های زمانی داده‌شده را بدانیم.

۲ ثانیه چهارم یعنی بازه زمانی 6 s تا 8 s

۲ ثانیه سوم یعنی بازه زمانی 4 s تا 6 s

۴ ثانیه دوم یعنی بازه زمانی 4 s تا 8 s

پس با توجه به محور زمان زیر می‌توانیم بنویسیم:



$$\Delta t_{(4,8)} = \Delta t_{(4,6)} + \Delta t_{(6,8)} \Rightarrow \Delta x_{(4,8)} = \Delta x_{(4,6)} + \Delta x_{(6,8)}$$

جابه‌جایی در ۴ ثانیه دوم و جابه‌جایی در ۲ ثانیه چهارم را داریم و جابه‌جایی در ۲ ثانیه سوم را می‌خواهیم: $18 = \Delta x_{(4,6)} + 12 \Rightarrow \Delta x_{(4,6)} = 18 - 12 = 6 \text{ m}$

$$v_{av(4,6)} = \frac{\Delta x_{(4,6)}}{\Delta t} = \frac{6}{2} = 3 \text{ m/s}$$

گام دوم: فقط می‌ماند محاسبه سرعت متوسط در ۲ ثانیه سوم:

۵۹. گزینه ۴ گام اول: چون سرعت متوسط متحرک در ۵ ثانیه اول را می‌دانیم، ابتدا مکان اولیه متحرک (x_0) را به دست می‌آوریم:

$$v_{av(0,5)} = \frac{x_2 - x_0}{t - 0} \Rightarrow 1 = \frac{4 - x_0}{5 - 0} \Rightarrow 5 = 4 - x_0 \Rightarrow x_0 = -1 \text{ m}$$

گام دوم: از آنجا که متحرک فقط در لحظه t_1 تغییر جهت داده، می توان گفت متحرک ابتدا از x_0 تا x_1 رفته و سپس از x_1 تا x_2 برگشته؛ با این حساب مسافت طی شده در Δt ثانیه اول برابر است با:

$$l = |x_1 - x_0| + |x_2 - x_1| = |10 - (-1)| + |4 - 10| = 11 + 6 = 17 \text{ m}$$

گام سوم: با داشتن مسافت طی شده، محاسبه تندی متوسط کاری ندارد:

$$s_{av(\Delta t)} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{17}{4} \text{ m/s}$$

۶۰. گزینه ۴ گام اول: ابتدا با توجه به داشتن سرعت متوسط متحرک از نقطه A تا B، مکان نقطه B (x_B) را پیدا می کنیم:

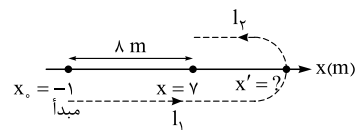
$$v_{av, AB} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} \Rightarrow -2 = \frac{x_B - (-2)}{4} \Rightarrow x_B + 2 = -10 \Rightarrow x_B = -12 \text{ m}$$

گام دوم: حالا یک بار دیگر رابطه سرعت متوسط را برای نقطه B تا C می نویسیم تا مکان نقطه C (x_C) به دست آید:

$$v_{av, BC} = \frac{x_C - x_B}{t_C - t_B} \Rightarrow 4 = \frac{x_C - (-12)}{4} \Rightarrow x_C + 12 = 20 \Rightarrow x_C = 8 \text{ m} \Rightarrow \bar{x}_C = 8\hat{i}$$

۶۱. گزینه ۲ گام اول: ابتدا به کمک رابطه سرعت متوسط، مکان نهایی جسم را حساب می کنیم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow 2 = \frac{x - (-1)}{4} \Rightarrow x = 8 - 1 = 7 \text{ m}$$



گام دوم: از آنجایی که متحرک یک بار تغییر جهت داده است، مسیر حرکت مانند شکل روبه رو است. متحرک از مکان $x_0 = -1 \text{ m}$ ، مسافت l_1 را می پیماید تا در نقطه x' تغییر جهت دهد و مسافت l_2 را طی می کند تا به مکان نهایی ($x = 7 \text{ m}$) برسد. با این اطلاعات به سراغ رابطه تندی متوسط می رویم:

$$s_{av} = \frac{l_{\text{کل}}}{\Delta t} = \frac{l_1 + l_2}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{l_1 + l_2}{4} \Rightarrow l_1 + l_2 = 20 \text{ m}$$

گام سوم: با توجه به شکل l_1 به اندازه 8 m بیشتر از l_2 است. پس داریم:

$$l_1 + l_2 = 20 \text{ m} \xrightarrow{l_1 = l_2 + 8} (l_2 + 8) + l_2 = 20 \Rightarrow 2l_2 = 12 \Rightarrow l_2 = 6 \text{ m}$$

پس $x' = x + 6 = 7 + 6 = 13 \text{ m} \Rightarrow \bar{x}' = (13 \text{ m})\hat{i}$

در شکل مشخص است که بزرگ ترین بردار مکان این متحرک همین \bar{x}' است.

۶۲. گزینه ۴ در این تست، برای محاسبه سرعت متوسط کل از رابطه $v_{av, \text{کل}} = \frac{\Delta x_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}}$ کمک می گیریم. متحرک در دو بازه زمانی متوالی $\frac{\Delta t}{4}$ و $\frac{3\Delta t}{4}$ (یعنی $\Delta t - \frac{\Delta t}{4} = \frac{3\Delta t}{4}$) حرکت کرده است. پس داریم:

$$v_{av, \text{کل}} = \frac{\Delta x_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t_{\text{کل}}} \xrightarrow{\Delta x = v_{av} \Delta t} v_{av, \text{کل}} = \frac{v_{av, 1} \Delta t_1 + v_{av, 2} \Delta t_2}{\Delta t_{\text{کل}}} = \frac{-8 \times \frac{\Delta t}{4} + 12 \times \frac{3\Delta t}{4}}{\Delta t} = \frac{-2\Delta t + 9\Delta t}{\Delta t} = 7\hat{i}$$

۶۳. گزینه ۴ گام اول: این متحرک دو جابه جایی متوالی $\Delta x_1 = -\frac{\Delta x}{4}$ و Δx_2 را با سرعت های متوسط -15 m/s و 25 m/s پیموده است. اول Δx_2 را برحسب جابه جایی کل (Δx) به دست می آوریم:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2 = \Delta x - \Delta x_1 = \Delta x - (-\frac{\Delta x}{4}) = \frac{5\Delta x}{4}$$

گام دوم: حالا می توانیم با رابطه $v_{av, \text{کل}} = \frac{\Delta x_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}}$ به جواب برسیم. از آنجا که کل Δt داده نشده است، معادل آن را در رابطه قرار می دهیم:

$$v_{av, \text{کل}} = \frac{\Delta x_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}} = \frac{\Delta x}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \xrightarrow{\Delta t = \frac{\Delta x}{v_{av}}} v_{av, \text{کل}} = \frac{\Delta x}{\frac{\Delta x_1}{v_{av, 1}} + \frac{\Delta x_2}{v_{av, 2}}} = \frac{\Delta x}{\frac{-\Delta x}{-15} + \frac{5\Delta x}{25}} = \frac{\Delta x}{\frac{\Delta x}{60} + \frac{\Delta x}{20}} = \frac{\Delta x}{\frac{4\Delta x}{60}} = \frac{60}{4} = 15 \text{ m/s}$$

۶۴. گزینه ۲ گام اول: ابتدا Δx_2 را حساب می کنیم:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2 = \Delta x - \Delta x_1 = \Delta x - (-\frac{\Delta x}{4}) = \frac{5\Delta x}{4}$$

گام دوم: با توجه به این که متحرک فقط یک بار تغییر جهت داده است، پس متحرک دو مسافت متوالی $l_1 = |\Delta x_1|$ و $l_2 = \Delta x_2$ را پیموده است و داریم:

$$s_{av, \text{کل}} = \frac{l_1 + l_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{|\frac{-\Delta x}{4}| + \frac{5\Delta x}{4}}{\frac{\Delta x_1}{v_{av, 1}} + \frac{\Delta x_2}{v_{av, 2}}} = \frac{\frac{6\Delta x}{4}}{\frac{-\Delta x}{-15} + \frac{5\Delta x}{25}} = \frac{\frac{3}{2}\Delta x}{\frac{\Delta x}{60} + \frac{\Delta x}{20}} = \frac{\frac{3}{2}\Delta x}{\frac{4\Delta x}{60}} = \frac{180}{8} = 22.5 \text{ m/s}$$

۶۵. گزینه ۲ برای به دست آوردن بردار مکان اولیه تنها کافی است $t = 0$ را در معادله مکان - زمان قرار دهیم:

$$x = 3 \cos \pi t + 5t^2 - 7 \xrightarrow{t=0} x_0 = 3 \cos \pi(0) + 5(0)^2 - 7 \Rightarrow x_0 = 3 + 0 - 7 = -4 \text{ m} \Rightarrow \bar{x}_0 = -4\hat{i} \text{ (m)}$$

۶۶. گزینه ۱ مبدأ مکان یعنی $x = 0$ و مبدأ زمان یعنی $t = 0$ ، برای حل این تست کافی است در معادله مکان - زمان یعنی $x(t) = t^4 - 2t + 2$ ، یک بار $t = 0$ و یک بار $t = 2 \text{ s}$ را قرار دهیم:

$$\begin{cases} t = 0 \Rightarrow x_0 = (0)^4 - 2(0) + 2 = 2 \text{ m} \\ t = 2 \text{ s} \Rightarrow x_2 = (2)^4 - 2(2) + 2 = 16 - 4 + 2 = 14 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \frac{x_2}{x_0} = \frac{d}{d_0} = \frac{14}{2} = 7$$

۶۷. گزینه ۲ کافی است $t_1 = 2 \text{ s}$ و $t_0 = 0$ را در معادله حرکت قرار دهیم و x_1 و x_0 را به دست آوریم:

$$\begin{cases} t_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 2(0)^3 + 6(0) - 2 = -2 \text{ m} \\ t_1 = 2 \text{ s} \Rightarrow x_1 = 2(2)^3 + 6(2) - 2 = 26 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_1 - x_0 = 26 - (-2) = 28 \text{ m}$$

تکنیک برای محاسبه جابه جایی در 2 ثانیه اول کافی است معادله مکان - زمان را به صورت $\Delta x = 2t^3 + 6t$ بنویسیم و مقدار $t = 2 \text{ s}$ را در آن

$$\Delta x = 2(2)^3 + 6(2) = 16 + 12 = 28 \text{ m}$$

قرار دهیم:



۶۸. **گزینه ۴** مبدأ حرکت (x_0) یعنی مکان متحرک در لحظه $t = 0$ ؛ با توجه به این نکته، با جای گذاری $t = 0$ و $t = 3$ s در معادله مکان - زمان، فاصله متحرک از مبدأ حرکت را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} t = 0 \Rightarrow x_0 = (0)^3 - (0) - 4 = -4 \text{ m} \\ t = 3 \Rightarrow x_3 = (3)^3 - 3 - 4 = 20 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow x_3 - x_0 = 20 - (-4) = 24 \text{ m}$$

تکنیک این تست در واقع جابه جایی در بازه صفر تا ۳ s را می خواهد. کافی است معادله را به صورت $\Delta x = t^3 - t$ بنویسید و به جای $t, 3$ s را قرار دهید تا به جواب برسید:

$$\Delta x = (3)^3 - 3 = 24 \text{ m}$$

۶۹. **گزینه ۳** **گام اول:** ثانیه دوم حرکت یعنی از $t_1 = 1$ s تا $t_2 = 2$ s، پس ابتدا $t_1 = 1$ s را در معادله مکان - زمان یعنی $x = 2t^2 - 4$ قرار می دهیم و x_1 را به دست می آوریم:

$$x = 2t^2 - 4 \xrightarrow{t_1=1s} x_1 = 2(1)^2 - 4 = 2 - 4 = -2 \text{ m}$$

$$x = 2t^2 - 4 \xrightarrow{t_2=2s} x_2 = 2(2)^2 - 4 = 8 - 4 = 4 \text{ m}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 4 - (-2) = 6 \text{ m} \Rightarrow \Delta \bar{x} = 6 \hat{i}$$

۷۰. **گزینه ۱** برای به دست آوردن جابه جایی در بازه زمانی $(1s, 2s)$ کافی است. مکان متحرک در $t_2 = 2$ s را منهای مکان متحرک در $t_1 = 1$ s کنیم:

$$y = \Delta \sin \frac{\pi t}{2} + 3t - 4 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1s \Rightarrow y_1 = \Delta \sin(\frac{\pi(1)}{2}) + 3(1) - 4 = 4 \text{ m} \\ t_2 = 2s \Rightarrow y_2 = \Delta \sin(\frac{\pi(2)}{2}) + 3(2) - 4 = 2 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \vec{d} = (y_2 - y_1)\vec{j} = (2 - 4)\vec{j} = -2\vec{j}$$

۷۱. **گزینه ۲** **گام اول:** ۲ ثانیه دوم حرکت یعنی از $t_1 = 2$ s تا $t_2 = 4$ s، در این بازه جابه جایی را به دست می آوریم:

$$x = t^2 - 3t - 8 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2s \Rightarrow x_1 = 2^2 - 3(2) - 8 = 4 - 6 - 8 = -10 \text{ m} \\ t_2 = 4s \Rightarrow x_2 = 4^2 - 3(4) - 8 = 16 - 12 - 8 = -4 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = -4 - (-10) = 6 \text{ m}$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{6}{2} = 3 \text{ m/s}$$

گام دوم: حالا اندازه سرعت متوسط متحرک را به دست می آوریم:

۷۲. **گزینه ۳** در $x = \pm 3$ m، فاصله متحرک از مبدأ مکان ۳ m می شود؛ بنابراین:

$$\begin{cases} 3 = 4t - 7 \Rightarrow 4t = 10 \Rightarrow t = 2.5 \text{ s} \\ -3 = 4t - 7 \Rightarrow 4t = 4 \Rightarrow t = 1 \text{ s} \end{cases}$$

۷۳. **گزینه ۳** برای این که ببینیم در چه لحظه ای بردار مکان $-7\hat{i}$ می شود؛ باید $x = -7$ را در معادله قرار دهیم تا مقدار t مشخص شود:

$$-7 = 2t^2 - 3t - 16 \Rightarrow 2t^2 - 3t - 9 = 0 \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(2)(-9) \Rightarrow \Delta = 9 + 72 = 81 \Rightarrow t_1, t_2 = \frac{3 \pm 9}{2(2)} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \text{ s} \\ t_2 = -\frac{3}{2} \text{ s} \end{cases}$$

دقت کنید که $t_1 = 3$ s می شود ابتدای ثانیه چهارم؛ ثانیه چهارم یعنی بازه زمانی $(3s, 4s)$ ؛ امیدواریم اشتباه نکرده باشید و **۲** رو زده باشید!

یادآوری ثانیه n ام یعنی از $(n-1)$ ثانیه تا n ثانیه.

تکنیک یک راه ساده تر برای حل این تست، جای گذاری گزینه ها در معادله است؛ یعنی:

$$t = 3s \Rightarrow x = 2(3)^2 - 3(3) - 16 = 18 - 9 - 16 = -7 \text{ m} \checkmark$$

۷۴. **گزینه ۳** متحرک در لحظه هایی که x در معادله مکان - زمان صفر می شود (ریشه های معادله مکان - زمان) از مبدأ عبور می کند؛ پس:

$$x = 0 \Rightarrow 0 = (t-2)(t+3)(t+4) \Rightarrow t = \begin{cases} -4 \text{ s (غ ق ق)} \\ -3 \text{ s (غ ق ق)} \\ 2 \text{ s (ق ق)} \end{cases}$$

زمان نمی تواند منفی باشد؛ پس فقط $t = 2$ s قابل قبول است.

۷۵. **گزینه ۳** می خواهیم بدانیم در چه لحظه ای متحرک برای دومین بار از مبدأ عبور می کند؛ بنابراین باید بفهمیم کی $y = 0$ می شود:

$$y = 0 \Rightarrow 0 = -t^2 + 8t - 15 \xrightarrow{\text{تجزیه}} 0 = -(t-3)(t-5) \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \text{ s} \\ t_2 = 5 \text{ s} \end{cases}$$

بنابراین متحرک بار اول در $t_1 = 3$ s و بار دوم در $t_2 = 5$ s از مبدأ عبور می کند.

۷۶. **گزینه ۱** لحظه هایی که متحرک از مبدأ مکان عبور می کند، بردار مکان آن تغییر جهت می دهد. پس باید در معادله مکان - زمان، x را مساوی صفر قرار دهیم تا این لحظات را پیدا کنیم:

$$x = 0 \Rightarrow 0 = (t-4)(t^2 - 6t + 5) = (t-4)(t-5)(t-1) \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ s} \\ t = 4 \text{ s} \\ t = 5 \text{ s} \end{cases}$$

در این لحظه ها متحرک از مبدأ مکان عبور می کند و بردار مکان آن تغییر جهت می دهد.

۷۷. **گزینه ۴** بردار مکان در لحظه ای تغییر جهت می دهد که متحرک از مبدأ عبور کند و در واقع از یک طرف آن به طرف دیگر برود. این حالت در ریشه های ساده معادله مکان - زمان رخ می دهد؛ پس باید ریشه های ساده معادله $x = t^2 - 6t + 10$ را به دست آوریم. برای همین سراغ به دست آوردن دلتای معادله $(\Delta = b^2 - 4ac)$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(10) = 36 - 40 = -4$$

می رویم که ببینیم معادله ریشه ساده دارد یا نه:

دلتا منفی است. همان طور که می دانید وقتی Δ منفی است، معادله درجه دو، ریشه ندارد؛ پس بردار مکان متحرک تغییر جهت نمی دهد.

۷۸. گزینه ۱

هر وقت متحرک از مبدأ مکان عبور می کند، $x = 0$ می شود، پس x را برابر صفر قرار می دهیم.

$$\begin{cases} x_A = 0 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ s} \\ x_B = 0 \Rightarrow t^2 - t - 6 = 0 \Rightarrow (t-3)(t+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \text{ s} \\ t = -2 \text{ s} \end{cases} \end{cases}$$

(در این جا یک بار عبور کرده) غرق *

۷۹. گزینش باشه

در حل معادله مکان - زمان، به ازای $x = 0$ ، فقط وقتی ریشه معمولی و $t > 0$ باشد، متحرک از مبدأ عبور کرده است. گفتیم که جهت بردار مکان فقط در ریشه های ساده معادله مکان - زمان تغییر جهت می دهد؛ پس برای حل این تست باید مثل تست قبل ریشه های ساده معادله مکان - زمان را تعیین کنیم. چون معادله درجه سه است از تجزیه کمک می گیریم:

$$x = t^3 - 4t^2 + 4t = t(t^2 - 4t + 4) = t(t-2)^2 = 0 \Rightarrow t = \begin{cases} 0 & \text{(ریشه ساده)} \\ 2 \text{ s} & \text{(ریشه مضاعف)} \end{cases}$$

$t = 2 \text{ s}$ چون ریشه مضاعف است؛ در آن تغییر علامت اتفاق نمی افتد؛ پس کاری به آن نداریم! (در واقع متحرک در لحظه $t = 2 \text{ s}$ به مبدأ می رسد ولی از آن عبور نمی کند) می ماند $t = 0$ ، در این لحظه متحرک در مبدأ قرار دارد، ولی چون قبل از آن زمان منفی است و عملاً بازه مورد بررسی ما وجود ندارد، در این لحظه هم تغییر جهت بردار مکان نداریم. (با این که $t = 0$ ریشه ساده است.)

۸۰. گزینه ۲

زمانی سرعت متوسط متحرک صفر می شود که جابه جایی صفر باشد، $(v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t})$ ؛ بنابراین باید مکان متحرک در لحظه T برابر با مکان اولیه آن باشد؛ یعنی:

$$x = x_0 \Rightarrow T^2 - 6T + 6 = 0 \Rightarrow T(T-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} T = 0 \text{ s} \\ T = 6 \text{ s} \end{cases}$$

تکنیک

برای محاسبه جابه جایی از لحظه صفر تا T ، می توانید لحظه T را در معادله $\Delta x = t^2 - 6t$ قرار دهید:

$$\Delta x = T^2 - 6T = 0 \Rightarrow T(T-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} T = 0 \text{ s} \\ T = 6 \text{ s} \end{cases}$$

۸۱. گزینش ۲ گام اول: سرعت متوسط متحرک را برای ثانیه دوم (یعنی از $t = 1 \text{ s}$ تا $t = 2 \text{ s}$) می نویسیم:

$$\bar{v}_{av} = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow -3\bar{i} = \frac{[(2)^2 + 2A + B - (1)^2 - A - B]\bar{i}}{2-1} \Rightarrow -3 = 1 + A \Rightarrow A = -4$$

گام دوم: حالا به سراغ جای گذاری داده های متحرک در لحظه $t = 3 \text{ s}$ می رویم تا مقدار B هم معلوم شود:

$$2\bar{i} = [(3)^2 - 1 \cdot (3) + B]\bar{i} \Rightarrow 2 = -3 + B \Rightarrow B = 5$$

$$\frac{A}{B} = -\frac{4}{5} = -0.8$$

گام سوم: می ماند محاسبه نسبت $\frac{A}{B}$:

درس چهارم نمودار مکان - زمان در حرکت راست خط

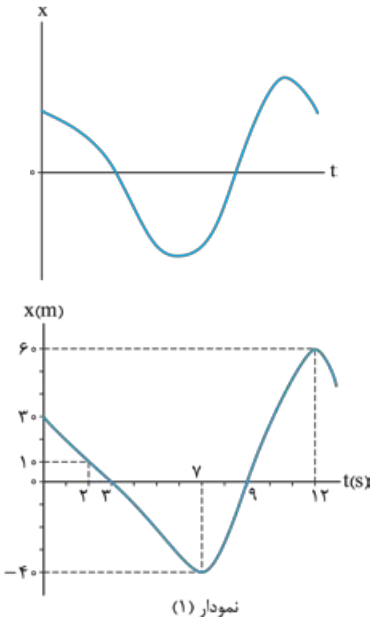


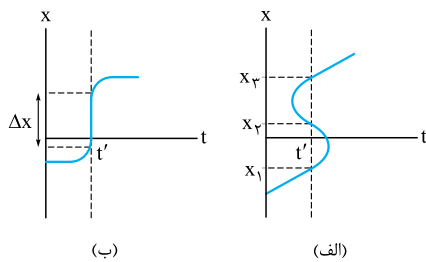
یک روش برای مشخص کردن مکان متحرک در هر لحظه، رسم نمودار مکان - زمان آن است. (در واقع نمودار مکان - زمان، همان معادله مکان - زمان است ولی به صورت نمودار!) محور قائم این نمودار، محور مکان (x) است (که هم قسمت منفی دارد و هم مثبت) و محور افقی این نمودار، محور زمان (t) است (که فقط قسمت مثبت دارد). مثلاً شکل روبه رو، نمودار مکان - زمان متحرکی است که بر روی محور x حرکت می کند.

آنچه از نمودار مکان - زمان می توانیم بفهمیم

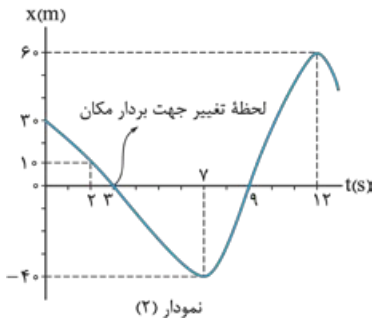
نمودار مکان - زمان همه اطلاعات حرکت جسم را در خود دارد که ما به کمک نمودار روبه رو (نمودار (۱)) بعضی از آن ها را الان می گوئیم:

- ۱. تعیین مکان متحرک در هر لحظه • هر نقطه از نمودار مکان - زمان نشان می دهد که متحرک در هر لحظه در کجای محور x است. مثلاً در نمودار (۱) متحرک در لحظه $t = 0$ در مکان $x_0 = 3 \text{ m}$ و در لحظه های $t = 3 \text{ s}$ و $t = 9 \text{ s}$ در مبدأ مکان ($x = 0$) است و در لحظه $t = 2 \text{ s}$ در مکان $x = 1 \text{ m}$ و در لحظه $t = 7 \text{ s}$ در مکان $x = -4 \text{ m}$ است.

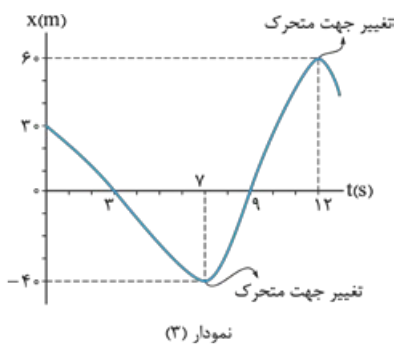




حواستون باشه متحرک نمی‌تواند در یک لحظه دو یا چند جا باشد. در واقع اگر از هر جای نمودار یک خط عمود بر محور t رسم کنیم، باید فقط از یک نقطه از نمودار عبور کند. مثلاً در شکل (الف) متحرک در لحظه t' هم‌زمان در سه نقطه X_1 ، X_2 و X_3 و در شکل (ب) متحرک در بی‌شمار نقطه در محدوده Δx قرار دارد که چنین حالت‌هایی غیرممکن است.



۲. تعیین لحظه‌های تغییر جهت بردار مکان در لحظه‌هایی که نمودار محور t را قطع می‌کند، متحرک در حال عبور از مبدأ مکان است. می‌دانید که با عبور متحرک از مبدأ مکان صفر شده و تغییر جهت می‌دهد. پس در لحظه‌هایی که نمودار محور t را قطع می‌کند، بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد. مثلاً در نمودار (۲) متحرک در لحظه $t = 3$ s از طرف مثبت محور x به طرف منفی آن می‌رود و بردار مکان از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد. (حالا شما بگویید در این نمودار در چه لحظه دیگری بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد؟)



۳. محاسبه جابه‌جایی برای هر بازه زمانی دلخواه می‌توانیم جابه‌جایی را حساب کنیم. مثلاً در نمودار (۲) متحرک در بازه زمانی (۲ s, ۱۲ s) از مکان $x_2 = 10$ m به مکان $x_{12} = 60$ m رفته است.

پس جابه‌جایی آن در این بازه زمانی برابر است با: $\Delta x_{(2,12)} = x_{12} - x_2 = 60 - 10 = 50$ m

۴. تعیین لحظه‌های تغییر جهت متحرک نقطه‌های اکسترمم (بیشینه و کمینه) نمودار، نشان‌دهنده لحظه‌های تغییر جهت متحرک است. مثلاً در نمودار (۳) متحرک در لحظه $t = 7$ s در مکان $x_7 = -40$ m و در لحظه $t = 12$ s در مکان $x_{12} = 60$ m تغییر جهت داده است.

۵. تشخیص جهت حرکت هر جا که شیب نمودار، مثبت (نمودار صعودی) باشد، یعنی متحرک در جهت مثبت محور x حرکت کرده و هر جا که شیب نمودار منفی (نمودار نزولی) باشد، یعنی متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کرده است. مثلاً در نمودار (۳) متحرک در بازه زمانی صفر تا ۷ s در جهت منفی و در بازه زمانی ۷ s تا ۱۲ s در جهت مثبت محور x حرکت کرده است.

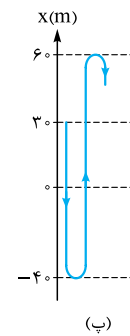
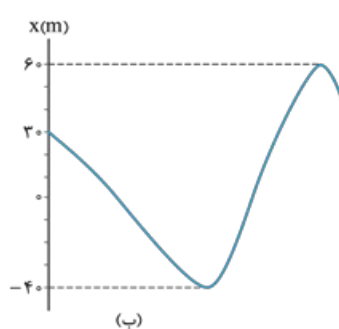
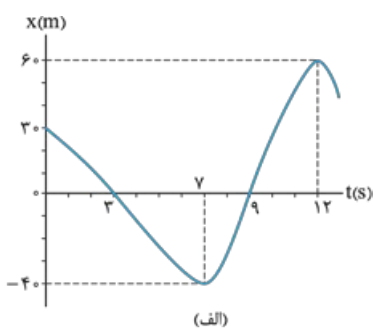
۶. محاسبه مسافت در یک بازه زمانی معین با توجه به مکان‌های تغییر جهت متحرک، می‌توانیم مسافت طی شده را برای هر بازه زمانی دلخواه حساب کنیم. مثلاً در نمودار (۳) متحرک در بازه زمانی (۰, ۱۲ s) ابتدا از مکان $x_0 = 30$ m در جهت منفی محور x به مکان $x_7 = -40$ m و سپس در جهت مثبت محور x از مکان $x_7 = -40$ m به مکان $x_{12} = +60$ m رفته است؛ یعنی ۷۰ m در جهت منفی و ۱۰۰ m در جهت مثبت پیموده است که جمعاً می‌شود ۱۷۰ m:

$$l = |x_7 - x_0| + |x_{12} - x_7| = |-40 - 30| + |60 - (-40)| \Rightarrow l = 70 + 100 = 170 \text{ m}$$

۷. رسم مسیر حرکت به کمک نمودار مکان-زمان برای رسم مسیر حرکت از روی نمودار مکان-زمان کافی است دو تا کار انجام دهیم.

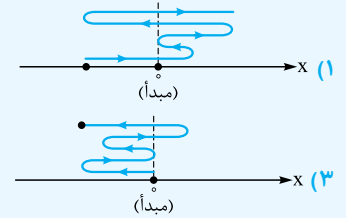
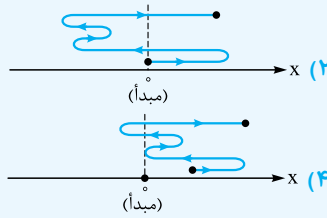
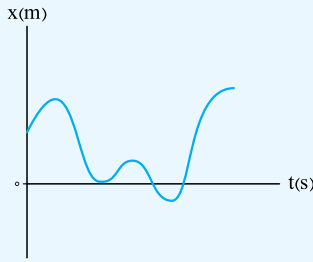
اول: محور t را حذف می‌کنیم. (شکل ب)

دوم: نمودار را از دو طرف می‌فشریم و با فلش مسیر حرکت را مشخص می‌کنیم (شکل پ).

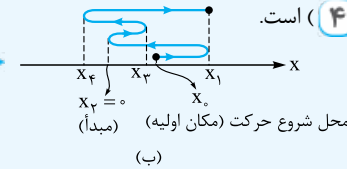
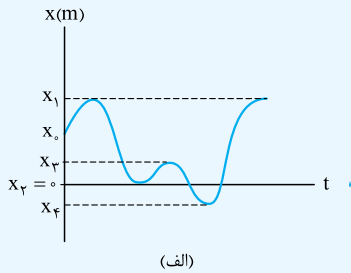


قبل از این که بقیه نکته‌ها را ببینیم، در چند تست کاربرد همه نکته‌های بالا را با هم مرور می‌کنیم:

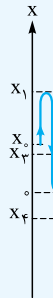
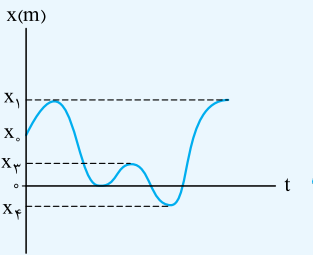
تست ۱ نمودار مکان - زمان متحرکی مطابق شکل مقابل است. کدام گزینه مسیر حرکت این متحرک را بر روی محور X درست نشان می‌دهد؟



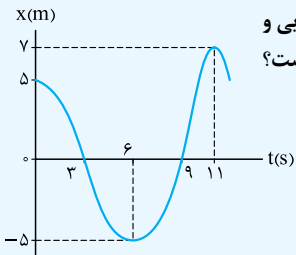
پاسخ ۱ همین‌طور که در نمودار مکان - زمان می‌بینید، متحرک از مکان $X_0 > 0$ در جهت مثبت محور X شروع به حرکت کرده و برای اولین بار در X_1 ، دومین بار در $X_2 = 0$ ، سومین بار X_3 و چهارمین بار در X_4 تغییر جهت داده است. با توجه به مکان‌های تغییر جهت، مسیر حرکت متحرک بر روی محور X مطابق شکل ب (۴) است.



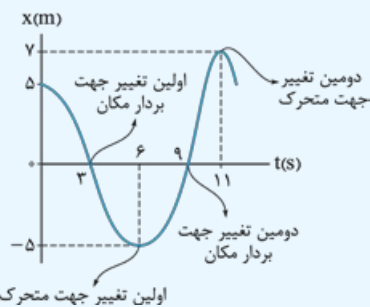
تکنیک برای این‌که مسیر حرکت را از روی نمودار مکان - زمان تشخیص بدهیم، کافی است محور زمان را حذف کنیم و نمودار را از دو طرف فشرده کنیم! مثل شکل مقابل.



تست ۲ شکل روبه‌رو، نمودار مکان - زمان متحرکی است که روی محور X حرکت می‌کند. به ترتیب اندازه جابه‌جایی و مسافتی که متحرک از لحظه اولین تغییر جهت بردار مکانش تا لحظه دومین تغییر جهت حرکتش می‌پیماید، چند متر است؟



- (۱) ۵ و ۵
- (۲) ۷ و ۷
- (۳) ۱۵ و ۵
- (۴) ۱۷ و ۷



پاسخ ۲ گام اول: گفتیم در لحظه‌ای که نمودار محور t را قطع می‌کند، بردار مکان تغییر جهت می‌دهد. پس مطابق شکل روبه‌رو در لحظه‌های ۳ s و ۹ s بردار مکان تغییر جهت داده است. هم‌چنین گفتیم در نقاط اکسترمم، متحرک تغییر جهت می‌دهد، پس در نمودار روبه‌رو در لحظه‌های ۶ s و ۱۱ s متحرک تغییر جهت داده است.

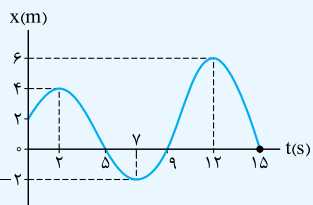
گام دوم: مطابق شکل اولین تغییر جهت بردار مکان در لحظه $t_1 = 3\text{ s}$ و دومین تغییر جهت متحرک در لحظه $t_2 = 11\text{ s}$ اتفاق افتاده است. جابه‌جایی در بازه $t_1 = 3\text{ s}$ تا $t_2 = 11\text{ s}$ برابر می‌شود با:

$$\Delta x_{(3,11)} = x_{11} - x_3 = 7 - 0 = 7\text{ m}$$

برای محاسبه مسافت باید حواسمان به تغییر جهتی که در لحظه $t' = 6\text{ s}$ اتفاق افتاده باشد، یعنی باید مسافت ۳ s تا ۶ s را با مسافت ۶ s تا ۱۱ s جمع کنیم:

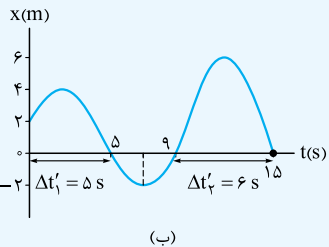
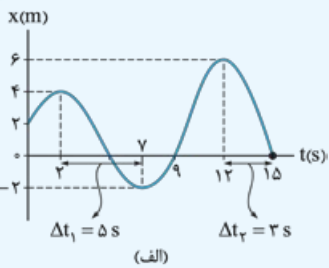
$$l_{(3,11)} = l_{(3,6)} + l_{(6,11)} = |\Delta x_{(3,6)}| + \Delta x_{(6,11)} = |-5 - 0| + 7 - (-5) = 17\text{ m}$$

تست ۳ نمودار مکان - زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. این متحرک به ترتیب از راست به چپ مجموعاً



چند ثانیه در جهت منفی محور X حرکت کرده است و چند ثانیه در طرف مثبت محور X بوده است؟

- (۱) ۸ و ۱۱
- (۲) ۴ و ۱۱
- (۳) ۵ و ۸
- (۴) ۴ و ۵



پاسخ ۱ گام اول: دقت کنید این سؤال دو چیز مختلف را پرسیده؛ اول این که متحرک چند ثانیه در جهت منفی محور X حرکت کرده است؟ برای جواب دادن به این بخش سؤال، باید ببینیم در چه بازه زمانی، شیب نمودار مکان - زمان منفی است (یعنی نمودار نزولی است).

همین طور که در شکل (الف) نشان داده ایم، در بازه زمانی (۲ s, ۷ s) و همچنین (۱۲ s, ۱۵ s) شیب نمودار منفی و متحرک در جهت منفی محور X حرکت کرده است؛ پس داریم:

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 = (7-2) + (15-12) = 5 + 3 = 8 \text{ s}$$

(۲) و (۴) غلطاند.

گام دوم: قسمت دوم سؤال می پرسد که متحرک چند ثانیه در طرف مثبت محور X بوده است؟

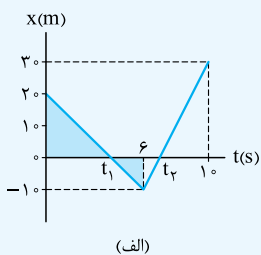
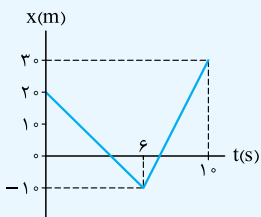
باید دقت کنیم که این جا جهت حرکت متحرک را نخواستیم بلکه جمع زمان هایی که نمودار بالای محور t است را خواسته است. در شکل (ب) می بینید که متحرک در دو بازه زمانی $\Delta t'_1$ و $\Delta t'_2$ در طرف مثبت محور X حرکت می کند:

$$\Delta t'_1 + \Delta t'_2 = (5-0) + (15-9) = 5 + 6 = 11 \text{ s}$$

(می تونستید بگید کل حرکت ۱۵ s است و متحرک ۴ s در طرف منفی محور X بوده، پس $15 - 4 = 11$ ثانیه در طرف مثبت حرکت کرده.)

تست ۱ نمودار مکان - زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می کند، مطابق شکل روبه رو است. بازه زمانی بین دو بار تغییر جهت بردار مکان چند ثانیه است؟

- ۱) ۲
- ۲) ۳
- ۳) ۴
- ۴) ۵



پاسخ ۲ می دانید که با عبور متحرک از مبدأ مکان، بردار مکان تغییر جهت می دهد. به نمودار روبه رو نگاه کنید. نمودار در لحظه های t_1 و t_2 محور t را قطع کرده است، یعنی متحرک در لحظه های t_1 و t_2 از مبدأ مکان عبور کرده است؛ پس باید این لحظه ها را پیدا کنیم. یکی از روش های حل این سؤال، کمک گرفتن از تشابه مثلث ها است. دو مثلث رنگی در شکل (الف) متشابه اند؛ پس می توانیم بنویسیم:

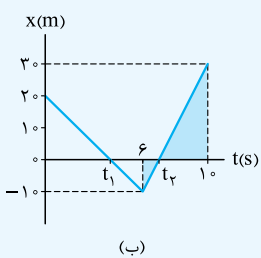
$$\frac{20}{t_1 - 0} = \frac{-10}{6 - t_1} \Rightarrow 10t_1 = 120 - 20t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{120}{30} = 4 \text{ s}$$

با همین روش لحظه t_2 را هم حساب می کنیم. در شکل (ب) نسبت تشابه دو مثلث رنگی را می نویسیم:

$$\frac{30}{10 - t_2} = \frac{-10}{t_2 - 6} \Rightarrow 30t_2 - 180 = 100 - 10t_2 \Rightarrow 40t_2 = 280 \Rightarrow t_2 = 7 \text{ s}$$

حالا که t_1 و t_2 را داریم، می توانیم بازه زمانی بین دو عبور متوالی از مبدأ مکان را هم حساب کنیم:

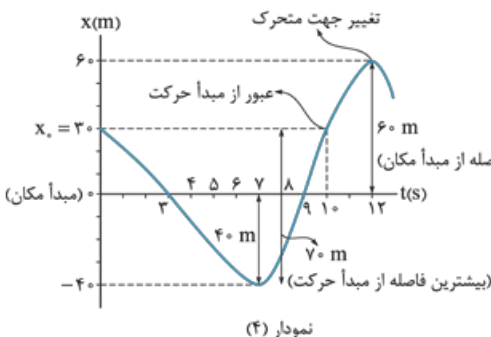
$$\Delta t = t_2 - t_1 = 7 - 4 = 3 \text{ s}$$



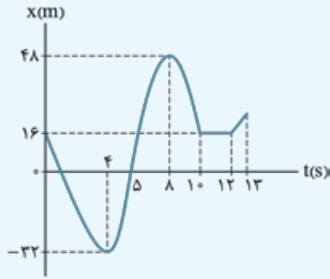
۸. بیشترین فاصله از مبدأ مکان و بیشترین فاصله از مکان اولیه (مبدأ حرکت)

الف) در لحظه ای که نمودار بیشترین فاصله را از محور t دارد، متحرک در بیشترین فاصله از مبدأ مکان قرار دارد. مثلاً در نمودار (۴)، در لحظه $t = 12 \text{ s}$ متحرک در بیشترین فاصله از مبدأ مکان است.

ب) از مکان اولیه (x_0) خطی موازی محور t رسم کنید. فاصله هر نقطه از نمودار تا این خط نشان می دهد متحرک در هر لحظه تا مکان اولیه (مبدأ حرکت) چه قدر فاصله دارد. بنابراین در لحظه ای که نمودار بیشترین فاصله را از این خط دارد، متحرک در بیشترین فاصله از مکان اولیه یا مبدأ حرکت است. مثلاً در نمودار (۴) متحرک در لحظه $t = 7 \text{ s}$ در فاصله ۷۰ متری از این خط است.



نکته محل تقاطع خطی که از مکان اولیه (x_0) موازی محور t رسم می کنیم با نمودار، لحظه عبور دوباره متحرک از مبدأ حرکتش را نشان می دهد. مثلاً در نمودار بالا، در لحظه $t = 10 \text{ s}$ متحرک دوباره از مبدأ حرکت (مکان اولیه) گذشته است.



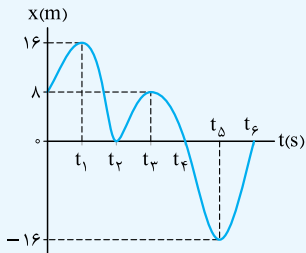
تست ۱ نمودار مکان - زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل است. چنداناً از عبارتهای زیر درباره وضعیت حرکت این متحرک در بازه زمانی صفر تا ۱۳ س نادرست است؟

- (الف) در لحظه $t = ۸$ س بیشترین فاصله از مبدأ حرکت را دارد.
 (ب) در لحظه $t = ۴$ س بیشترین فاصله از مبدأ مکان را دارد.
 (پ) در بازه زمانی (۸ س، ۱۲ س) مسافت پیموده شده با اندازه جابه‌جایی برابر است.
 (ت) در طول مسیر، ۲ س به طور کامل متوقف شده است.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ ۲ (الف) مکان اولیه یا همان مبدأ حرکت است، متحرک در لحظه $t = ۴$ س در فاصله $۱۶ + ۳۲ = ۴۸$ m از مبدأ حرکت و در لحظه

$t = ۸$ س در فاصله $۴۸ - ۱۶ = ۳۲$ m از مبدأ حرکت است. پس متحرک در لحظه $t = ۴$ س در بیشترین فاصله از X_0 است و عبارت (الف) نادرست است.
 (ب) نمودار در لحظه $t = ۸$ س بیشترین فاصله را از محور t دارد؛ یعنی در این لحظه متحرک در دورترین فاصله از مبدأ مکان است. (پس عبارت (ب) نادرست است).
 (پ) در بازه زمانی ۸ س تا ۱۲ س متحرک تغییر جهت نداده است، پس در این بازه زمانی اندازه جابه‌جایی و مسافت برابر است.
 (ت) در بازه زمانی ۱۰ س تا ۱۲ س متحرک به طور کامل متوقف شده است. (البته دو بار هم در لحظه‌های $t = ۴$ س و $t = ۸$ س فقط برای یک لحظه متوقف شده و تغییر جهت داده است).



تست ۲ نمودار مکان - زمان متحرکی مطابق شکل روبه‌رو است. در کدام بازه زمانی، اندازه جابه‌جایی متحرک بیشینه است و در این بازه متحرک چند متر پیموده است؟

- (۱) $۴۸ - (t_1, t_5)$
 (۲) $۳۲ - (t_1, t_5)$
 (۳) $۷۲ - (t_5, t_6)$
 (۴) $۸ - (t_5, t_6)$

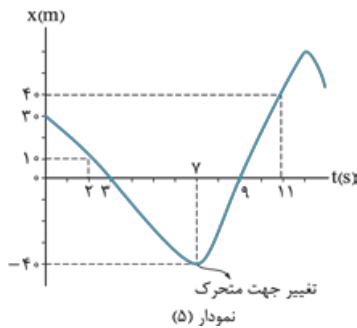
پاسخ ۱ گام اول: متحرک در لحظه t_1 در بیشترین فاصله از مبدأ در طرف مثبت و در لحظه t_5 در بیشترین فاصله از مبدأ در طرف منفی محور X است؛ پس بیشترین جابه‌جایی در بازه زمانی t_1 تا t_5 اتفاق افتاده است.

گام دوم: وقتی سؤال می‌پرسد «متحرک چند متر پیموده است؟» شما باید مسافت پیموده شده را حساب کنید. با توجه به نمودار، این متحرک در بازه زمانی t_1 تا t_4 در جهت منفی، در بازه t_4 تا t_5 در جهت مثبت، در بازه t_5 تا t_6 در جهت منفی و در بازه t_6 تا t_7 در جهت مثبت پیموده است؛ پس جمعاً می‌شود:

$$l = ۱۶ + ۸ + ۸ + ۱۶ = ۴۸ \text{ m}$$

محاسبه سرعت متوسط و تندمی متوسط در حرکت روی خط راست

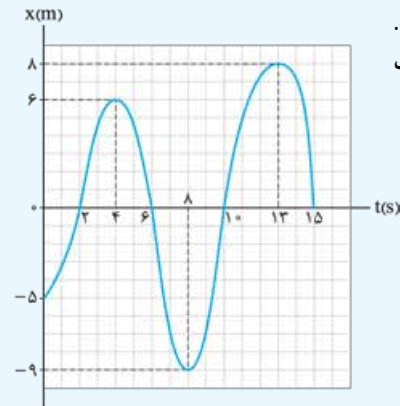
با داشتن جابه‌جایی و مسافت برای هر بازه زمانی دلخواه، می‌توانیم اندازه سرعت متوسط و تندمی متوسط را هم حساب کنیم. مثلاً برای بازه زمانی $t_7 = ۲$ س تا $t_{11} = ۱۱$ س در نمودار (۵) داریم:



$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۴۰ - ۱۰}{۱۱ - ۲} = \frac{۳۰}{۹} = \frac{۱۰}{۳} \text{ m/s}$$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{l_{(۲,۷)} + l_{(۷,۱۱)}}{۱۱ - ۲} = \frac{|-۴۰ - ۱۰| + |۴۰ - (-۴۰)|}{۹} = \frac{۱۳۰}{۹} \text{ m/s}$$

حواستون باشه! آگه علامت جابه‌جایی و سرعت متوسط منفی بشه یعنی متحرک در خلاف جهت محور X جابه‌جا شده. مثلاً در نمودار (۵) در بازه $t_7 = ۲$ س تا $t_9 = ۷$ س جابه‌جایی و سرعت متوسط به ترتیب، $\Delta x = -۴۰ - ۱۰ = -۵۰$ m و $v_{av} = \frac{-۵۰}{۷ - ۲} = -۱۰$ m/s است، یعنی این متحرک در مدت ۲ س تا ۷ س در خلاف جهت محور X جابه‌جا شده است.



تست ۳ نمودار مکان - زمان متحرکی که بر روی محور X حرکت می‌کند، مطابق شکل روبه‌رو است. تندمی متوسط و اندازه سرعت متوسط متحرک از مبدأ زمان تا لحظه‌ای که اندازه جابه‌جایی متحرک بیشینه می‌شود، به ترتیب از راست به چپ، چند متر بر ثانیه است؟

- (۱) $۰/۳ - ۲/۷$
 (۲) $۱ - ۲/۷$
 (۳) $۰/۳ - ۳/۳$
 (۴) $۱ - ۳/۳$

پاسخ ۱۴ گام اول: مکان اولیه متحرک $x_0 = -5 \text{ m}$ است و وقتی که متحرک در بیشترین فاصله از این نقطه قرار می‌گیرد، جابه‌جایی‌اش بیشینه می‌شود. از روی نمودار مشخص است که در لحظه $t = 13 \text{ s}$ متحرک در مکان $x_{13} = 8 \text{ m}$ و در بیشترین فاصله از $x_0 = -5 \text{ m}$ قرار دارد؛ پس باید اندازه سرعت متوسط و تندی متوسط را در بازه $(0, 13 \text{ s})$ حساب کنیم.

$$|v_{av}| = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} = \frac{|x_{13} - x_0|}{13 - 0} = \frac{|8 - (-5)|}{13} = 1 \text{ m/s}$$

گام دوم: ابتدا اندازه سرعت متوسط را (که راحت‌تره) حساب می‌کنیم: (پس قطعاً ۱ و ۳ نادرست‌اند.)

گام سوم: برای محاسبه تندی متوسط اول باید مسافت را در بازه $(0, 13 \text{ s})$ مشخص کنیم و برای این کار باید ببینیم متحرک در چه لحظه‌هایی تغییر جهت داده است. با توجه به نمودار، متحرک در بازه $(0, 4 \text{ s})$ از مکان $x_0 = -5 \text{ m}$ به مکان $x_4 = 6 \text{ m}$ و در بازه $(4 \text{ s}, 8 \text{ s})$ از مکان $x_4 = 6 \text{ m}$ به مکان $x_8 = -9 \text{ m}$ و در بازه $(8 \text{ s}, 13 \text{ s})$ از مکان $x_8 = -9 \text{ m}$ به مکان $x_{13} = 8 \text{ m}$ رفته است (در شکل مقابل این رفت و برگشت‌ها، روی محور نشون دادیم)؛ پس مسافت کل در بازه

$$l = |x_4 - x_0| + |x_8 - x_4| + |x_{13} - x_8| = |6 - (-5)| + |-9 - 6| + |8 - (-9)| = 11 + 15 + 17 = 43 \text{ m}$$

زمانی $(0, 13 \text{ s})$ برابر می‌شود با:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{43}{13 - 0} = \frac{43}{13} \text{ m/s} \approx 3 \frac{1}{3} \text{ m/s}$$

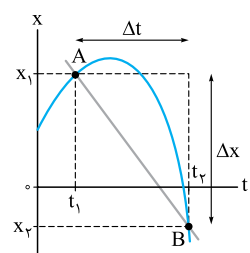
حالا می‌توانیم تندی متوسط را هم محاسبه کنیم:

سرعت متوسط و مفهوم شیب خط در نمودار مکان - زمان

شکل زیر نمودار مکان - زمان یک متحرک است. می‌دانید که سرعت متوسط این متحرک در جابه‌جایی جسم از لحظه t_1 تا t_2 برابر است با:

$$v_{av} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

یادآوری در یک نمودار، محور قائم، محور تابع و محور افقی محور متغیر است و شیب خط عبارت است از نسبت تغییرات تابع به تغییرات متغیر.



با توجه به این یادآوری در نمودار مکان - زمان، مکان (x) تابع و زمان (t) متغیر است. شیب خطی که نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند (مثل خط AB در نمودار روبه‌رو) برابر می‌شود با $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ ؛ یعنی شیب خطی که نمودار مکان - زمان را در دو نقطه قطع می‌کند، برابر سرعت متوسط در بازه زمانی t_1 تا t_2 است:

$$\text{شیب خط گذرنده از دو نقطه } A \text{ و } B \text{ در نمودار مکان - زمان} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \text{شیب خط گذرنده از دو نقطه } A \text{ و } B \text{ در نمودار مکان - زمان} = v_{av}(t_1, t_2)$$

حواستون باشه! شیب می‌تونه مثبت یا منفی باشه که نشون می‌ده جهت جابه‌جایی متحرک مثبت یا منفی.

آزمون ۱۴ شکل روبه‌رو نمودار مکان - زمان متحرکی است که بر روی محور x حرکت می‌کند. اگر اندازه سرعت

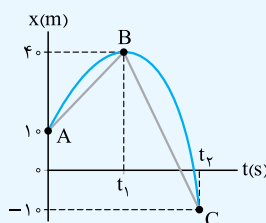
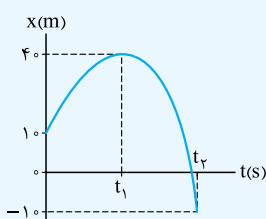
متوسط متحرک در t_1 ثانیه اول برابر با اندازه سرعت متوسط در بازه زمانی t_1 تا t_2 باشد، نسبت $\frac{t_1}{t_2}$ کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\frac{2}{8} \quad (2)$$

$$\frac{3}{5} \quad (3)$$

$$\frac{5}{3} \quad (4)$$



پاسخ ۱۴ گام اول: متحرک در t_1 ثانیه اول از مکان $x_0 = 10 \text{ m}$ به مکان $x_1 = 40 \text{ m}$ رفته است:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = 40 - 10 = 30 \text{ m}$$

و در بازه t_1 تا t_2 از مکان $x_1 = 40 \text{ m}$ به مکان $x_2 = -10 \text{ m}$ جابه‌جا شده است:

$$\Delta x_2 = x_2 - x_1 = -10 - 40 = -50 \text{ m}$$

گام دوم: صورت سؤال می‌گوید اندازه سرعت متوسط در t_1 ثانیه اول برابر با اندازه سرعت متوسط در بازه t_1 تا t_2 است (یعنی شیب خط AB برابر با قدرمطلق شیب خط BC است):

$$|v_{av, AB}| = |v_{av, BC}| \Rightarrow \frac{\Delta x_1}{t_1 - 0} = \frac{|\Delta x_2|}{t_2 - t_1} \Rightarrow \frac{30}{t_1} = \frac{50}{t_2 - t_1} \Rightarrow 3t_2 - 3t_1 = 5t_1 \Rightarrow 3t_2 = 8t_1 \Rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \frac{3}{8}$$

آزمون ۱۵ شکل روبه‌رو، نمودار مکان - زمان متحرکی است که بر روی محور x حرکت می‌کند. اگر اندازه سرعت

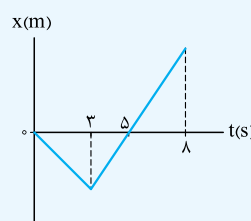
متوسط متحرک در ۳ ثانیه اول 4 m/s باشد، سرعت متوسط متحرک در ۲ ثانیه چهارم چند متر بر ثانیه است؟

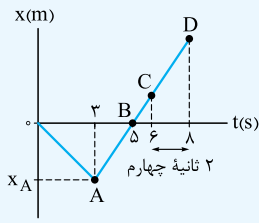
$$3 \quad (1)$$

$$6 \quad (2)$$

$$8 \quad (3)$$

$$12 \quad (4)$$





پاسخ ۱۲ گام اول: با توجه به شکل روبه‌رو، ابتدا به کمک سرعت متوسط در ۳ ثانیه اول مکان x_A را پیدا می‌کنیم:

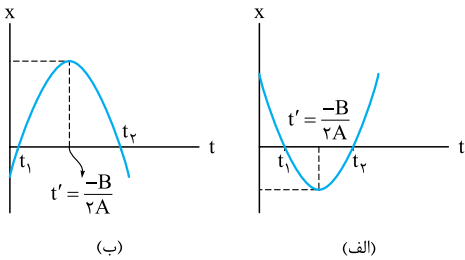
$$v_{av(0,3)} = \frac{x_A - x_0}{3 - 0} \Rightarrow -4 = \frac{x_A - 0}{3} \Rightarrow x_A = -12 \text{ m}$$

(از اون بایی که شیب نمودار در ۳ ثانیه اول منفیه، سرعت متوسط در این بازه رو منفی گذاشتیم.)

گام دوم: ۲ ثانیه چهارم یعنی بازه زمانی ۶ s تا ۸ s که بر روی نمودار از نقطه C تا D است؛ ما مکان‌های متحرک در لحظه‌های ۶ s و ۸ s را نداریم، اما در شکل مشخص است که پاره‌خط‌های AB و CD بر روی یک خط قرار دارند و شیب آن‌ها برابر است. پس اگر شیب پاره‌خط AB را حساب کنیم، شیب پاره‌خط CD را هم به دست آورده‌ایم:

$$v_{av(6,8)} = \text{شیب پاره‌خط CD} = \text{شیب پاره‌خط AB} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{0 - (-12)}{5 - 3} = 6 \text{ m/s}$$

لحظه تغییر جهت در معادله مکان - زمان درجه دو و نمودار مکان - زمان سهمی



(الف) $A > 0$ و نمودار نقطه کمینه دارد.
(ب) $A < 0$ و نمودار نقطه بیشینه دارد.

اگر در حرکت راست‌خط، معادله مکان - زمان از نوع درجه دو باشد، با داشتن معادله مکان - زمان می‌توانیم بگوییم که متحرک در چه لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد. برای این کار باید لحظه‌ای را که x در آن بیشینه یا کمینه است، محاسبه کنیم. در درس ریاضی یاد گرفته‌اید که اگر معادله از نوع درجه دو (یعنی به صورت $x = At^2 + Bt + C$) باشد، در لحظه $t = \frac{-B}{2A}$ مقدار x اکسترمم (بیشینه یا کمینه) است. با توجه به علامت A نمودار دارای بیشینه یا کمینه است. در شکل (الف) $A > 0$ و در شکل (ب) $A < 0$ است.

(تعیین لحظه تغییر جهت برای معادله‌های مکان - زمان درجه سه یا بالاتر، خارج از محدوده کتاب درسی است.)

چند نکته ۱ اگر در معادله $x = At^2 + Bt + C$ مکان (x) را برابر صفر بگذاریم، ریشه‌های ساده معادله حاصل، لحظه‌های عبور متحرک از مکان $x = 0$ (مبدأ مکان) را نشان می‌دهد.

۲ در حالتی که نمودار مکان - زمان یک سهمی است (مانند شکل‌های (الف) و (ب))، بین لحظه‌های عبور متحرک از مبدأ و لحظه تغییر جهت رابطه زیر برقرار است:

$$t' = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

خواستون باشه فقط لمظه‌های تغییر جهت مثبت قابل قبوله، یعنی $t' = \frac{-B}{2A} < 0$ قابل قبول نیست.

آست ۱ معادله مکان - زمان متحرکی در SI به صورت $x = 4t^2 + 8t - 21$ است. این متحرک در چه لحظه‌ای بر حسب ثانیه تغییر جهت می‌دهد؟
(۱) ۱ (۲) ۱/۵ (۳) ۳/۵ (۴) این متحرک تغییر جهت نمی‌دهد.

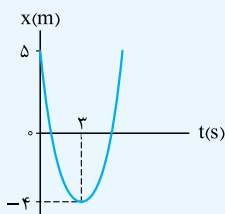
پاسخ ۱۴ گفتیم اگر معادله مکان - زمان درجه دو باشد، متحرک در لحظه $t = \frac{-B}{2A}$ تغییر جهت می‌دهد، پس داریم:
 $t = \frac{-8}{2 \times 4} = -1 \text{ s}$
منفی شدن t یعنی این متحرک قبل از مبدأ زمان، تغییر جهت داده است که قابل قبول نیست؛ بنابراین متحرک پس از شروع حرکت (مبدأ زمان) تغییر جهت نمی‌دهد.

آست ۲ معادله مکان - زمان متحرکی در SI به صورت $x = t^2 - 6t + 5$ است. این متحرک در چه بازه زمانی در جهت منفی محور x حرکت کرده است؟
(۱) (۱ s, ۵ s) (۲) (۳ s, ۵ s) (۳) (۰, ۳ s) (۴) (۵ s, ∞)

پاسخ ۱۲ گام اول: لحظه تغییر جهت متحرک (یا نقطه اکسترمم تابع) را حساب می‌کنیم، چون معادله مکان - زمان درجه دو است؛ پس داریم:

$$t = \frac{-B}{2A} = \frac{-(-6)}{2 \times 1} = 3 \text{ s}$$

گام دوم: چون ضرب t^2 مثبت است، x در لحظه $t = 3 \text{ s}$ کمینه یا مینیمم است؛ پس، از لحظه $t = 0$ تا $t = 3 \text{ s}$ متحرک در جهت منفی حرکت کرده است. برای آن که خیالتان راحت شود، مکان متحرک را در چند لحظه قبل و بعد از $t = 3 \text{ s}$ در جدول زیر آورده‌ایم و نمودار مکان - زمان متحرک را رسم کرده‌ایم:



t(s)	0	1	2	3	4	5	6
x(m)	5	0	-3	-4	-3	0	5

حرکت در جهت مثبت محور X
حرکت در جهت منفی محور X
لحظه تغییر جهت

تست ۱ معادله مکان - زمان متحرکی در SI، به صورت $x = t^2 - 4t + 3$ است. این متحرک چند ثانیه در قسمت منفی محور x در حرکت بوده است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ ۲ با یک سؤال ریاضی طرف هستیم.

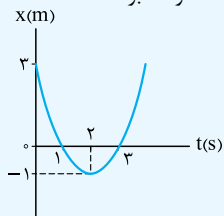
گام اول: می‌خواهیم بدانیم چه مدت $x < 0$ بوده است؛ یعنی:

$$t^2 - 4t + 3 < 0$$

پس باید معادله $x = t^2 - 4t + 3$ را تعیین علامت کنیم و برای این کار اول باید ریشه‌های معادله را به ازای $x = 0$ حساب کنیم.

$$x = 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \text{ s} \\ t_2 = 3 \text{ s} \end{cases}$$

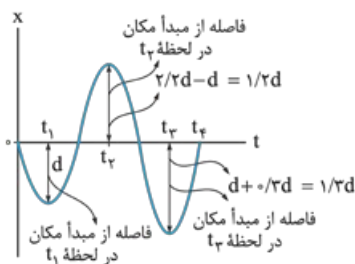
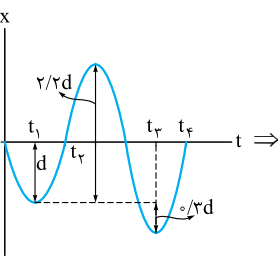
یادآوری در معادله‌هایی که به شکل $y = ax^2 + bx + c$ هستند، اگر $a + b + c = 0$ باشد، ریشه‌های معادله $x = 1$ و $x = \frac{c}{a}$ خواهد بود.



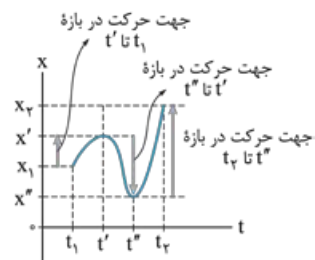
گام دوم: می‌دانیم که علامت عبارت درجه دو (مانند $x = At^2 + Bt + C$) بین دو ریشه، مخالف علامت A است؛ پس داریم:

t	0	1	3	$+\infty$
x		$+$	$-$	$+$

یعنی در بازه $(1 \text{ s}, 3 \text{ s})$ متحرک در مکان‌های منفی است، پس این اتفاق 2 s طول می‌کشد. بد نیست نمودار مکان - زمان این حرکت را هم ببینیم. در نمودار هم مشخص است که در بازه 1 s تا 3 s نمودار زیر محور x است و در این بازه متحرک در قسمت منفی محور x حرکت می‌کند.

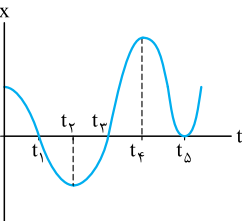


۸۲. گزینه ۳ با توجه به شکل می‌بینید که فاصله متحرک از مبدأ مکان در لحظه t_1 برابر d ، در لحظه t_2 برابر $1/2 d$ و در لحظه t_3 برابر $1/3 d$ است، پس این فاصله در t_3 بیشترین مقدار است.



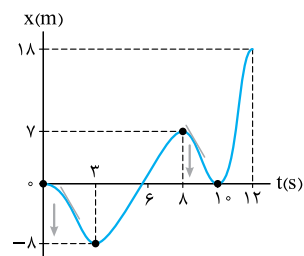
۸۳. گزینه ۳ به نمودار روبه‌رو توجه کنید. همان‌طور که می‌بینید از t_1 تا t_2 ، متحرک در جهت مثبت محور x حرکت کرده است و از x_1 به x_2 رفته است ($x_1 < x_2$). بعد از آن از t_2 تا t_3 متحرک در جهت منفی محور x حرکت می‌کند و از x_2 به x_3 می‌رود ($x_2 > x_3$)؛ بنابراین در t_2 یک بار جهت حرکت عوض می‌شود. هم‌چنین در ادامه یعنی در بازه t_3 تا t_4 متحرک از x_3 در جهت مثبت محور x به سمت x_4 می‌رود. بنابراین در t_3 نیز متحرک یک بار تغییر جهت می‌دهد. با توجه به آن چه گفتیم، متحرک از t_1 تا t_4 ، ۲ بار تغییر جهت می‌دهد.

تکلیک به تعداد نقطه‌های اکسترمم (بیشینه و کمینه) در نمودار مکان - زمان، متحرک تغییر جهت می‌دهد. در این جا ۲ نقطه اکسترمم داریم؛ پس متحرک ۲ بار تغییر جهت داده است.



۸۴. گزینه ۲ بردار مکان در لحظه‌هایی تغییر جهت می‌دهد که نمودار مکان - زمان محور t را قطع کند و علامت x تغییر کند. با توجه به شکل روبه‌رو این اتفاق در دو لحظه t_1 و t_2 رخ می‌دهد.

خواستون باشه درست است که مقدار x و بردار مکان در t_5 صفر می‌شود، ولی چون علامت x قبل و بعد از این لحظه تغییر نمی‌کند، جهت بردار مکان نیز تغییر نمی‌کند.



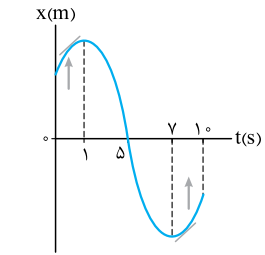
۸۵. گزینه ۱ **گام اول:** مطابق شکل از لحظه $t = 0$ تا $t = 3 \text{ s}$ و از لحظه $t = 8 \text{ s}$ تا $t = 10 \text{ s}$ شیب نمودار منفی بوده و متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کرده؛ پس مدت زمانی که متحرک در جهت منفی حرکت کرده، برابر است با: $\Delta t_1 = (3 - 0) + (10 - 8) = 3 + 2 = 5 \text{ s}$

گام دوم: وقتی $x > 0$ است، بردار مکان متحرک در جهت مثبت محور x است، پس باید زمان‌هایی را که نمودار بالای محور t است، حساب کنیم. مطابق شکل از لحظه $t = 6 \text{ s}$ تا $t = 12 \text{ s}$ نمودار بالای محور t است، یعنی:

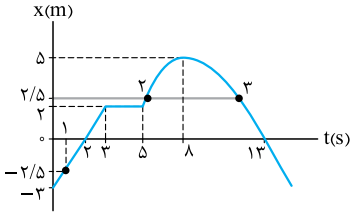
$$\Delta t_2 = 12 - 6 = 6 \text{ s}$$

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{5}{6}$$

گام سوم: این تست را خواسته که به راحتی به دست می‌آید:

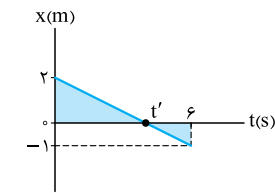


۸۶. گزینه ۳ گام اول: مطابق شکل، در بازه‌های زمانی صفر تا ۱ s و هم‌چنین ۷ s تا ۱۰ s نمودار صعودی بوده و متحرک در جهت مثبت محور x حرکت کرده؛ پس Δt برابر است با:
 $\Delta t = (1-0) + (10-7) = 1+3 = 4 \text{ s}$
گام دوم: همان‌طور که در نمودار مشخص است، در بازه‌های زمانی ۱ s تا ۵ s و هم‌چنین ۷ s تا ۱۰ s متحرک در حال نزدیک‌شدن به مبدأ مکان است؛ پس $\Delta t'$ برابر است با:
 $\Delta t' = (5-1) + (10-7) = 4+3 = 7 \text{ s}$
گام سوم: محاسبه $\frac{\Delta t}{\Delta t'}$:
 $\frac{\Delta t}{\Delta t'} = \frac{4}{7}$



۸۷. گزینه ۱ مطابق شکل، عبارت‌ها را بررسی می‌کنیم:
 الف) متحرک در نقاط اکسترمم (کمینه یا بیشینه) تغییر جهت می‌دهد. در این شکل، فقط در لحظه $t = 8 \text{ s}$ این اتفاق افتاده! ✖
 ب) متحرک در بازه زمانی صفر تا ۲ s و هم‌چنین ۸ s تا ۱۳ s در حال نزدیک‌شدن به مبدأ مکان بوده که در مجموع می‌شود ۷ ثانیه! ✖

پ) متحرک یک بار در بخش منفی محور و دو بار در بخش مثبت محور (در نقطه‌های ۱، ۲ و ۳) در فاصله $2/5$ متری از مبدأ قرار دارد؛ پس متحرک ۳ بار در فاصله $2/5$ متری مبدأ بوده است. ✖
 ت) در لحظه‌های $t = 2 \text{ s}$ و $t = 13 \text{ s}$ متحرک از مبدأ مکان ($x = 0$) عبور می‌کند. ✓
 پس تنها یک عبارت درست داریم.



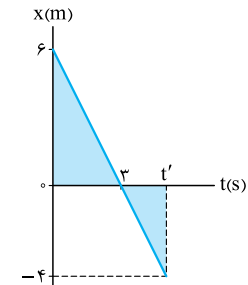
۸۸. گزینه ۱ گام اول: مطابق شکل از لحظه $t = 0$ تا $t = 6 \text{ s}$ شیب نمودار منفی بوده و متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کرده است؛ یعنی ۶ ثانیه متحرک در جهت منفی حرکت کرده است. (۳ و ۴ نادرست‌اند).
گام دوم: روش ۱ حالا برای محاسبه حرکت متحرک در بخش منفی، لازم است مقدار t' را پیدا کنیم. همان‌طور که در شکل می‌بینید، با استفاده از تشابه دو مثلث رنگی، می‌توانیم مقدار t' را به دست آوریم:

$$\frac{6-t'}{t'-0} = \frac{|-1|}{2} \Rightarrow 12-2t' = t' \Rightarrow 3t' = 12 \Rightarrow t' = 4 \text{ s}$$

پس متحرک در بازه زمانی ۴ s تا ۶ s، یعنی به مدت ۲ s در مکان‌های منفی بوده است!

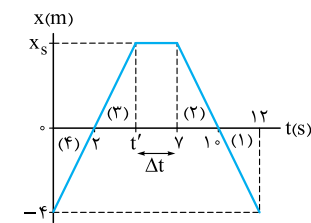
روش ۲ با نوشتن شیب خط هم می‌توانید این سؤال را حل کنید. شیب خط در مدت صفر تا ۶ s برابر شیب خط در مدت t' تا ۶ s است. پس داریم:

$$\text{شیب خط} = \frac{X(t') - X_0}{t' - t_0} = \frac{X(6) - X_{t'}}{\Delta t(t', 6)} \xrightarrow{x_{t'=0}} \frac{-1-2}{6-0} = \frac{-1-0}{\Delta t(t', 6)} \Rightarrow \Delta t(t', 6) = 2 \text{ s}$$



۸۹. گزینه ۱ بردار مکان در لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد که متحرک از مبدأ مکان عبور می‌کند؛ پس در شکل روبه‌رو محل تقاطع نمودار مکان - زمان با محور زمان $t = 3 \text{ s}$ است. ما لحظه‌ای را می‌خواهیم که بردار مکان $\vec{x} = -4\vec{i}$ باشد. با توجه به شکل روبه‌رو و تشابه دو مثلث رنگ‌شده داریم:

$$\frac{6}{|-4|} = \frac{3}{t'-3} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{3}{t'-3} \Rightarrow t'-3=2 \Rightarrow t'=5 \text{ s}$$



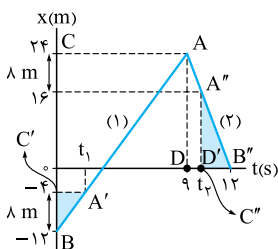
۹۰. گزینه ۱ گام اول: به کمک تشابه مثلث به جواب می‌رسیم. برای این کار ابتدا از تشابه مثلث (۱) و (۲)، اندازه x_s را به دست می‌آوریم:

$$\frac{12-10}{10-7} = \frac{|x_s|}{x_s} \Rightarrow x_s = 6 \text{ m}$$

گام دوم: حالا از تشابه دو مثلث (۲) و (۴)، مقدار t' مشخص می‌شود:

$$\frac{t'-2}{7-0} = \frac{3}{|x_s|} \Rightarrow \frac{t'-2}{7} = \frac{3}{6} \Rightarrow t'-2=3 \Rightarrow t'=5 \text{ s} \Rightarrow \Delta t = 7-5 = 2 \text{ s}$$

پس جسم به مدت ۲ ثانیه در فاصله ۶ متری مبدأ ساکن است.

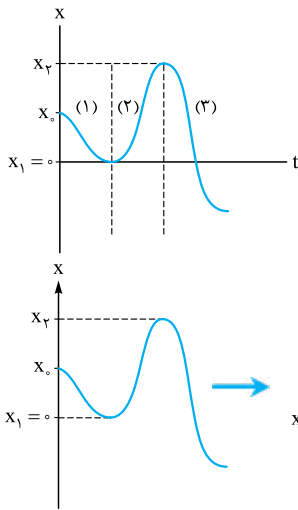


۹۱. گزینه ۳ گام اول: مطابق شکل، دو مثلث ABC و A'B'C' در قسمت (۱) نمودار با هم متشابه هستند! بنابراین:

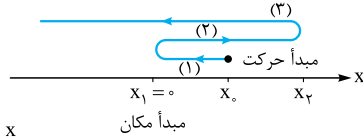
$$\frac{BC'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} \Rightarrow \frac{8}{24+12} = \frac{t_1}{7} \Rightarrow t_1 = 2 \text{ s}$$

گام دوم: حالا به کمک تشابه دو مثلث ADB'' و A''D'B'' در قسمت (۲) نمودار، مقدار t_p را حساب می‌کنیم: (دقت کنید که فاصله ۸ متری از بیشترین فاصله از مبدأ مکان می‌شود $x_p = 24 - 8 = 16 \text{ m}$)

$$\frac{D'B''}{DB''} = \frac{A''D'}{AD} \Rightarrow \frac{12-t_p}{12-9} = \frac{16}{24} \Rightarrow 12-t_p=2 \Rightarrow t_p=10 \text{ s}$$



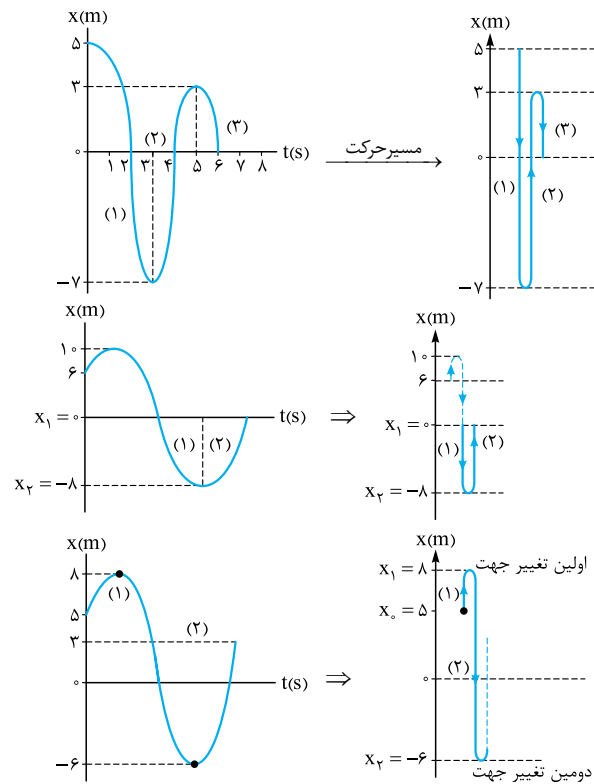
۹۲. گزینه ۴ قسمت شماره (۱): با توجه به نمودار $X-t$ متحرک از نقطه X_0 که در طرف مثبت محور X است، شروع به حرکت می‌کند و در خلاف جهت محور X به سمت مبدأ می‌رود (رد ۱ و ۲).
قسمت شماره (۲): متحرک به مبدأ می‌رسد و در آنجا تغییر جهت می‌دهد و در جهت محور X دوباره حرکت می‌کند. سپس در نقطه X_2 دوباره تغییر جهت می‌دهد.
قسمت شماره (۳): متحرک پس از تغییر جهت در نقطه X_2 در جهت منفی محور X حرکت می‌کند و به مبدأ می‌رسد و پس از عبور از مبدأ وارد بخش منفی محور می‌شود و به حرکتش ادامه می‌دهد (رد ۳).



تکنیک از روی نمودار مکان - زمان محور زمان را حذف کنید، نمودار را از دو طرف فشرده کنید تا شکل مسیر حرکت را ببینید. (شکل روبرو). البته در مرحله بعد باید محور X را افقی کنید تا درستی گزینه (۴) مشخص شود.

۹۳. گزینه ۱ نمودار مکان - زمان باید یک تابع باشد، یعنی به ازای هر t فقط باید یک X یا Y وجود داشته باشد (البته آله به ازای یک X یا Y چند t باشد، اشکالی ندارد). در عمل هم امکان ندارد یک جسم در یک لحظه در بیش از یک مکان حضور داشته باشد. در واقع هیچ خط عمود بر محور t نباید نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند. با این استدلال ۲، ۳، ۴ و نادرست‌اند.

۹۴. گزینه ۱ گام اول: جابه‌جایی که می‌شود اختلاف مکان نهایی از مکان اولیه (مکان نهایی را X_2 و مکان اولیه را X_0 می‌گیریم):



$$\Delta x = x_2 - x_0 = 0 - 5 = -5 \text{ m} \Rightarrow |\Delta x| = 5 \text{ m}$$

حواستون باشه هیچ‌گاه جابه‌جایی بزرگ‌تر از مسافت طی شده نمی‌شود، پس ۲ و ۴ از همان ابتدا رد بود!

گام دوم: با توجه به این که در نمودار، ۲ بار تغییر جهت داریم، مسافت طی شده برابر است با جمع جبری مسافت طی شده در قسمت (۱)، (۲) و (۳)، یعنی:

$$l = l_1 + l_2 + l_3 = |-7 - 5| + |3 - (-7)| + |0 - 3| = 12 + 10 + 3 = 25 \text{ m}$$

گام سوم: پس نسبت مسافت طی شده به اندازه جابه‌جایی برابر است با: $\frac{l}{|\Delta x|} = \frac{25}{5} = 5$

۹۵. گزینه ۱ در بازه زمانی که نمودار زیر محور t قرار دارد، بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور X است. مطابق شکل در این بخش متحرک از $X_1 = 0$ تا $X_2 = -8 \text{ m}$ رفته و دوباره سر جایش برگشته است؛ بنابراین مسافت طی شده برابر است با:

$$l = l_1 + l_2 = 2l_1 = 2 \times 8 = 16 \text{ m}$$

۹۶. گزینه ۴ تغییر جهت متحرک زمانی رخ می‌دهد که در یک بازه زمانی مقدار X بیشینه یا کمینه شود؛ پس با توجه به شکل، متحرک در $X_1 = 8 \text{ m}$ برای بار اول و در $X_2 = -6 \text{ m}$ برای بار دوم تغییر جهت می‌دهد.

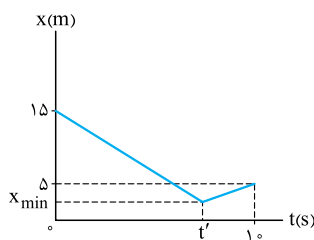
برای محاسبه مسافت طی شده باید مسافت طی شده قبل و بعد از اولین تغییر جهت را جداگانه حساب کنیم و سپس با هم جمع کنیم؛ یعنی: $l = l_1 + l_2 = |8 - 5| + |-6 - 8| = 3 + 14 = 17 \text{ m}$

$$\Delta x = (x_2 - x_0) \vec{i} = (-6 - 5) \vec{i} = -11 \vec{i}$$

۹۷. گزینه ۲ مکان اولیه و نهایی دو متحرک یکسان است؛ بنابراین اندازه جابه‌جایی‌های دو متحرک برابر است. از طرفی چون دو متحرک بر روی خط راست و بدون تغییر جهت، حرکت کرده‌اند، مسافت طی شده توسط آن‌ها برابر اندازه جابه‌جایی‌های آن‌ها است؛ یعنی:

$$\left. \begin{aligned} d_A &= l_A \\ d_B &= l_B \\ d_A &= d_B \end{aligned} \right\} \Rightarrow l_A = l_B = d_A = d_B$$

حواستون باشه در این‌جا نمودارهای A و B شکل مسیر حرکت نیستند و حرکت روی خط راست (یعنی روی محور X) انجام شده است!



۹۸. گزینه ۲ با توجه به شکل مقابل، کم‌ترین فاصله‌ای که متحرک از مبدأ دارد را با X_{\min} و زمان مربوط به آن را با t' نشان می‌دهیم. در این صورت متحرک از لحظه $t = 0$ تا t' در جهت نزدیک شدن به مبدأ مکان و از لحظه t' تا 10 s در جهت دور شدن از مبدأ مکان بوده است؛ پس:

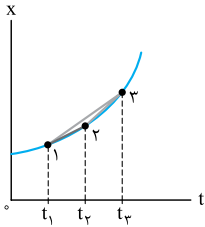
$$l = |x_{\min} - 15| + |5 - x_{\min}| = (15 - x_{\min}) + (5 - x_{\min}) \Rightarrow l = 20 - 2x_{\min}$$

$$|\vec{d}| = |5 - 15| = 10 \text{ m}$$

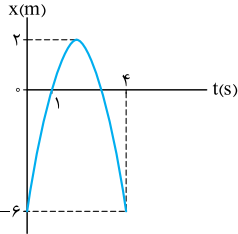
$$l = 1/6 |\vec{d}| \Rightarrow 20 - 2x_{\min} = 1/6 \times 10 \Rightarrow 2x_{\min} = 4 \Rightarrow x_{\min} = 2 \text{ m}$$

با توجه به صورت تست:

۹۹. گزینه ۳ همان طور که می‌دانید، شیب خط در نمودار مکان - زمان، سرعت متوسط را نشان می‌دهد. برای همین باید نقطه‌هایی را که سرعت متوسط در آن بازه‌ها خواسته شده است، به هم وصل کنیم. مطابق شکل شیب خطی که دو نقطه (۲) و (۳) را به هم وصل می‌کند، بیشتر است؛ پس سرعت متوسط در بازه t_2 تا t_3 بیشتر است.

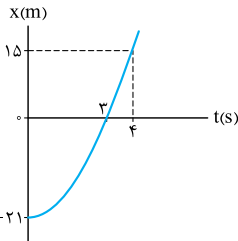


۱۰۰. گزینه ۲ با توجه به نمودار روبه‌رو در $t_1 = 1s$ ، متحرک در $x_1 = 0$ و در $t_2 = 4s$ متحرک در $x_2 = -6m$ قرار دارد؛ پس:



$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{-6 - 0}{4 - 1} = -2 \text{ m/s}$$

۱۰۱. گزینه ۴ گام اول: حرکت متحرک تغییر جهت نداشته است؛ پس مسافت طی شده توسط آن و اندازه جابه‌جایی آن برابر است. با توجه به نمودار:

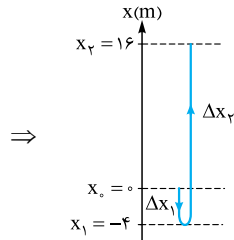
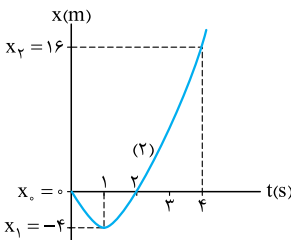


$$l = |\Delta x| = |x_2 - x_1| = |15 - (-21)| = 36 \text{ m}$$

گام دوم: تندی متوسط هم که برابر $s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$ است:

$$s_{av} = \frac{36}{4} = 9 \text{ m/s} = (9 \times 3.6) \text{ km/h} = 32.4 \text{ km/h}$$

۱۰۲. گزینه ۳ گام اول: برای محاسبه تندی متوسط، ابتدا باید مسافت طی شده را حساب کنیم، مطابق شکل در $t = 1s$ ، تغییر جهت (اکسترمم) داریم؛ بنابراین مسافت طی شده برابر است با:



$$l = l_1 + l_2 = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = |-4 - 0| + |16 - (-4)| = 4 + 20 = 24 \text{ m}$$

گام دوم: با داشتن مسافت طی شده، محاسبه تندی متوسط کاری ندارد:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{24}{4} = 6 \text{ m/s}$$

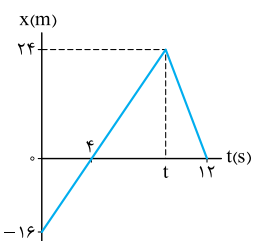
۱۰۳. گزینه ۱ با توجه به شکل روبه‌رو، در مدت صفر تا t جابه‌جایی دو متحرک برابر است؛ بنابراین داریم:

$$\Delta x_A = \Delta x_B \Rightarrow \frac{\Delta x_A}{\Delta t} = \frac{\Delta x_B}{\Delta t} \Rightarrow v_{av,A} = v_{av,B}$$

از طرفی چون جهت حرکت دو متحرک تغییر نمی‌کند، تندی متوسط آن‌ها با سرعت متوسط آن‌ها برابر است و داریم:

$$s_{av,A} = s_{av,B} = v_{av,A} = v_{av,B}$$

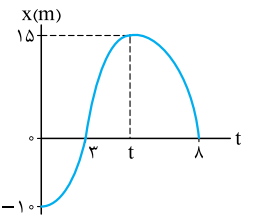
۱۰۴. گزینه ۲ در بازه زمانی $t = 4s$ تا $t = 12s$ نمودار $x-t$ ، بالای محور t است؛ پس در این بازه بردار مکان در جهت محور x است. مطابق شکل متحرک از لحظه $t = 4s$ تا لحظه t ، از مکان $x = 24m$ رفته و از لحظه $t = 12s$ ، مسیر را دوباره برگشته است؛ بنابراین تندی متوسط در بازه زمانی « $4s$ تا $12s$ » برابر است با:



$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{2 \times 24}{12 - 4} = 6 \text{ m/s}$$

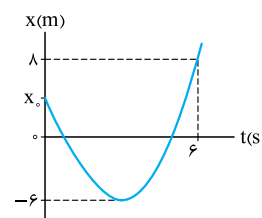
(به محاسبه t هم نیازی نیست)

۱۰۵. گزینه ۳ مطابق شکل متحرک در لحظه t تغییر جهت می‌دهد. طبق گفته سؤال اندازه سرعت متوسط متحرک از لحظه $t_0 = 0$ تا $t_0 = 5s$ است؛ بنابراین:



$$|v_{av(0,t)}| = \left| \frac{\Delta x(0,t)}{\Delta t} \right| \Rightarrow 5 = \frac{15 - (-10)}{t - 0} \Rightarrow t = \frac{25}{5} = 5s$$

۱۰۶. گزینه ۴ گام اول: مسافت طی شده برابر با مجموع جابه‌جایی‌های قبل و بعد از تغییر جهت است. اگر مکان اولیه را x_0 بگیریم، داریم:



$$l = |-6 - x_0| + |8 - (-6)|$$

$$l = x_0 + 6 + 14 = x_0 + 20$$

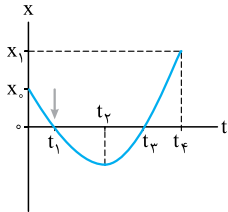
از آن جایی که x_0 مثبت است، قرینه عبارت داخل قدرمطلق از آن خارج می‌شود.

گام دوم: تندی متوسط متحرک در بازه $(0, 6s)$ برابر 4 m/s است؛ پس:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \Rightarrow 4 = \frac{x_0 + 20}{6} \Rightarrow 24 = x_0 + 20 \Rightarrow x_0 = 4 \Rightarrow \vec{d}_0 = (x_0) \vec{i} = 4 \vec{i}$$

۱۰۷. گزینه ۴ تندی متوسط و اندازه سرعت متوسط در بازه‌های زمانی‌ای که متحرک تغییر جهت نداشته باشد، با هم برابر هستند. در بازه‌های «صفر تا t_1 »، « t_1 تا t_2 » و « t_2 تا t_3 » متحرک تغییر جهت نمی‌دهد و تندی متوسط در این بازه‌ها با اندازه سرعت متوسط برابر است. اما در بازه (t_2, t_3) متحرک تغییر جهت می‌دهد؛ در این بازه سرعت متوسط صفر است اما تندی متوسط صفر نیست.

توجه کنید که در بازه (t_1, t_2) چون نمودار $x-t$ موازی محور زمان است، متحرک ایستاده است و سرعت متوسط و تندی متوسط در این بازه زمانی صفر است.



۱۰۸. گزینه ۲ با توجه به نمودار به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱ : درست؛ متحرک تنها در لحظه t_2 (اکسترمم) تغییر جهت می‌دهد.

۲ : نادرست؛ در لحظه شروع حرکت، متحرک در خلاف جهت محور x شروع به حرکت کرده است.

۳ : درست؛ در لحظه‌های t_1 و t_3 جهت بردار مکان تغییر می‌کند؛ یعنی ۲ بار.

۴ : درست؛ چون متحرک در مجموع از x_0 تا x_1 جابه‌جایی آن مقداری بزرگ‌تر از صفر ($\Delta x > 0$) می‌شود؛ بنابراین $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} > 0$.

۱۰۹. گزینه ۲ بررسی گزینه‌ها:

۱ : سرعت متوسط برابر با جابه‌جایی تقسیم بر زمان است:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{2 - 0}{8 - 0} = \frac{1}{4} \text{ m/s} = 0.25 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

۲ : با توجه به آن که در $t = 2 \text{ s}$ تغییر جهت داریم، اندازه مسافت طی‌شده را حساب می‌کنیم و با جابه‌جایی مقایسه می‌کنیم:

$$l = | -2 \text{ m} | + | 2 \text{ m} - (-4 \text{ m}) | = 2 + 6 = 8 \text{ m} \quad \checkmark$$

در بررسی **۱** دیدیم که اندازه جابه‌جایی برابر 2 m است؛ پس مسافت طی‌شده 8 m از اندازه جابه‌جایی بیشتر است. \times

۳ : با توجه به نمودار مشخص است که متحرک فقط یک بار و در $t = 2 \text{ s}$ جهت حرکت خود را تغییر داده است. \checkmark

۴ : همان‌طور که در بررسی **۲** دیدیم، مسافت طی‌شده برابر 8 m است؛ پس تندی متوسط برابر است با:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{8}{4} = 2 \text{ m/s} \quad \checkmark$$

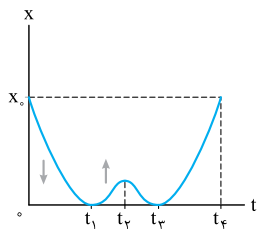
۱۱۰. گزینه ۲ به بررسی عبارت‌ها می‌پردازیم:

الف) نمودار در کل بازه زمانی حرکت، بالای محور t قرار دارد؛ پس بردار مکان تغییر جهتی ندارد. \times

ب) متحرک از صفر تا t_1 در خلاف جهت محور x و از t_1 تا t_2 در جهت محور x حرکت کرده است. \times

پ) مکان ابتدا و انتهای حرکت یکی است؛ پس $\Delta x = 0$ و در نتیجه سرعت متوسط صفر است. \checkmark

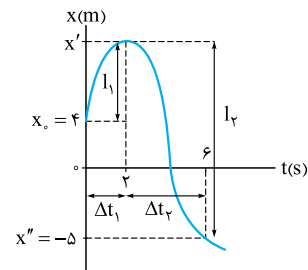
ت) چون در لحظه t_2 تغییر جهت داریم، تندی متوسط در بازه زمانی t_1 تا t_2 با اندازه سرعت متوسط در این بازه زمانی برابر نیست. \checkmark



۱۱۱. گزینه ۲ طبق گفته سؤال، تندی متوسط متحرک در دو بازه زمانی «صفر تا 2 s » و « 2 s تا 6 s » برابر است؛ پس مطابق شکل:

$$s_{av,1} = s_{av,2} \Rightarrow \frac{l_1}{\Delta t_1} = \frac{l_2}{\Delta t_2} \Rightarrow \frac{|x' - 4|}{2 - 0} = \frac{|x'' - x'|}{6 - 2} \Rightarrow \frac{|x' - 4|}{2} = \frac{|-5 - x'|}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{x' - 4}{2} = \frac{x' + 5}{4} \Rightarrow 2x' - 8 = x' + 5 \Rightarrow x' = 13 \text{ m}$$



۱۱۲. گزینه ۳ گام اول: متحرک در t ثانیه دوم حرکت یعنی از لحظه t تا $2t$ از مکان x_0 به x_1 رفته است. بنابراین سرعت متوسط آن در این بازه زمانی برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_0}{2t - t} = \frac{x_1 - x_0}{t}$$

گام دوم: متحرک از لحظه صفر تا $2t$ از مکان x_0 به x_1 رفته است. سرعت متوسط در بازه زمانی صفر تا $2t$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$v'_{av} = \frac{\Delta x'}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_0}{2t - 0} = \frac{x_1 - x_0}{2t}$$

$$\frac{v'_{av}}{v_{av}} = \frac{\frac{x_1 - x_0}{2t}}{\frac{x_1 - x_0}{t}} = \frac{1}{2}$$

گام سوم: حالا نسبت خواسته‌شده را به دست می‌آوریم:

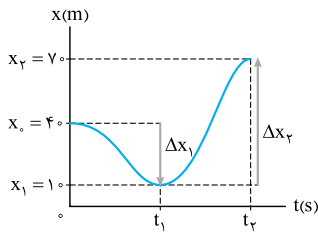
تکلیک با کمی دقت در نمودار می‌بینیم که جابه‌جایی متحرک در t ثانیه دوم برابر جابه‌جایی آن در $2t$ ثانیه اول است، پس داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta x = \Delta x'} \frac{v'_{av}}{v_{av}} = \frac{\Delta t}{\Delta t'} = \frac{t}{2t} = \frac{1}{2}$$

۱۱۳. گزینه ۲ گام اول: مطابق شکل در t_1 ثانیه اول (یعنی از صفر تا t_1) جابه‌جایی و در نتیجه سرعت متوسط منفی است و متحرک با سرعت متوسط -1 m/s از

$$v_{av,1} = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \Rightarrow -1 = \frac{10 - 40}{t_1 - 0} \Rightarrow -1 = \frac{-30}{t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{30}{1} = 3 \text{ s}$$

بنابراین برای محاسبه t_1 داریم:

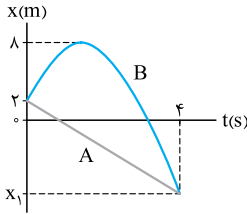


گام دوم: مطابق گفته سؤال، تندی متوسط در t_2 ثانیه اول (یعنی از صفر تا t_2) است؛ برای همین باید ابتدا مسافت طی شده در این بازه زمانی را حساب کنیم. همان طور که در مثال می بینید، متحرک ابتدا از $x_0 = 40 \text{ m}$ تا $x_1 = 10 \text{ m}$ رفته و سپس تغییر جهت داده و تا $x_2 = 70 \text{ m}$ حرکت کرده است؛ بنابراین برای محاسبه مسافت طی شده، باید اندازه جابه جایی‌ها را با هم جمع کنیم تا در نهایت به کمک رابطه تندی متوسط، t_2 معلوم شود:

$$l = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = |10 - 40| + |70 - 10| = 30 + 60 = 90 \text{ m}$$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t_2} \Rightarrow 15 = \frac{90}{t_2 - 0} \Rightarrow t_2 = \frac{90}{15} = 6 \text{ s}$$

گام اول: به کمک نمودار روبه‌رو و سرعت متوسط متحرک A، مکان نهایی هر دو متحرک را تعیین می‌کنیم:



$$\left. \begin{aligned} |v_{av}| &= 3/5 \text{ m/s} \\ \text{جهت حرکت A در خلاف جهت محور X است.} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_{av} = -3/5 \text{ m/s} \quad (I)$$

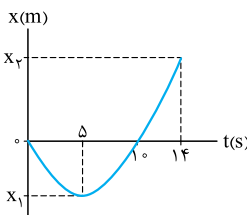
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow{(I)} -3/5 = \frac{x_1 - 2}{4 - 0} \Rightarrow (-3/5) \times 4 = x_1 - 2 \Rightarrow x_1 = -12 \text{ m}$$

گام دوم: مسافت طی شده توسط متحرک B برابر است با جمع جابه جایی متحرک قبل و بعد از تغییر جهت؛ یعنی:

$$l = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = |8 - 2| + |-12 - 8| = 6 + 20 = 26 \text{ m}$$

گام سوم: حالا که مسافت طی شده توسط متحرک B را می‌دانیم، تندی متوسط متحرک B در بازه $(4 \text{ s}, 0)$ به راحتی به دست می‌آید:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{26}{4} = 6.5 \text{ m/s}$$

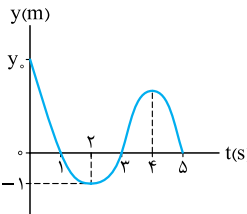


گام اول: همان طور که از شکل نمودار مشخص است، متحرک در لحظه‌های $t_1 = 0 \text{ s}$ و $t_2 = 10 \text{ s}$ در مبدأ مکان قرار دارد؛ طبق گفته سؤال، تندی متوسط متحرک در این بازه $1/4 \text{ m/s}$ است؛ در این بازه، متحرک از مبدأ تا مکان x_1 رفته و دوباره به مبدأ مکان برگشته است؛ یعنی در این مدت مسافت $|x_1|$ را پیموده است. بنابراین:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \Rightarrow 1/4 = \frac{2|x_1|}{10 - 0} \Rightarrow 14 = 2|x_1| \Rightarrow |x_1| = 7 \text{ m} \Rightarrow x_1 = -7 \text{ m}$$

گام دوم: در بازه زمانی $(14 \text{ s}, 5 \text{ s})$ متحرک از مکان $x_1 = -7 \text{ m}$ تا $x_2 = 11 \text{ m}$ جابه جا شده است. با توجه به اندازه سرعت متوسط در این بازه، می‌توانیم بردار مکان x_2 را حساب کنیم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow 2 = \frac{x_2 - (-7)}{14 - 5} \Rightarrow 18 = x_2 - (-7) \Rightarrow x_2 = 11 \text{ m} \Rightarrow x_2 = 11 \text{ m}$$



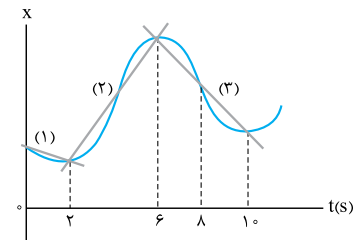
گام اول: با توجه به شکل روبه‌رو، متحرک در $t = 2 \text{ s}$ تغییر جهت می‌دهد؛ بنابراین سرعت متوسط از $t = 0$ تا $t = 2 \text{ s}$ برابر است با:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t} \Rightarrow -4\vec{j} = \frac{(-1 - y_0)\vec{j}}{2} \Rightarrow -4 = \frac{(-1 - y_0)}{2} \Rightarrow -8 = -1 - y_0 \Rightarrow -7 = -y_0 \Rightarrow y_0 = 7 \text{ m}$$

گام دوم: همان طور که در شکل روبه‌رو می‌بینید، متحرک دومین بار در $t = 3 \text{ s}$ از مبدأ عبور می‌کند. مسافت طی شده از مبدأ زمان $(t = 0)$ تا این لحظه برابر با مجموع اندازه جابه جایی در بازه‌های $(0, 2 \text{ s})$ و $(2 \text{ s}, 3 \text{ s})$ است:

$$l = |\Delta y_1| + |\Delta y_2| = |-1 - 7| + |0 - (-1)| = 8 + 1 = 9 \text{ m}$$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{9}{3} = 3 \text{ m/s}$$



گام سوم: حالا به کمک رابطه $s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$ تندی متوسط را حساب می‌کنیم:

گزینه ۳: طراح از ما تندی متوسط را می‌خواهد؛ یعنی نسبت مسافت طی شده به زمان؛ برای این کار ابتدا با توجه به نمودار، اندازه شیب خط در بازه‌هایی که تغییر جهت نداریم را با هم مقایسه می‌کنیم:

اندازه شیب خط (۱) > اندازه شیب خط (۲) > اندازه شیب خط (۳)

$$\Rightarrow s_{av(2,6)} > s_{av(6,10)} > s_{av(0,2)}$$

حالا به سراغ بررسی گزینه‌ها می‌رویم:

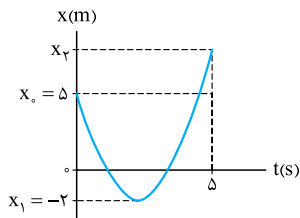
واضح است که **۱** کم‌ترین تندی متوسط را دارد؛ پس این گزینه را کنار می‌گذاریم؛ با توجه به مقایسه تندی‌های بالا، حتماً تندی متوسط در بازه 6 s تا 10 s از تندی

متوسط در بازه 2 s تا 10 s کم‌تر است؛ چرا که $s_{av(6,10)} < \frac{s_{av(2,6)} + s_{av(6,10)}}{2}$ است؛ پس **۴** هم حذف می‌شود؛ می‌ماند **۲** و **۳**؛ اگر خوب به شکل نگاه

کنید، متوجه می‌شوید که شیب خط در بازه زمانی 6 s تا 8 s بیشتر از بازه 2 s تا 6 s است؛ پس می‌توان گفت $s_{av(0,6)} < s_{av(2,8)}$ است؛ چرا که در یک بازه زمانی یکسان (6 s)، متحرک در بازه زمانی 2 s تا 8 s مسافت بیشتری از بازه زمانی 2 s تا 6 s طی کرده است؛ به طریق مشابه، شیب خط در بازه زمانی 8 s تا 10 s هم بیشتر از بازه زمانی 2 s تا 6 s است؛ بنابراین می‌توان گفت $s_{av(0,6)} < s_{av(2,10)}$ است؛ با این حساب **۳** پاسخ این تست خواهد بود.

توجه: به هر حال این روش حل، چشمی و غیراصولی است و اگر طراح تست، صفحه را شطرنجی می‌کرد یا بر روی نمودار اطلاعات عددی می‌نوشت، مسلماً تست بهتری می‌شد!

از روش عددگذاری هم می‌توانستید این تست را حل کنید، که آن هم چشمی و غیردقیق است؛ اما برای رسیدن به گزینه درست جواب می‌دهد!



۱۱۸. گزینه ۲ | گام اول: مطابق شکل، متحرک در بازه زمانی $(0, 5\text{ s})$ از $x_0 = 5\text{ m}$ شروع به حرکت کرده و تا $x_1 = -2\text{ m}$ رفته؛ سپس تغییر جهت داده و تا مکان x_p حرکت کرده است. با توجه به این موضوع، اندازه جابه‌جایی متحرک و مسافت طی شده آن در این بازه زمانی برابر است با:

$$\begin{cases} d = x_p - x_0 = x_p - 5 \\ l = |-2 - 5| + |x_p - (-2)| = 7 + x_p + 2 = x_p + 9 \end{cases}$$

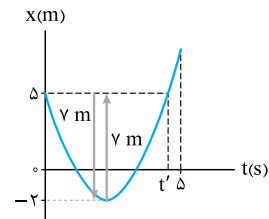
گام دوم: حالا می‌توانیم تندی متوسط و اندازه سرعت متوسط را حساب کنیم و بفهمیم تندی متوسط متحرک در این ۵ ثانیه چند متر بر ثانیه بیشتر از اندازه سرعت متوسط آن است:

$$\begin{cases} s_{av} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{x_p + 9}{5} \\ v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_p - 5}{5} \end{cases} \Rightarrow s_{av} - |v_{av}| = \frac{x_p + 9}{5} - \frac{(x_p - 5)}{5} = \frac{x_p + 9 - x_p + 5}{5} = \frac{14}{5} = 2.8\text{ m/s}$$

تکنیک

شکل روبه‌رو را ببینید! تا لحظه t' جابه‌جایی صفر و مسافت طی شده 14 m است. از t' تا 5 s اندازه جابه‌جایی و مسافت برابر است. پس می‌توانیم بگوییم اختلاف مسافت کل و اندازه جابه‌جایی کل همان

$$s_{av} - |v_{av}| = \frac{l - |\Delta x|}{\Delta t} = \frac{14}{5} = 2.8\text{ m/s} \quad \text{داریم: } l - |\Delta x| = 14\text{ m}$$



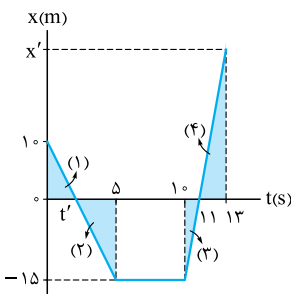
۱۱۹. گزینه ۳ | گام اول: مطابق شکل، بردار مکان متحرک در بازه زمانی (t_1, t_2) در خلاف جهت محور x بوده (زیر محور t)؛ پس باید مقدار t_1 و t_2 را حساب کنیم. برای این کار از تشابه دو مثلث (۱) و (۲) و همین‌طور تشابه دو مثلث (۳) و (۴) استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow \frac{16}{| -8 |} = \frac{t_1}{3 - t_1} \Rightarrow t_1 = 6 - 2t_1 \Rightarrow 3t_1 = 6 \Rightarrow t_1 = 2\text{ s}$$

$$\Rightarrow \frac{16}{| -8 |} = \frac{t_2 - 5}{7/5 - t_2} \Rightarrow 3t_2 - 15 = 15 - 2t_2 \Rightarrow 5t_2 = 30 \Rightarrow t_2 = 6\text{ s}$$

گام دوم: حالا وقت محاسبه مسافت طی شده و تندی متوسط در این بازه است؛ مطابق نمودار، در این بازه زمانی متحرک از $x = -8\text{ m}$ تا $x = 0$ رفته، چند ثانیه توقف داشته و سپس دوباره به مکان $x = 0$ برگشته است؛ بنابراین:

$$s_{av} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{16}{4} = 4\text{ m/s}$$



۱۲۰. گزینه ۲ | گام اول: مطابق شکل متحرک در لحظه t' برای اولین بار از مبدأ مکان می‌گذرد و در لحظه $t = 13\text{ s}$ در مکان x' قرار دارد. برای محاسبه تندی متوسط در این بازه زمانی، باید مقدار t' و x' را بدانیم. بنابراین از تشابه دو مثلث هاشور خورده (۱) و (۲) و همین‌طور تشابه دو مثلث هاشور خورده (۳) و (۴) استفاده می‌کنیم تا t' و x' معلوم شود.

$$\Rightarrow \frac{10}{| -15 |} = \frac{t'}{5 - t'} \Rightarrow 3t' = 10 - 2t' \Rightarrow 5t' = 10 \Rightarrow t' = 2\text{ s}$$

$$\Rightarrow \frac{| -15 |}{| x' |} = \frac{11 - 10}{13 - 11} \Rightarrow x' = 30\text{ m}$$

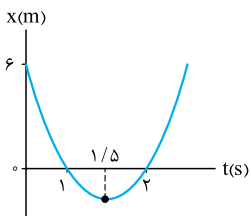
گام دوم: حالا به سراغ محاسبه تندی متوسط می‌رویم. مطابق شکل نمودار، متحرک در لحظه $t' = 2\text{ s}$ از مبدأ مکان ($x = 0$) عبور کرده و در خلاف جهت محور x تا $x = -15\text{ m}$ رفته؛ سپس برای 5 s توقف داشته و تغییر جهت داده و در جهت مثبت محور x دوباره شروع به حرکت کرده و تا $x' = 30\text{ m}$ پیش رفته است؛ بنابراین:

$$l = |-15 - 0| + |30 - (-15)| = 15 + 45 = 60\text{ m} \Rightarrow s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{60}{13 - 2} = \frac{60}{11}\text{ m/s}$$

۱۲۱. گزینه ۲

در درس‌نامه توضیح دادیم که اگر معادله مکان - زمان از نوع درجه دو (یعنی به صورت $x = At^2 + Bt + C$) باشد، در لحظه $t = \frac{-B}{2A}$ مقدار x بیشینه یا کمینه است و در این لحظه متحرک تغییر جهت می‌دهد. یعنی:

$$t_{\text{تغییرجهت}} = \frac{-B}{2A} = \frac{-(-9)}{2 \times 3} = \frac{9}{6} = 1.5\text{ s}$$



بد نیست بدانید چون ضریب t^2 مثبت است، در لحظه $t = 1.5\text{ s}$ کمینه یا مینیمم است. یعنی متحرک قبل از $t = 1.5\text{ s}$ در جهت منفی محور x و بعد از آن در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. نمودار مکان - زمان این حرکت را هم ببینیم:

گزینه ۲ | گام اول:

لحظه تغییر جهت متحرک را حساب می‌کنیم. چون معادله مکان - زمان از نوع درجه دو است، داریم:

$$t = \frac{-B}{2A} = \frac{-24}{2(-4)} = 3 \text{ s}$$

گام دوم: چون ضرب t منفی است، x در لحظه $t = 3 \text{ s}$ بیشینه است. پس از لحظه $t = 0$ تا $t = 3 \text{ s}$ در حال زیاد شدن است؛ یعنی متحرک در جهت مثبت حرکت می‌کند و پس از $t = 3 \text{ s}$ جهت حرکت متحرک عوض می‌شود.

خوب است نمودار مکان - زمان این متحرک را هم ببینید (شکل روبه‌رو).

همین‌طور که می‌بینید از صفر تا 3 s متحرک در جهت محور x حرکت کرده است.

گزینه ۱ | عبارت‌ها را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

الف) در لحظه‌ای که متحرک از مبدأ عبور می‌کند، $x = 0$ شده و بردار مکان تغییر جهت می‌دهد؛ حالا باید دید در این معادله در چه لحظاتی $x = 0$ صفر می‌شود:

$$x = \frac{1}{2}At^2 - \frac{5}{2}t - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \Delta = B^2 - 4AC = 25 - 4(2)(-1/2) = 121 \Rightarrow t_1, t_2 = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{5 \pm 11}{4} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 4 \text{ s} \\ t_2 = -3/2 \text{ s} \end{cases}$$

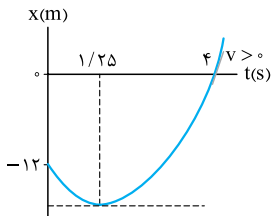
چون زمان منفی نداریم، متحرک فقط در لحظه $t = 4 \text{ s}$ از مبدأ مکان عبور کرده است؛ پس بردار مکان فقط یک بار تغییر جهت می‌دهد.

حواستون باشه! تغییر جهت دادن بردار مکان رو با تغییر جهت فور متحرک قاطی نکنید!

ب) برای دانستن جهت حرکت باید دید متحرک در چه لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد: $t_{\text{تغییر جهت}} = \frac{-B}{2A} = \frac{5}{2 \times 2} = 1/25 \text{ s}$

چون در بازه زمانی $(0, 4 \text{ s})$ متحرک یک بار تغییر جهت داشته، نمی‌تواند صرفاً در جهت منفی محور x حرکت کرده باشد. * (به نگاهی به نمودار مکان - زمان هم بیندازید تا جهت متحرک رو بهتر ببینید.)

پ) در این لحظه مکان متحرک صفر می‌شود؛ نه سرعتش! همین‌طور که در نمودار $x-t$ می‌بینید، شیب خط (سرعت) در لحظه $t = 4 \text{ s}$ مثبت است. * ($v > 0$)



ت) از لحظه $t_1 = 1/25 \text{ s}$ تا $t = 4 \text{ s}$ متحرک در قسمت منفی محور x (بردار مکان در خلاف جهت محور x) و از $t = 4 \text{ s}$ تا $t_2 = 7 \text{ s}$ متحرک در قسمت مثبت محور x (بردار مکان در جهت مثبت محور x) حرکت می‌کند بنابراین در بازه زمانی $(1/25 \text{ s}, 7 \text{ s})$ بردار مکان متحرک ابتدا در جهت منفی محور x و سپس در جهت مثبت محور x است. *

گزینه ۲ | گام اول:

باید تشخیص بدهیم چند ثانیه علامت x مثبت ($x > 0$) بوده است؛ یعنی:

$$-3t^2 + 15t - 18 > 0$$

پس ریشه‌های معادله $x = -3t^2 + 15t - 18$ را به ازای $x = 0$ پیدا می‌کنیم:

$$-3t^2 + 15t - 18 = 0 \xrightarrow{+(-3)} t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow (t-2)(t-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \text{ s} \\ t_2 = 3 \text{ s} \end{cases}$$

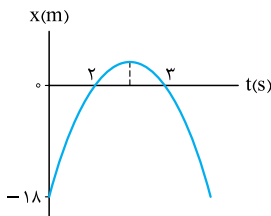
گام دوم: حالا وقت تعیین علامت معادله است. در ریاضی خواندید که علامت عبارت درجه دو (مثل $x = At^2 + Bt + C$) بین دو ریشه، مخالف علامت A است؛ پس داریم:

$t(s)$	0	2	3	$+\infty$
x		$-$	$+$	$-$

یعنی در بازه $(2 \text{ s}, 3 \text{ s})$ متحرک در مکان‌های مثبت است. پس در کل، متحرک 1 s در طرف مثبت محور x است. (این تست رو با رسم نمودار مکان - زمان هم می‌تونید جواب بپذیرید.)

تکلیک

ضرب t^2 در این معادله منفی است؛ پس مطابق شکل نمودار این معادله، سهمی رو به پایین است. همین‌طور که می‌بینید، فقط بین ریشه‌های معادله یعنی بین $t = 2 \text{ s}$ و $t = 3 \text{ s}$ مکان مثبت ($x > 0$) است.



گزینه ۳ | گام اول:

ابتدا لحظه‌های عبور متحرک از مبدأ را پیدا می‌کنیم:

$$x = t^2 - 6t + 5 \Rightarrow x = (t-1)(t-5) \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \text{ s} \\ t_2 = 5 \text{ s} \end{cases}$$

گام دوم: پس متحرک در لحظه‌های 1 s و 5 s از مبدأ عبور کرده است. متحرک در لحظه وسط بازه t_1 تا t_2 (یعنی $\frac{t_1 + t_2}{2}$) تغییر

جهت داده است. (البته لحظه تغییر جهت رو با رابطه $t' = \frac{-B}{2A}$ هم می‌تونید مساب کنید.)

گام سوم: حالا می‌تونیم نمودار مکان - زمان این متحرک را رسم کنیم. چون ضرب t_2 مثبت است، نمودار باید به شکل روبه‌رو باشد. مطابق شکل در بازه‌های زمانی «صفر تا 1 s » و « 3 s تا 5 s » متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ بوده است؛ پس از بین گزینه‌ها متحرک در ثانیه پنجم (یعنی بازه 4 s تا 5 s) در حال نزدیک شدن به مبدأ است.

گزینه ۲ | وقتی معادله مکان - زمان درجه دو است، برای محاسبه بیشترین فاصله متحرک از مکان اولیه‌اش باید مکان در دو لحظه را به دست آوریم؛ این لحظات،

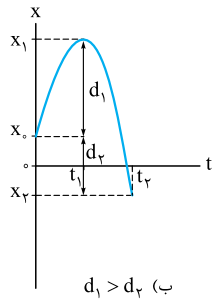
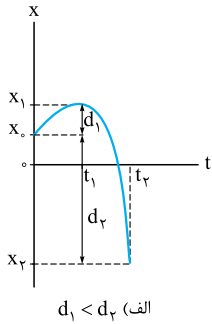
$$t = \frac{-B}{2A} = \frac{-(-6)}{2(1)} = 3 \text{ s}$$

لحظه تغییر جهت و لحظه پایان بازه (این‌جا $t = 4 \text{ s}$) است. اول به سراغ تعیین لحظه تغییر جهت می‌رویم:

اگر موضوع برایتان مبهم است، نکته زیر را بخوانید:

نکته

می‌دانید که وقتی معادله مکان - زمان درجه دو است، نمودار آن یک سهمی مانند شکل‌های الف و ب است. واضح است که در یک بازه زمانی معین (مثل صفر تا t_2) متحرک یا در لحظه تغییر جهت (t_1) یا در لحظه پایان بازه (t_2) در بیشترین فاصله از x_0 است. در شکل (الف) می‌بینید که در لحظه پایان بازه (t_2)، متحرک در بیشترین فاصله از مکان اولیه‌اش است. اما در شکل (ب) در لحظه تغییر جهت (t_1) متحرک در بیشترین فاصله از مکان اولیه‌اش است. (ما نمودارها رو برای حالتی که ضریب t^2 منفی است رسم کردیم. اگر ضریب t^2 مثبت باشد هم به همین نتایج می‌رسید.)



حالا مقادیر x_0 ، 3 s و 4 s را در معادله $x = t^2 - 6t + 8$ قرار می‌دهیم و مکان متحرک را در این لحظه‌ها به دست می‌آوریم:

$$t_0 = 0 \Rightarrow x_0 = (0)^2 - 6(0) + 8 = 8\text{ m} \quad (\text{مکان اولیه متحرک})$$

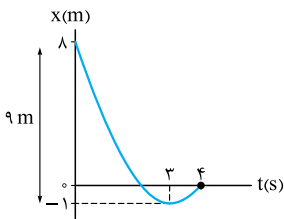
$$t_1 = 3\text{ s} \Rightarrow x_1 = (3)^2 - 6(3) + 8 = -1\text{ m} \quad (\text{مکان متحرک در لحظه تغییر جهت})$$

$$t_2 = 4\text{ s} \Rightarrow x_2 = (4)^2 - 6(4) + 8 = 0 \quad (\text{مکان متحرک در انتهای بازه})$$

همان‌طور که می‌بینید در بازه زمانی $(0, 4\text{ s})$ متحرک در لحظه تغییر جهت بیشترین فاصله را از مکان اولیه‌اش دارد که این فاصله برابر است با:

$$|x_1 - x_0| = |-1 - 8| = |-9| = 9\text{ m}$$

بد نیست، این موضوع را در نمودار مکان - زمان این حرکت (شکل روبه‌رو) هم ببینیم:



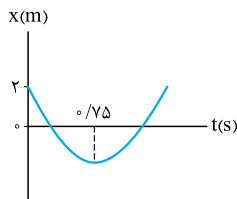
۱۲۷. گزینه ۲ در بازه زمانی‌ای که تغییر جهت داشته باشیم؛ مسافت طی شده و اندازه جابه‌جایی با هم برابر نیست. پس

$$t = -\frac{B}{2A} = \frac{-(-9)}{2 \times 6} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0.75\text{ s}$$

لحظه تغییر جهت را به دست می‌آوریم:

این لحظه در بازه $(0, 5\text{ s})$ است؛ بنابراین در بازه ذکرشده در **۲** مسافت و اندازه جابه‌جایی با هم برابر نیستند.

برای درک بهتر نمودار مکان - زمان این حرکت را هم ببینید:



همین‌طور که می‌بینید در بازه‌ای که $t = 0.75\text{ s}$ در آن قرار می‌گیرد، مسافت با اندازه جابه‌جایی برابر نیستند.

۱۲۸. گزینه ۴ گام اول: برای این‌که بفهمیم متحرک در بازه صفر تا 5 s تغییر جهت داده است یا نه، ابتدا لحظه تغییر جهت را حساب می‌کنیم:

$$t_{\text{تغییر جهت}} = -\frac{B}{2A} = -\frac{12}{2(-2)} = 3\text{ s}$$

گام دوم: با توجه به لحظه تغییر جهت، برای محاسبه مسافت طی شده باید جابه‌جایی قبل از تغییر جهت و بعد از تغییر جهت را حساب کنیم و با هم جمع کنیم:

$$t_0 = 0 \Rightarrow x_0 = -40\text{ m}$$

$$\Rightarrow |\Delta x_1| = x_1 - x_0 = -22 - (-40) = 18\text{ m}$$

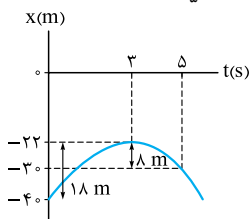
$$t_1 = 3\text{ s} \Rightarrow x_1 = \underbrace{-2(3)^2}_{-18} + \underbrace{12(3)}_{36} - 40 = -22\text{ m}$$

$$\Rightarrow I = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 18 + 8 = 26\text{ m}$$

$$\Rightarrow |\Delta x_2| = |x_2 - x_1| = |-30 - (-22)| = 8\text{ m}$$

$$t_2 = 5\text{ s} \Rightarrow x_2 = \underbrace{-2(5)^2}_{-50} + \underbrace{12(5)}_{60} - 40 = -30\text{ m}$$

بد نیست مسافتی که این متحرک در بازه صفر تا 5 s می‌پیماید را در نمودار مکان - زمانش هم ببینید (شکل روبه‌رو):



در محاسبه جابه‌جایی در یک معادله، برای سادگی در محاسبات، می‌توانید x_0 را کنار بگذارید. مثلاً در همین تست:

$$x = -2t^2 + 12t - 40 \Rightarrow \begin{cases} t_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \\ t_1 = 3\text{ s} \Rightarrow x_1 = -2(3)^2 + 12(3) = 18\text{ m} \\ t_2 = 5\text{ s} \Rightarrow x_2 = -2(5)^2 + 12(5) = 10\text{ m} \end{cases} \Rightarrow I = |x_1 - x_0| + |x_2 - x_1| = |18 - 0| + |10 - 18| = 18 + 8 = 26\text{ m}$$

تکنیک

۱۲۹. گزینه ۱ گام اول: اول باید ببینیم متحرک در 2 ثانیه اول تغییر جهت داده است یا نه. برای همین باید لحظه تغییر

$$t = -\frac{B}{2A} = \frac{-1}{2(1)} = -\frac{1}{2} \quad (\text{غ.ق.ق})$$

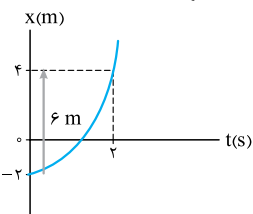
جهت را تعیین کنیم:

گام دوم: با توجه به منفی شدن t ، متحرک تغییر جهت نمی‌دهد و در نتیجه در 2 ثانیه اول حرکت، مسافت طی شده برابر با

$$I = |\Delta x| = |x_2 - x_0| = |(4 + 2 - 2) - (0 + 0 - 2)| = 6\text{ m}$$

اندازه جابه‌جایی است:

اگر می‌خواهید شهود بیشتری نسبت به مسئله داشته باشید، نمودار مکان - زمان متحرک در 2 ثانیه اول را ببینید.



۱۳۰. گزینه ۱ چون معادله از نوع درجه دو است، متحرک در لحظه $t' = \frac{-B}{2A} = \frac{-4}{2 \times 2} = -1$ s تغییر جهت می‌دهد؛ یعنی:

منفی شدن t' نشانه این است که متحرک تغییر جهت نداده است؛ پس مسافت طی شده (l) برابر اندازه جابه‌جایی ($|\Delta x|$) است؛ به زبان ریاضی:

$$l = |\Delta x| \Rightarrow \frac{l}{|\Delta x|} = 1$$

متحرک تغییر جهت نداده است.

۱۳۱. گزینه ۳ گام اول: می‌دانید که بردار مکان متحرک در لحظه‌هایی که متحرک از مبدأ عبور می‌کند، تغییر جهت می‌دهد. این لحظه‌ها ریشه‌های ساده (و نه ریشه مضاعف) معادله مکان - زمان است؛ به کمک تجزیه داریم:

$$x = 2t^2 - 16t + 24 = 2(t-2)(t-6) \xrightarrow{x=0} 0 = 2(t-2)(t-6) \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \text{ s} \\ t_2 = 6 \text{ s} \end{cases}$$

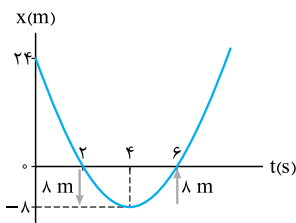
گام دوم: برای به دست آوردن مقدار مسافت طی شده به لحظه تغییر جهت نیاز داریم:

$$t = \frac{-B}{2A} = \frac{-(-16)}{2(2)} = 4 \text{ s}$$

$$t' = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{2 + 6}{2} = 4 \text{ s}$$

با داشتن لحظه‌های عبور از مبدأ می‌توانیم لحظه تغییر جهت را این‌طور هم حساب کنیم:

گام سوم: اگر جابه‌جایی از $t_1 = 2$ s تا $t' = 4$ s را Δx_1 و جابه‌جایی از $t' = 4$ s تا $t_2 = 6$ s را Δx_2 بگیریم، مسافت طی شده مجموع این دو مقدار است؛ یعنی:



$$\begin{aligned} l &= |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = |(x_4 - x_2)| + |(x_6 - x_4)| \\ &= |(2(4)^2 - 16(4) + 24) - (2(2)^2 - 16(2) + 24)| + |(2(6)^2 - 16(6) + 24) - (2(4)^2 - 16(4) + 24)| \\ &= |(-8) - (-8)| + |0 - (-8)| = 16 \text{ m} \end{aligned}$$

برای درک بهتر، نمودار مکان - زمان این متحرک را می‌توانید ببینید:

تکنیک با توجه به تقارن سهمی، اندازه جابه‌جایی t ثانیاً قبل و t ثانیاً بعد از لحظه تغییر جهت (t') یکسان است. از سوی دیگر در لحظه‌های

t_1 و t_2 متحرک از مبدأ عبور کرده است و $x_1 = x_2 = 0$ است. پس داریم:

$$l = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| \xrightarrow{|\Delta x_1| = |\Delta x_2|} l = 2|\Delta x_1| = 2|x' - x_1| \xrightarrow{x_1=0} l = 2|x'| = 2 \times |2(4)^2 - 16(4) + 24| = 2 \times |-8| = 16 \text{ m}$$

اگر از نوشتن $x_2 = 24$ m در محاسبات صرف نظر می‌کردیم، سریع‌تر به جواب می‌رسیدیم!

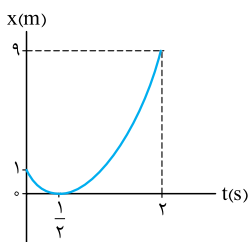
$$t = -\frac{B}{2A} = \frac{-(-4)}{2(4)} = \frac{1}{2} \text{ s}$$

۱۳۲. گزینه ۳ گام اول: ابتدا باید ببینیم که متحرک تغییر جهت می‌دهد یا نه:

پس متحرک در $t = \frac{1}{2}$ s تغییر جهت می‌دهد.

گام دوم: مسافت طی شده برابر با اندازه جابه‌جایی در بازه $(\frac{1}{2}, 0)$ به اضافه اندازه جابه‌جایی در بازه $(0, 2)$ است:

$$\begin{aligned} l &= |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = |(x_{\frac{1}{2}} - x_0)| + |(x_2 - x_{\frac{1}{2}})| = |(4(\frac{1}{2})^2 - 4(\frac{1}{2}) + 1) - (4(0)^2 - 4(0) + 1)| + |(4(2)^2 - 4(2) + 1) - (4(\frac{1}{2})^2 - 4(\frac{1}{2}) + 1)| \\ &= |(0) - (1)| + |(9) - (0)| = 1 + 9 = 10 \text{ m} \end{aligned}$$



$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{10}{2} = 5 \text{ m/s}$$

گام سوم: تندی متوسط برابر $\frac{l}{\Delta t}$ است:

اگر دوست دارید سؤال را بهتر درک کنید، نمودار مکان - زمان متحرک در این بازه را ببینید:

درس پنجم تندی لحظه‌ای و سرعت لحظه‌ای



گفتیم لحظه، بازه زمانی خیلی خیلی خیلی کوچک است؛ تندی لحظه‌ای هم یعنی تندی متحرک در یک بازه زمانی خیلی خیلی خیلی کوچک! در واقع تندی لحظه‌ای، تندی متحرک در یک لحظه است. سرعت لحظه‌ای هم به همین صورت تعریف می‌شود؛ به سرعت متحرک در یک لحظه از زمان، سرعت لحظه‌ای می‌گوییم.

حواستون باشه! هر با واژه سرعت یا تندی (بدون صفت متوسط یا لفظه‌ای) پیاد، منظور سرعت یا تندی لفظه‌ایه، توی فرمول‌ها هم v یا S (بدون اندیس)

پیاد، منظور سرعت یا تندی لفظه‌ایه.

پرسش ۱۱ تفاوت سرعت (لحظه‌ای) و تندی (لحظه‌ای) چیست؟

پاسخ

سرعت (لحظه‌ای) یک بردار است، پس هم جهت دارد و هم مقدار، مثلاً وقتی می‌گوییم $\vec{v} = -4\vec{i}$ ، یعنی اندازه سرعت متحرک 4 m/s و حرکت آن در جهت منفی x است. اما در حرکت‌های راست‌خط برای راحتی خودمان اغلب پیکانه بردار \vec{i} و \vec{j} را نمی‌گذاریم و مثلاً می‌نویسیم: $v = -4 \text{ m/s}$ که منظورمان همان بردار $\vec{v} = -4\vec{i}$ یا $\vec{v} = -4\vec{j}$ است.

تندی (لحظه‌ای) یک کمیت نرده‌ای است و جهت ندارد. در واقع تندی (لحظه‌ای) همان اندازه سرعت (لحظه‌ای) است. بنابراین با تندی نمی‌توانیم جهت حرکت را مشخص کنیم، (زیرا علامت منفی برای تندی معنی ندارد)؛ مثلاً وقتی می‌گوییم $s = |v| = 4 \text{ m/s}$ یعنی اندازه سرعت (یا همان تندی) 4 m/s است ولی جهت حرکت مشخص نیست.

نکته

در بحث تندی متوسط و سرعت متوسط گفتیم تندی متوسط همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازه سرعت متوسط است: $s_{av} > |v_{av}|$
 اما تندی لحظه‌ای همواره برابر اندازه سرعت (لحظه‌ای) است: $s = |v|$ یا $s_{\text{لحظه‌ای}} = |v_{\text{لحظه‌ای}}|$

تندی سنج

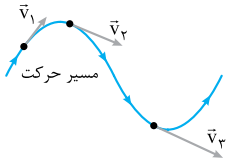
احتمالاً برای شما هم تندی‌سنج خودروها جذاب است. عقربه تندی‌سنج، تندی لحظه‌ای خودرو را نمایش می‌دهد. (مثلاً در لحظه‌ای که تصویر روبه‌رو گرفته شده تندی خودرو 298 km/h بوده است.)



اما وقتی می‌خواهیم سرعت خودرو را بگوییم، علاوه بر تندی باید جهت آن را هم مشخص کنیم. مثلاً بگوییم سرعت خودرو 298 km/h به سمت شمال غربی است.

کمی عمیق‌تر

وقتی می‌گوییم تندی لحظه‌ای یک خودرو 298 km/h است، یعنی اگر این خودرو به مدت 1 h با همین تندی حرکت کند، مسافت 298 km را می‌پیماید. هم‌چنین وقتی سرعت لحظه‌ای خودرو 298 km/h به سمت شمال غربی است، یعنی اگر این خودرو به مدت 1 h در همه لحظه‌ها با این سرعت حرکت کند، جابه‌جایی‌اش 298 km به سمت شمال غرب خواهد بود.

جهت بردار سرعت لحظه‌ای


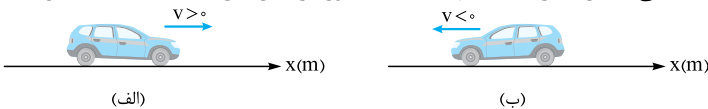
• بردار سرعت (لحظه‌ای) همواره در جهت حرکت بوده و بر مسیر حرکت مماس است. مثلاً شکل مقابل مسیر حرکت یک متحرک است که در چند نقطه از مسیر، بردار سرعت (لحظه‌ای) آن را رسم کرده‌ایم.

نکته

طول بردار سرعت بیانگر اندازه آن (یعنی تندی) است. در شکل بالا طول بردار سرعت در طی مسیر افزایش یافته؛ یعنی اندازه سرعت یا تندی در حال افزایش است.

علامت سرعت

• در حرکت‌هایی که روی محور x یا y انجام می‌شود، علامت سرعت بیانگر جهت حرکت است. اگر $v > 0$ باشد، یعنی متحرک در حال حرکت در جهت مثبت محور است (مانند شکل الف) و اگر $v < 0$ باشد، یعنی متحرک در خلاف جهت مثبت محور در حال حرکت است (مانند شکل ب).


حواستون باشه

منفی یا مثبت بودن سرعت هیچ ربطی به کم یا زیاد بودن تندی ندارد. مثلاً اگر سرعت متحرکی از $v_1 = -20 \text{ m/s}$ به $v_2 = 8 \text{ m/s}$ برسد یعنی تندی اون 12 m/s کم شده.

کمی عمیق‌تر
تفاوت تغییرات سرعت و تغییرات تندی

• اگر سرعت اولیه (v_1) و سرعت نهایی (v_2) یک متحرک را داشته باشیم، تغییرات تندی و تغییرات سرعت به صورت مقابل محاسبه می‌شود:
 تغییرات سرعت: $\Delta v = v_2 - v_1$
 تغییرات تندی: $\Delta s = |v_2| - |v_1|$
 این دو رابطه به ما می‌گویند که در محاسبه تغییرات تندی با جهت (یا علامت) v_1 و v_2 کاری نداریم. اما وقتی می‌خواهیم تغییرات سرعت را حساب کنیم باید در حساب و کتابمان علامت سرعت اولیه و نهایی را در نظر بگیریم.

مثلاً اگر $v_1 = 20 \text{ m/s}$ و $v_2 = -8 \text{ m/s}$ باشد، تغییرات تندی و تغییرات سرعت به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta s = |v_2| - |v_1| = |-8| - |20| = -12 \text{ m/s}$$

$$\Delta v = v_2 - v_1 = -8 - 20 = -28 \text{ m/s}$$

• علامت منفی در تغییرات تندی (-12 m/s) نشانه کاهش تندی است؛ اما علامت منفی در تغییرات سرعت (-28 m/s) نشانه منفی بودن جهت بردار تغییرات سرعت است.

نکته

هر وقت علامت‌های سرعت اولیه و نهایی یکسان باشد، اندازه تغییرات سرعت برابر تغییرات تندی است. ولی اگر سرعت اولیه و سرعت نهایی هم‌علامت نباشند، اندازه تغییرات سرعت با تغییرات تندی برابر نیست.

آزمون ۱ خودرویی روی محور X حرکت می‌کند و عقربه تندی سنج آن در لحظه t_1 ، 36 km/h را نشان می‌دهد. اگر در بازه زمانی t_1 تا t_2 بردار تغییرات سرعت این خودرو $(-54 \text{ km/h})\hat{i}$ باشد، با در نظر گرفتن حالت‌های ممکن، کدام گزینه درباره حرکت این خودرو در بازه t_1 تا t_2 نمی‌تواند درست باشد؟

(۱) تندی 54 km/h افزایش یافته است.
 (۲) تندی خودرو 18 km/h کاهش یافته است.
 (۳) حرکت خودرو در لحظه t_2 الزاماً در جهت منفی است.
 (۴) سرعت خودرو 54 km/h کاهش یافته است.

پاسخ ۱ گام اول: این خودرو در لحظه t_1 یا در جهت \hat{i} یا در خلاف جهت محور X در حال حرکت است. پس ممکن است سرعت اولیه آن $v_1 = +36 \text{ km/h}$ یا $v_1 = -36 \text{ km/h}$ باشد. با توجه به این دو حالت ممکن داریم:

$$\Delta v = v_2 - v_1 \quad \frac{v_1 = +36 \text{ km/h}}{\Delta v = -54 \text{ km/h}} \rightarrow -54 = v_2 - 36 \Rightarrow v_2 = -54 + 36 = -18 \text{ km/h}$$

$$\Delta v = v_2 - v_1 \quad \frac{v_1 = -36 \text{ km/h}}{\Delta v = -54 \text{ km/h}} \rightarrow -54 = v_2 - (-36) \Rightarrow v_2 = -54 - 36 = -90 \text{ km/h}$$

تا این‌جا معلوم شد که در هر دو حالت بردار سرعت نهایی (\vec{v}_2) منفی است. پس حرکت خودرو در لحظه t_2 الزاماً در جهت منفی است و (۳) درست است. گام دوم: حالا که حالت‌های ممکن v_2 را داریم، تغییرات تندی را در دو حالت حساب می‌کنیم:

$$\Delta s = |v_2| - |v_1| = |-18| - 36 = -18 \text{ km/h}$$

یعنی تندی خودرو 18 km/h کاهش یافته است. پس (۲) هم می‌تواند درست باشد.

$$\Delta s = |v_2| - |v_1| = |-90| - |-36| = +54 \text{ km/h}$$

یعنی تندی خودرو 54 km/h زیاد شده است. پس (۱) هم می‌تواند اتفاق بیفتد.

اما چرا باید (۴) را انتخاب کنیم؟ چون همان‌طور که گفتیم، علامت منفی در $\Delta \vec{v} = (-54 \text{ km/h})\hat{i}$ جهت بردار تغییرات سرعت را نشان می‌دهد و نه کم‌شدن آن را.

مفهوم تندشونده، کندشونده یا یکنواخت

این سه اصطلاح درباره کم یا زیاد شدن یا تغییر نکردن تندی (اندازه سرعت) هستند.

حرکت تندشونده: اگر در طی حرکت، تندی (اندازه سرعت) در حال زیاد شدن باشد، نوع حرکت تندشونده است. مثلاً اگر سرعت متحرکی به تدریج از -2 m/s به -10 m/s برسد، نوع حرکتش تندشونده است. (یادآوری می‌کنیم که علامت منفی سرعت، نشانه جهت حرکت است و ربطی به تندی ندارد.)

حرکت کندشونده: اگر در طی حرکت، تندی (اندازه سرعت) در حال کم شدن باشد، نوع حرکت کندشونده است. مثلاً اگر سرعت متحرکی به تدریج از -10 m/s به -2 m/s برسد، نوع حرکتش کندشونده است.

حرکت یکنواخت: اگر در طول مسیر، تندی (اندازه سرعت) تغییر نکند، حرکت یکنواخت است.

چند نکته ۱ همه حرکت‌ها چه بر مسیر مستقیم و چه بر مسیر غیرمستقیم، یا تندشونده یا کندشونده یا یکنواخت‌اند. مثلاً حرکت دایره‌ای یکنواخت، حرکتی است که مسیری بر روی محیط یک دایره و تندی‌اش ثابت است.

(۲) اگر متحرکی از حال سکون شروع به حرکت کند، حتماً در ابتدا حرکتش تندشونده است.

(۳) اگر متحرکی در طول مسیری متوقف شود، حتماً باید تندی‌اش کم شود تا بایستد، پس نوع حرکتش کندشونده است.

(۴) اگر علامت سرعت اولیه و سرعت نهایی متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند یکسان نباشد (مثلاً $v_1 = -2 \text{ m/s}$ و $v_2 = 10 \text{ m/s}$)، می‌فهمیم که حداقل یک بار سرعت متحرک صفر شده و تغییر علامت داده است. یعنی حداقل یک بار متحرک متوقف شده و تغییر جهت داده است. در این صورت لحظاتی قبل از تغییر جهت حرکت کندشونده و لحظاتی پس از تغییر جهت حرکت تندشونده است.

آزمون ۱ سرعت اولیه جسمی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، $v_1 = -5 \text{ m/s}$ و سرعت نهایی آن $v_2 = 5 \text{ m/s}$ است. چند مورد از عبارتهای زیر درست است؟

(الف) نوع حرکت جسم در تمام طول مسیر ممکن است یکنواخت باشد. (ب) متحرک حداقل یک بار تغییر جهت داده است. (پ) حداکثر تندی متحرک در طول مسیر 5 m/s است.

(۴) ۳

(۳) ۲

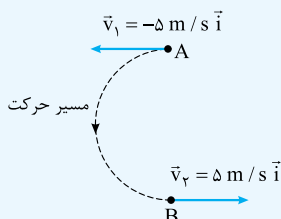
(۲) ۱

صفر

پاسخ ۱ با توجه به این‌که حرکت در مسیر مستقیم است و علامت سرعت اولیه و نهایی متحرک یکسان نیست، نتیجه می‌گیریم این متحرک حداقل یک بار توقف کرده و تغییر جهت داده است. یعنی عبارت (ب) درست است. اما عبارت (الف) نمی‌تواند درست باشد، چون برای تغییر جهت باید حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده باشد.

نادرستی عبارت (پ): ما درباره این حرکت اطلاعاتی جز سرعت اولیه و سرعت نهایی و مستقیم بودن مسیر حرکت نداریم. بنابراین در طول مسیر تندی متحرک هر مقداری (بیشتر یا کمتر از 5 m/s) می‌تواند باشد.

خواستون باشه در این تست اگر مستقیم بودن مسیر حرکت گفته نمی‌شد، جمله (الف) هم درست می‌شد. مثلاً اگر حرکت دایره‌ای یکنواخت باشد، پس از نیم دور چرخش علامت بردار سرعت عوض می‌شود. در شکل روبه‌رو متحرک تمام طول نیم‌دایره AB را با تندی 5 m/s می‌پیماید (پس حرکتش یکنواخت است) و سرعت اولیه و نهایی‌اش به ترتیب -5 m/s و $+5 \text{ m/s}$ است.



معادله سرعت - زمان

یکی از راه‌های نشان دادن سرعت یک جسم در هر لحظه، نوشتن معادله سرعت - زمان (یا $v-t$) است. در این معادله اگر به جای t ، لحظه مورد نظرمان را بگذاریم، می‌توانیم سرعت متحرک در آن لحظه را حساب کنیم. مثلاً $v = 3t^2 - 18$ (در SI) یک معادله سرعت - زمان است که با قراردادن لحظه دلخواه در آن می‌توانیم سرعت در آن لحظه را حساب کنیم. حالا شما بگویید طبق این معادله سرعت اولیه و سرعت متحرک در لحظه $t = 2$ S چند متر بر ثانیه است؟

- چند نکته** ۱) به کمک معادله سرعت - زمان نمی‌توانیم مکان اولیه جسم را مشخص کنیم.
- ۲) به کمک معادله سرعت - زمان می‌توانیم تشخیص دهیم که یک متحرک چه زمانی تغییر جهت می‌دهد. برای آن که متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، تغییر جهت بدهد، باید دو اتفاق بیفتد:
- الف** سرعتش صفر شود (متوقف شود).
- ب** علامت سرعتش تغییر کند.
- ۳) با قراردادن یک لحظه در معادله سرعت - زمان، علامت سرعتی که به دست می‌آید، منفی یا مثبت است. همان‌طور که گفتیم این علامت نشان‌دهنده جهت حرکت متحرک در آن لحظه است.

آزمون ۱) معادله سرعت - زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، در SI به صورت $v = 4t^2 - 81$ است. این متحرک در چه لحظه‌ای و چگونه تغییر جهت می‌دهد؟

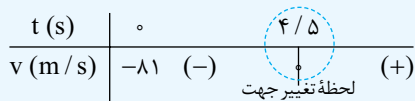
- ۱) این متحرک تغییر جهت نمی‌دهد.
- ۲) در لحظه $t = 4/5$ S از جهت منفی محور به جهت مثبت تغییر جهت می‌دهد.
- ۳) در لحظه $t = 4/5$ S از جهت مثبت محور به جهت منفی تغییر جهت می‌دهد.
- ۴) در لحظه‌های $t = 4/5$ S و $t = 9$ S دو بار تغییر جهت می‌دهد.
- پاسخ** ۲) اول ببینیم سرعت این متحرک در چه لحظه یا لحظه‌هایی صفر می‌شود:

$$v = 0 \Rightarrow 4t^2 - 81 = 0 \Rightarrow t^2 = \frac{81}{4} \Rightarrow t = \pm \frac{9}{2} \text{ s} = \pm 4.5 \text{ s}$$

($4/5$ S - که قبل از مبدأ زمان است و قابل قبول نیست.)

حالا باید ببینیم که آیا در لحظه $t = 4/5$ S علامت سرعت تغییر کرده است یا نه. برای این کار دو لحظه $t_1 = 4$ S و $t_2 = 5$ S (یکی قبل از $4/5$ S و یکی بعد از آن) را در معادله سرعت امتحان می‌کنیم. اگر علامت سرعتشان مختلف بود، یعنی متحرک در لحظه $4/5$ S تغییر جهت داده است.

$$\begin{cases} v_1 = 4(4)^2 - 81 = -17 \text{ m/s} \\ v_2 = 4(5)^2 - 81 = +19 \text{ m/s} \end{cases} \Rightarrow \text{متحرک در لحظه } t = 4/5 \text{ S از جهت منفی محور به مثبت تغییر جهت داده است.}$$



این هم جدول تغییرات سرعت:

۴ اگر مسافت پیموده‌شده توسط یک متحرک را در بازه زمانی t_1 تا t_2 از ما بخواهند، باید حواسمان را جمع کنیم که آیا متحرک در آن بازه زمانی تغییر جهت داده است یا نه. برای محاسبه مسافت پیموده‌شده به کمک معادله‌های مکان - زمان و سرعت - زمان باید دستورالعمل زیر را اجرا کنید:

- ۱) معادله سرعت را برابر صفر قرار دهید و ریشه‌های آن را حساب کنید. (ریشه‌های ساده معادله، لحظه‌های تغییر جهت هستند.)
- ۲) ببینید ریشه‌های به دست آمده، در بازه زمانی t_1 تا t_2 هستند یا نه. اگر باشند یعنی متحرک در بازه زمانی t_1 تا t_2 تغییر جهت داده است.
- ۳) به کمک معادله مکان - زمان جابجایی‌های متحرک از لحظه t_1 تا لحظه تغییر جهت و از لحظه تغییر جهت تا لحظه t_2 را حساب کنید.
- ۴) مسافت طی شده برابر جمع اندازه جابجایی‌ها (قدرمطلق جابجایی‌ها) است.

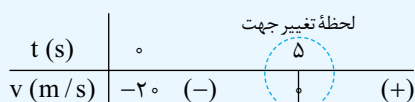
تست زیر را ببینید تا قشنگ موضوع برایتان جا بیفتد.

آزمون ۱) معادله مکان - زمان و سرعت - زمان متحرکی در SI به صورت $x = 2t^2 - 20t + 5$ و $v = 4t - 20$ است. این متحرک در ۸ ثانیه اول حرکتش، چه مسافتی را بر حسب متر می‌پیماید؟

- ۳۲ (۱) -۳۲ (۲) -۶۸ (۳) ۶۸ (۴)

پاسخ ۴) باید ببینیم متحرک در چه لحظه‌ای سرعتش صفر شده و تغییر جهت داده است، پس v را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$v = 0 \Rightarrow 4t - 20 = 0 \Rightarrow t = 5 \text{ s}$$



تعیین علامت هم می‌کنیم تا مطمئن بشویم متحرک در لحظه $t = 5$ S تغییر جهت داده:

پس این متحرک در ۸ ثانیه اول، ۵ s در خلاف جهت محور X و ۳ s در جهت محور X حرکت کرده است، یعنی باید جابه‌جایی‌های صفر تا ۵ s و ۵ s تا ۸ s را جداجا حساب کنیم:

$$\Delta x_1 = x_5 - x_0 = [2(5)^2 - 2 \cdot 0(5) + 5] - [2(0)^2 - 2 \cdot 0(0) + 5] = -50 \text{ m}$$

$$\Delta x_2 = x_8 - x_5 = [2(8)^2 - 2 \cdot 0(8) + 5] - [2(5)^2 - 2 \cdot 0(5) + 5] = +18 \text{ m}$$

یعنی این متحرک در ۵ ثانیه اول حرکتش، ۵۰ m در خلاف جهت محور X و در ۳ ثانیه بعد از آن ۱۸ m در جهت مثبت محور حرکت کرده است. حالا می‌توانیم مسافت پیموده‌شده توسط متحرک را در ۸ ثانیه اول حساب کنیم:

$$I_{(0,8)} = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 50 + 18 = 68 \text{ m}$$

همان‌طور که کمی قبل‌تر گفتیم، در حرکت بر مسیر مستقیم، متحرک در لحظه تغییر جهت می‌ایستد؛ پس لحظه‌های قبل از تغییر جهت، حرکت کندشونده و لحظه‌های بعد از تغییر جهت حرکت تندشونده است!

تست ۱۴ معادله سرعت - زمان متحرکی در SI به صورت $v = 3t - 12$ است. در کدام بازه زمانی حرکت متحرک کندشونده است و در این مدت متحرک در چه جهتی حرکت می‌کند؟

۱) $t = 4 \text{ s}$ ، در جهت منفی

۲) $t = 4 \text{ s}$ تا $t = 4 \text{ s}$ ، در جهت مثبت

۳) از لحظه $t = 4 \text{ s}$ به بعد، در جهت منفی

پاسخ ۱ لحظه‌ای را که متحرک تغییر جهت می‌دهد، حساب می‌کنیم و بعد معادله $v = 3t - 12$ را تعیین علامت می‌کنیم:

$$v = 0 \Rightarrow 3t - 12 = 0 \Rightarrow t = \frac{12}{3} = 4 \text{ s}$$

t (s)	۰	۴	۰
v (m/s)	-۱۲	(-)	(+)

لحظه تغییر جهت

برای آن که متحرک بتواند تغییر جهت بدهد، باید لحظه‌ای متوقف شود؛ بنابراین قبل از این لحظه حرکتش کند می‌شود تا بایستد. در این جا هم قبل از لحظه $t = 4 \text{ s}$ حرکت کندشونده است. (۳) و (۴) نادرست‌اند. در جدول تعیین علامت هم می‌بینید که قبل از لحظه $t = 4 \text{ s}$ علامت سرعت منفی است؛ پس متحرک در بازه $(0, 4 \text{ s})$ در جهت منفی محور حرکت می‌کند، یعنی (۱) را علامت می‌زنیم.

۱۳۳. **گزینه ۲** عبارت‌ها را به ترتیب بررسی می‌کنیم:

الف) نادرست؛ در تندی‌سنج خودروها، تندی خودرو در هر لحظه را مشاهده می‌کنیم و نه سرعت آن را (چرا که سرعت کمیته برداری است و به جز تندی باید جهت حرکت را هم با آن مشخص کرد).

ب) درست؛ بردار سرعت لحظه‌ای همواره بر مسیر حرکت مماس است.

پ) درست؛ متحرک بر مسیر مستقیم حرکت بکند یا نکند، اندازه سرعت لحظه‌ای همیشه همان تندی لحظه‌ای است.

ت) نادرست؛ اگر متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، در طی مسیورش تغییر جهت بدهد، مسافتی که می‌پیماید از جابه‌جایی‌اش بیشتر شده؛ در نتیجه تندی متوسطش از اندازه سرعت متوسطش بیشتر خواهد شد. (البته اگر تغییر جهت ندهد تندی متوسط و اندازه سرعت متوسط برابر می‌شوند). پس (۲) را انتخاب می‌کنیم.

۱۳۴. **گزینه ۳** مطابق شکل مسیر حرکت متحرک A، یک مسیر منحنی (غیر خط راست) است؛ به خاطر همین جهت بردار مماس بر حرکت، یعنی بردار سرعت آن دائماً در حال تغییر است.

۱۳۵. **گزینه ۴** در شکل روبه‌رو بردارهای سرعت را در نقطه‌های مورد نظر کشیده‌ایم. با توجه به شکل، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) در نقطه‌های C و G بردارهای سرعت در جهت \rightarrow است و با هم برابر است. ✓

۲) در نقطه‌های B و H بردارهای سرعت در جهت \swarrow بوده و با هم برابر است. ✓

۳) در نقطه‌های D و F بردارهای سرعت در جهت \nearrow قرار دارند و با هم برابرند. ✓

۴) در نقطه E بردار سرعت در جهت \uparrow و در نقطه I در جهت \downarrow است. پس در این دو نقطه بردارهای سرعت برابر نیستند. ✗

۱۳۶. **گزینه ۴** یک تست کنکور قدیمی اما خوب و مفهومی! بیا بید گزینه‌ها را یکی‌یکی بررسی کنیم:

۱) و ۲): تندی متوسط یعنی مسافت کل تقسیم بر زمان کل که ربطی به جزئیات حرکت ندارد. در واقع تندی متوسط هیچ اطلاعاتی در مورد نحوه حرکت و توقف کردن یا

توقف نکردن نمی‌دهد. شاید اتومبیل برای مدتی در بین مسیر توقف کرده باشد یا حتی به عقب برگشته باشد، یا با تندی بیش از 60 km/h و کم‌تر از آن حرکت کرده باشد. ✗

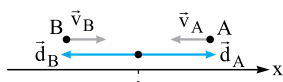
۳) برای آن که فاصله دو شهر را بدانیم باید زمان حرکت را هم داشته باشیم. به عنوان مثال نقض اگر مسافت بین دو شهر 120 km باشد و مدت زمان حرکت 2 h باشد،

$$\text{باز هم تندی متوسط برابر } S_{av} = \frac{120 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 60 \text{ km/h} \text{ می‌شود. ✗}$$

۱- تشخیص این‌که از چه مدت قبل از لحظه تغییر جهت حرکت کندشونده و تا چه مدت بعد از آن حرکت تندشونده است، از محدوده کتاب درسی و کنکور سراسری خارج است، اما در حد کتاب درسی و معادله مکان - زمان درجه دو، در تمام لحظه‌های قبل از تغییر جهت، حرکت کندشونده و در تمام لحظه‌های پس از آن حرکت تندشونده است.



۴) تندی متحرک حداقل یک بار باید 60 km/h باشد. فرض کنید این گونه نباشد؛ پس یا همواره تندی آن بیشتر از 60 km/h بوده است یا کمتر از 60 km/h . اگر همواره تندی لحظه‌ای بیشتر از 60 km/h باشد، حتماً متحرک مسیر حرکت را با تندی متوسط بیشتر از 60 km/h طی می‌کند و اگر تندی لحظه‌ای همواره کمتر از 60 km/h باشد، حتماً متحرک مسیر حرکت را با تندی متوسط کمتر از 60 km/h طی می‌کند. ✓



۱۳۷. گزینه ۴ مطابق شکل، چه متحرک از بخش مثبت محور (نقطه A)، چه بخش منفی محور (نقطه B) به مبدأ مکان نزدیک شود! بردارهای مکان و جهت حرکت در خلاف جهت هم هستند. این را هم می‌دانیم که بردار سرعت همواره در جهت حرکت است. بنابراین در این جا بردارهای مکان و سرعت الزاماً در خلاف جهت هم‌اند.

نکته هرگاه متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ باشد، بردارهای مکان در خلاف جهت حرکت (و سرعت) و هرگاه متحرک در حال دور شدن از مبدأ باشد، بردارهای مکان در جهت حرکت (و سرعت) خواهد بود.

۱۳۸. گزینه ۴ گام اول: تندی خودرو در بازه t_1 و t_2 ، 9 km/h کم شده است، پس داریم:

$$\Delta s = -9 \frac{\Delta s = |v_2| - |v_1|}{|v_2| = 36 \text{ km/h}} \rightarrow -9 = 36 - |v_1| \Rightarrow |v_1| = 36 + 9 = 45 \text{ km/h} \Rightarrow v_1 = \pm 45 \text{ km/h}$$

گام دوم: بردار تغییرات سرعت را یک بار با $v_1 = +45 \text{ km/h}$ و یک بار با $v_1 = -45 \text{ km/h}$ حساب می‌کنیم:

$$\text{حالت اول: } \Delta v = v_2 - v_1 = -36 - 45 = -81 \text{ km/h} \Rightarrow \Delta \vec{v} = (-81 \text{ km/h}) \vec{i}$$

$$\text{حالت دوم: } \Delta v = v_2 - v_1 = -36 - (-45) = 9 \text{ km/h} \Rightarrow \Delta \vec{v} = (9 \text{ km/h}) \vec{i}$$

$$v_2 = -(3)^2 + 4(3)^2 + 5 = -27 + 36 + 5 = 14 \text{ m/s}$$

۱۳۹. گزینه ۳ گام اول: سه ثانیه دوم یعنی از $t = 3 \text{ s}$ تا $t = 6 \text{ s}$ ؛ بنابراین:

$$v_6 = -(6)^2 + 4(6)^2 + 5 = -216 + 144 + 5 = -67 \text{ m/s}$$

$$|v_6| - |v_3| = |-67| - |14| = 67 - 14 = 53 \text{ m/s}$$

گام دوم: اختلاف تندی‌ها (اندازه سرعت‌ها) را می‌خواهیم:

۱۴۰. گزینه ۲ در لحظه‌ای که متحرک تغییر جهت می‌دهد، دو اتفاق برای سرعت می‌افتد:

(۱) سرعت صفر می‌شود. (۲) سرعت تغییر علامت می‌دهد.

اول ببینیم سرعت متحرک در چه لحظه‌ای صفر می‌شود:

$$v = 0 \Rightarrow \Delta t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{5} \text{ s} = 0.4 \text{ s}$$

چون معادله سرعت - زمان از نوع درجه اول است! واضح است که قبل و بعد از لحظه صفر شدن، علامتش تغییر می‌کند؛ با این حال، برای آن که خیالتان راحت باشد، یک لحظه قبل از $t = 0.4 \text{ s}$ (مثل همان $t = 0$) و یک لحظه بعد (مثل $t = 1 \text{ s}$) را در معادله قرار می‌دهیم.

$$t = 1 \text{ s} \Rightarrow v_1 = 5(1) - 2 = 3 \text{ m/s}$$

خب همان‌طور که در جدول تعیین علامت می‌بینید، متحرک در لحظه $t = 0.4 \text{ s}$ از حرکت در جهت منفی محور X به جهت مثبت محور X تغییر جهت می‌دهد.

۱۴۱. گزینه ۳ در هر یک از گزینه‌ها سرعت اولیه (v_0) و لحظه تغییر جهت (با همان لحظه صفر شدن سرعت) را بررسی می‌کنیم.

۱) $v_0 = -5 \text{ m/s}$ است؛ پس ابتدا متحرک در جهت منفی محور X در حال حرکت است و در لحظه $t = \frac{5}{4} \text{ s}$ تغییر جهت می‌دهد: *

$$v = 0 \Rightarrow 2t - 5 = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{2} \text{ s}$$

۲) $v_0 = 4/5 \text{ m/s}$ است. یعنی ابتدا متحرک در جهت مثبت محور X در حال حرکت است، اما لحظه تغییر جهت منفی می‌شود یعنی این متحرک تغییر جهت نمی‌دهد: *

$$v = 0 \Rightarrow 3t + 4/5 = 0 \Rightarrow t = \frac{-4/5}{3} = -1/5 \text{ s} \text{ (غقق)}$$

۳) $v_0 = 3/5 \text{ m/s}$ است. یعنی متحرک در ابتدا در جهت مثبت محور X حرکت می‌کند. اگر معادله سرعت - زمان را برابر صفر قرار دهیم می‌بینیم که در لحظه

$$v = 0 \Rightarrow -7t + 3/5 = 0 \Rightarrow t = \frac{-3/5}{-7} = \frac{1}{7} \text{ s} \quad \checkmark \text{ تغییر جهت می‌دهد:}$$

۴) $v_0 = -12/5 \text{ m/s}$ است. یعنی متحرک در ابتدا در جهت منفی محور X است. با صفر قراردادن معادله سرعت - زمان می‌فهمیم که این متحرک

$$v = 0 \Rightarrow -5t - 12/5 = 0 \Rightarrow t = \frac{-12/5}{-5} = -2/5 \text{ s} \text{ (غقق)} \quad \checkmark \text{ تغییر جهت نمی‌دهد چون } t \text{ منفی می‌شود:}$$

۱۴۲. گزینه ۲ گفتیم که هر وقت متحرک تغییر جهت بدهد برای یک لحظه سرعتش صفر می‌شود و علامت سرعتش تغییر می‌کند. پس لحظه‌های تغییر علامت

$$\text{سرعت، یعنی ریشه‌های معادله سرعت به ازای } v = 0 \text{ را حساب می‌کنیم:}$$

$$t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \text{ s} \\ t_2 = 3 \text{ s} \end{cases}$$

جدول تغییرات سرعت را می‌کشیم تا مطمئن شویم علامت سرعت متحرک در لحظه‌های $t_1 = 1 \text{ s}$ و $t_2 = 3 \text{ s}$ تغییر کرده است:

$t \text{ (s)}$	۰	۱	۳	$+\infty$
$v \text{ (m/s)}$	۳	+	-	+

لحظه‌های تغییر جهت سرعت

حواستان باشد اگر ریشه‌های معادله سرعت - زمان مضاعف بود، دیگر تغییر جهت نداشتیم!

۱۴۳. گزینه ۴ متحرک در ریشه‌هایی از معادله سرعت - زمان تغییر جهت می‌دهد که قبل و بعد از آن‌ها علامت سرعت عوض شود؛ پس برای حل این سؤال باید

$$v = t^3 - 4t^2 + 4t = t(t^2 - 4t + 4) = t(t-2)^2$$

معادله سرعت - زمان را تعیین علامت کنیم:

$t \text{ (s)}$	۰	۲	$+\infty$
v	۰	+	+

همان‌طور که می‌بینید در $t = 2 \text{ s}$ با این‌که سرعت صفر می‌شود اما بعد و قبل از آن سرعت تغییر علامت نمی‌دهد و متحرک تغییر جهت نمی‌دهد؛ چرا که ریشه آن مضاعف است. حواستان باشد که قبل از $t = 0$ مورد بررسی قرار نمی‌گیرد چون نباید زمان را منفی در نظر بگیریم.

۱۴۴. گزینه ۱ همیشه قبل از این که سرعت متحرک صفر شود، حرکت متحرک کندشونده و بعد از آن حرکتش تندشونده است. پس باید لحظه صفر شدن سرعت را حساب کنیم:

$$v = 0 \Rightarrow -2t + 7 = 0 \Rightarrow t = \frac{7}{2} = 3.5 \text{ s}$$

بازه زمانی $1/5 \text{ s}$ تا $2/5 \text{ s}$ قبل از $t = 3/5 \text{ s}$ است، بنابراین در این بازه حرکت کندشونده است. (۳ ثانیه دوم یعنی بازه $t_1 = 3 \text{ s}$ تا $t_2 = 6 \text{ s}$ و ثانیه چهارم یعنی بازه $t_1 = 3 \text{ s}$ تا $t_2 = 4 \text{ s}$).

۱۴۵. گزینه ۱ وقتی تندی برابر 2 m/s است، سرعت می تواند 2 m/s و یا -2 m/s باشد. هر دو حالت را بررسی می کنیم:

$$\begin{cases} v = 2 \text{ m/s} \Rightarrow 2 = 4t - 5 \Rightarrow 7 = 4t \Rightarrow t = \frac{7}{4} \text{ s} = 1.75 \text{ s} \\ v = -2 \text{ m/s} \Rightarrow -2 = 4t - 5 \Rightarrow 3 = 4t \Rightarrow t = \frac{3}{4} \text{ s} = 0.75 \text{ s} \end{cases}$$

در گزینه‌ها $t = 0.75 \text{ s}$ به چشم می خورد.

۱۴۶. گزینه ۱ گام اول: در این جا معادله سرعت خطی است، پس فقط در صورتی تندی در دو لحظه مانند 2 s و 5 s برابر می شود که متحرک تغییر جهت داده باشد. در این صورت جهت سرعت در لحظه 2 s در خلاف جهت سرعت در لحظه 5 s است. بنابراین فرض می کنیم در $t = 2 \text{ s}$ ، سرعت 3 m/s و در $t = 5 \text{ s}$ ، سرعت -3 m/s باشد. در این صورت با قراردادن مقادیر در معادله $v = At + B$ داریم:

$$\begin{cases} t = 2 \text{ s} \Rightarrow 3 = A(2) + B \Rightarrow 3 = 2A + B & \text{(I)} \\ t = 5 \text{ s} \Rightarrow -3 = A(5) + B \Rightarrow -3 = 5A + B & \text{(II)} \end{cases} \xrightarrow{\text{(I)-(II)}} 6 = -3A \Rightarrow A = -2 \Rightarrow B = 7 \Rightarrow v = -2t + 7$$

گام دوم: اندازه سرعت در $t = 7 \text{ s}$ را می خواهیم: (اگر $v_2 = -3 \text{ m/s}$ و $v_5 = 3 \text{ m/s}$ در نظر می گرفتید باز به همین جواب می رسیدید.)

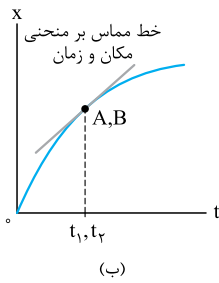
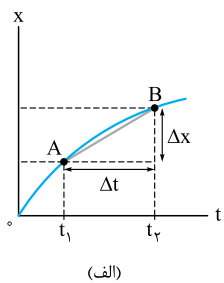
حواستون باشه! چون اندازه سرعت در لحظه $t = 7 \text{ s}$ را خواسته و اندازه سرعت هم همواره مقداری مثبت است، از همان ابتدا (۲) و (۴) رد بودند.

۱۴۷. گزینه ۴ در دو حالت تندی‌ها با هم برابر می شوند. حالت اول این است که سرعت‌ها با هم مساوی باشد. حالت دوم هم این است که سرعت‌ها قرینه یکدیگر باشند: (غقق) $3t = -3 \Rightarrow t = -1 \text{ s}$

$$2t - 3 = -(-1 - 6) \Rightarrow 2t - 3 = 7 \Rightarrow 2t = 10 \Rightarrow t = 5 \text{ s}$$

پس در لحظه $t = 9 \text{ s}$ تندی دو متحرک برابر می شود.

درس ششم نمایش سرعت لحظه‌ای در نمودار مکان-زمان

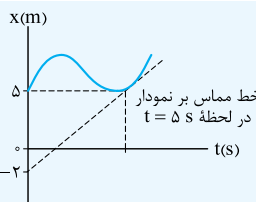


در بحث نمودار مکان - زمان دیدید که شیب خطی که دو نقطه از منحنی $x - t$ را قطع می کند، برابر با سرعت متوسط در بازه زمانی متناظر با آن دو نقطه است. مثلاً در شکل (الف)، شیب خط AB برابر با سرعت متوسط در بازه زمانی t_1 تا t_2 است؛ یعنی:

$$\text{شیب خط } AB = v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

حالا اگر Δt را کوچک کنیم (یعنی t_1 و t_2 را به هم نزدیک کنیم)، نقطه‌های A و B به یکدیگر نزدیک می شوند. وقتی که t_1 و t_2 کاملاً به هم مماس شوند، Δt به لحظه تبدیل می شود و نقطه‌های A و B به هم می رسند. در این حالت امتداد AB خطی مماس بر منحنی مکان - زمان بوده و شیب این خط برابر با سرعت لحظه‌ای است.

سرعت لحظه‌ای = شیب خط مماس بر منحنی $x - t$



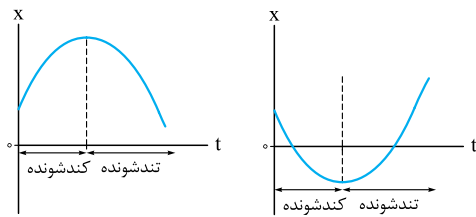
آست ۵ | نمودار مکان - زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می کند، مطابق شکل روبه‌رو است. سرعت این

متحرک در لحظه $t = 5 \text{ s}$ چند متر بر ثانیه است؟

- (۱) ۱
(۲) $1/4$
(۳) $5/7$
(۴) $3/5$

پاسخ ۲ | در نمودار مکان - زمان، شیب خط مماس بر نمودار در یک لحظه معین برابر سرعت متحرک در آن لحظه است. پس این جا داریم:

$$v_5 = (\text{شیب خط مماس در لحظه } t = 5 \text{ s}) = \frac{5 - (-2)}{5 - 0} = \frac{7}{5} = 1.4 \text{ m/s}$$

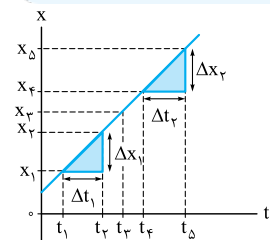


می‌دانید که در یک نمودار (مانند سهمی) شیب نقطهٔ بیشینه یا کمینه صفر است و اگر از دو طرف، به این نقطه نزدیک شویم، اندازهٔ شیب کم می‌شود. پس در نمودار مکان - زمان اگر در حال نزدیک شدن به نقطهٔ اکسترمم (بیشینه یا کمینه) باشیم، اندازهٔ شیب و در نتیجه تندی کاهش می‌یابد و حرکت کندشونده است و اگر در حال دور شدن از نقطهٔ اکسترمم باشیم، اندازهٔ شیب و در نتیجه تندی افزایش می‌یابد و حرکت تندشونده است؛ به زبان ساده‌تر سمت چپ نقطهٔ اکسترمم، حرکت کندشونده و سمت راست آن حرکت تندشونده است.^۱

تست ۱۳ در نمودار مکان - زمان شکل روبه‌رو، در کدام لحظه اندازهٔ سرعت متحرک بیشتر است؟ (نمودار شکل روبه‌رو یک سهمی است.)

(۱) t_1
 (۲) t_2
 (۳) t_3
 (۴) t_4

پاسخ ۱۳ گفتیم شیب نمودار مکان - زمان و در نتیجه در یک نمودار (مانند سهمی) شیب نقطهٔ بیشینه یا کمینه صفر است و هر چه از دو طرف، از این نقطه دور می‌شویم، شیب زیاد می‌شود؛ پس در لحظهٔ t_4 اندازهٔ سرعت متحرک بیشتر از لحظه‌های دیگر است: در واقع در این نمودار، حرکت متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا t_3 کندشونده و در بازهٔ زمانی t_3 تا t_4 تندشونده است.



اگر نمودار مکان - زمان متحرکی یک خط راست باشد (مثل شکل روبه‌رو)، شیب نمودار در هر لحظهٔ دلخواه (مثلاً لحظهٔ t_1 یا t_2) و در هر بازهٔ زمانی دلخواه (مثلاً بازهٔ Δt_1 یا Δt_2) یکسان است؛ بنابراین می‌توانیم بگوییم در این حالت سرعت در هر لحظه برابر با سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانی دلخواه است:

$$v_{\text{لحظه‌ای}} = v_{\text{av}} = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2}$$

تست ۱۴ نمودار مکان - زمان متحرکی مطابق شکل روبه‌رو است. سرعت این متحرک در لحظه‌ای که از مبدأ مکان عبور می‌کند، در SI کدام است؟

(۱) $-12\vec{i}$
 (۲) $-24\vec{i}$
 (۳) $12\vec{i}$
 (۴) $24\vec{i}$

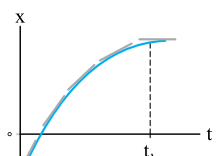
پاسخ ۱۴ لحظهٔ عبور از مبدأ در بازهٔ زمانی ۳ s تا ۶ s قرار دارد و چون نمودار از ۳ s تا ۶ s یک خط راست است، پس سرعت متوسط در این بازه برابر با سرعت در هر لحظه از این بازه است. بنابراین داریم (سرعت متحرک در مبدأ مکان را با v' نشان داده‌ایم):

$$v' = v_{\text{av}(3,6)} = \frac{x_6 - x_3}{t_6 - t_3} = \frac{-24 - 48}{6 - 3} = -24 \text{ m/s}$$

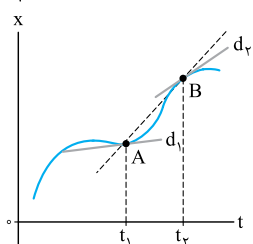
$$\vec{v}' = -24\vec{i}$$

این متحرک بر روی محور X حرکت می‌کند، پس داریم:

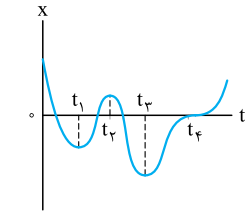
۱۴۸. گزینه ۱ مطابق شکل شیب خط مماس بر نمودار با گذشت زمان در حال کاهش است؛ بنابراین تندی یا اندازهٔ سرعت هم در بازهٔ زمانی $(t_1, 0)$ کاهش می‌یابد.



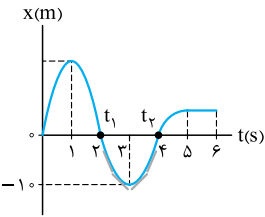
۱۴۹. گزینه ۴ گام اول: مطابق شکل شیب خط d_1 بیشتر از خط d_2 است؛ بنابراین $v_1 < v_2$ باید باشد. گام دوم: شیب خط‌چین گذرنده از مکان متحرک در لحظه‌های t_1 و t_2 (AB)، سرعت متوسط متحرک را نشان می‌دهد. همان‌طور که در نمودار می‌بینید، شیب این خط از d_1 و d_2 بیشتر است؛ بنابراین:

$$v_1 < v_2 < v_{\text{av}}$$


۱- در نمودارهای غیر از سهمی این که از چه مدت قبل از نقطهٔ اکسترمم حرکت کندشونده و چه مدت پس از آن حرکت تندشونده است، از محدودهٔ کتاب درسی و کنکور سراسری خارج است. اما اگر نمودار سهمی باشد، در تمام لحظه‌های قبل از اکسترمم حرکت کندشونده و در تمام لحظه‌های پس از آن حرکت تندشونده است.



۱۵۰. گزینه ۲ | گام اول: در لحظاتی که شیب خط مماس بر نمودار $x - t$ صفر می‌شود (یعنی خط مماس بر منحنی موازی محور t می‌شود)، تندی صفر می‌شود. مطابق شکل در لحظه‌های t_1 ، t_2 ، t_3 و t_4 این اتفاق رخ داده است.
گام دوم: حالا اگر این نقاط اکسترمم (کمینه یا بیشینه) هم باشند، در آن تغییر جهت داریم؛ پس غیر لحظه t_4 ، در سه لحظه دیگر t_1 ، t_2 و t_3 تغییر جهت هم داریم. با این حساب، تندی متحرک ۴ بار صفر شده و متحرک ۳ بار هم تغییر جهت داده است.



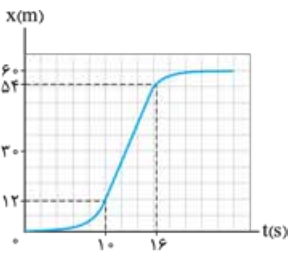
۱۵۱. گزینه ۲ | مطابق شکل: نمودار در بازه زمانی $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 4s$ ، زیر محور t است، پس در این بازه جهت بردار مکان در خلاف جهت محور x است؛ با توجه به اندازه شیب خط مماس بر نمودار، تندی ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.
حواستون باشه! شیب منفی صرفاً علامت سرعت را نشان می‌دهد؛ نه اندازه آن را!

تکنیک | در لحظه $t = 3s$ نمودار کمینه است و شیب صفر است. پس در لحظه $t = 3s$ سرعت صفر است. یعنی قبل از آن حرکت کندشونده و بعد از آن حرکت تندشونده است.

۱۵۲. گزینه ۳ | برای محاسبه سرعت متحرک در لحظه $t = 4s$ ، باید شیب خط مماس در این لحظه را حساب کنیم:

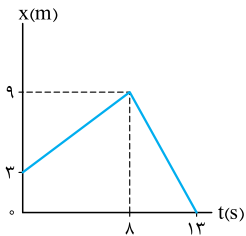
$$v_4 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{6 - 0}{4 - 1} = 2 \text{ m/s} \Rightarrow \vec{v}_4 = 2\hat{i}$$

تکنیک | شیب خط‌چین مماس بر منحنی در لحظه $t = 4s$ مثبت است، پس بی‌محاسبه ۲ و ۴ مرخص‌اند.



۱۵۳. گزینه ۳ | در نمودار مکان - زمان شیب خط مماس بر نمودار برابر سرعت است و هر چه شیب بیشتر باشد، سرعت بیشتر است. در نمودار این سؤال بیشترین شیب مربوط به ناحیه‌ای است که متحرک تقریباً حرکت با سرعت ثابت انجام داده است؛ یعنی از $t_1 = 10s$ تا $t_2 = 16s$.
 مطابق شکل متحرک در لحظه $10s$ در مکان $x_1 = 12m$ و در لحظه $16s$ در مکان $x_2 = 54m$ قرار دارد. (توجه کنید که هر یک از اضلاع خانه‌ها در راستای قائم معادل $6m$ و در راستای افقی معادل $2s$ است.)

$$v = v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{54 - 12}{16 - 10} = \frac{42}{6} = 7 \text{ m/s}$$



۱۵۴. گزینه ۴ | گام اول: لحظه $t = 5s$ در بازه زمانی 0 تا $5s$ قرار دارد. در این بازه چون نمودار یک خط راست است، تندی هر لحظه از این بازه برابر با اندازه سرعت متوسط در این بازه است؛ بنابراین:

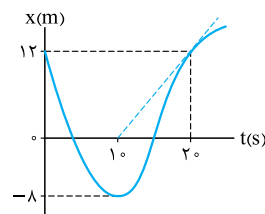
$$s_5 = |v_{av(0,5)}| = \frac{x_5 - x_0}{5 - 0} = \frac{9 - 3}{5} = \frac{3}{5} \text{ m/s}$$

گام دوم: به طریق مشابه، لحظه $t = 10s$ در بازه زمانی $8s$ تا $13s$ قرار دارد. در این بازه هم، نمودار یک خط راست است؛ بنابراین تندی هر لحظه از این بازه با اندازه سرعت متوسط در این بازه برابر است:

$$s_{10} = |v_{av(8,13)}| = \frac{|x_{13} - x_8|}{13 - 8} = \frac{|0 - 9|}{5} = \frac{9}{5} \text{ m/s}$$

گام سوم: حالا می‌ماند نسبت $\frac{s_5}{s_{10}}$:

$$\frac{s_5}{s_{10}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{9}{5}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{5} = \frac{5}{15}$$



۱۵۵. گزینه ۱ | گام اول: تندی متحرک در $t = 20s$ برابر با قدرمطلق شیب مماس بر نمودار در این نقطه است؛ پس با توجه به شکل روبه‌رو، داریم:

$$\text{شیب مماس} = \frac{12 - 0}{20 - 10} = 1/2 \Rightarrow |v_{20}| = 1/2 \text{ m/s}$$

گام دوم: برای محاسبه تندی متوسط در 20 ثانیه اول باید جابه‌جایی قبل و بعد از تغییر جهت را جمع کنیم و بر زمان تقسیم کنیم:

$$s_{av} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{|\Delta x_1| + |\Delta x_2|}{\Delta t} = \frac{|-8 - 12| + |12 - (-8)|}{20 - 0} = \frac{|-20| + |20|}{20} = \frac{40}{20} = 2 \text{ m/s}$$

گام سوم: حالا اختلاف تندی لحظه‌ای و تندی متوسط را به دست می‌آوریم:

$$|v_{20}| - s_{av} = 1/2 - 2 = -3/2 \text{ m/s}$$

بنابراین تندی متحرک در لحظه $t = 20s$ به اندازه $3/2 \text{ m/s}$ از تندی متوسط در 20 ثانیه اول کم‌تر است.

۱۵۶. گزینه ۳ | گام اول: تندی در لحظه $t = 1s$ برابر با اندازه شیب خط مماس بر نمودار در این لحظه است:

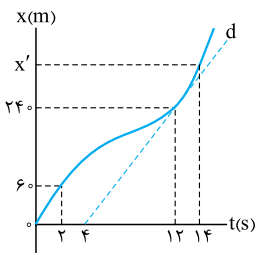
$$s_1 = |v_1| = \left| \frac{15 - 20}{1 - 0} \right| = \left| \frac{-5}{1} \right| = 5 \text{ m/s}$$

$$l = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = |17 - 15| + |-11 - 17| = 2 + 28 = 30 \text{ m}$$

گام دوم: با توجه به نمودار، مسافت طی شده را تعیین می‌کنیم:

گام سوم: طبق فرض سؤال، تندی متوسط در بازه صفر تا t' برابر با تندی در لحظه $t = 1s$ است:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \Rightarrow 5 = \frac{30}{t' - 0} \Rightarrow t' = \frac{30}{5} = 6s$$



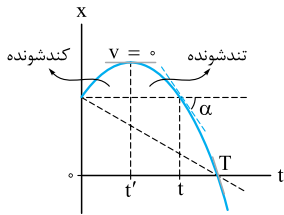
۱۵۷. گزینه ۱ گام اول: با توجه به برابری تندی لحظه $t = ۱۲$ s با تندی متوسط در بازه $t_1 = ۲$ s تا $t_2 = ۱۴$ s، مکان متحرک در $t = ۱۴$ s (x') را حساب می‌کنیم؛ برای این کار از شیب خط مماس بر نمودار در لحظه $t = ۱۲$ s استفاده می‌کنیم:

$$S_{۱۲} = S_{av(۲,۱۴)} \Rightarrow \frac{240}{12-2} = \frac{x' - 60}{14-2}$$

$$\Rightarrow 360 = x' - 60 \Rightarrow x' = 420 \text{ m}$$

گام دوم: حالا نسبت سرعت متوسط ۲ ثانیه اول ($v_{av(0,2)}$) به سرعت متوسط ۲ ثانیه هفتم ($v_{av(12,14)}$) را به دست می‌آوریم:

$$\frac{v_{av(0,2)}}{v_{av(12,14)}} = \frac{\frac{60-0}{2}}{\frac{420-240}{2}} = \frac{60}{180} = \frac{1}{3}$$



۱۵۸. گزینه ۳ با توجه به شکل، به بررسی عبارت‌ها می‌پردازیم:

- (الف) در نمودار مکان - زمان قبل از رسیدن متحرک به نقطه اکسترمم (t') حرکت کندشونده و بعد از آن تندشونده است. ✗
- (ب) در لحظه t ، شیب خط مماس منفی است؛ پس بردار سرعت در خلاف جهت محور x است، از طرفی چون نمودار بالای محور t است، بردار مکان در جهت محور x است؛ بنابراین در این لحظه بردار سرعت و بردار مکان در خلاف جهت یکدیگر هستند. ✓
- (پ) هم شیب خط در بازه صفر تا T ($0, T$) و هم شیب خط مماس بر نمودار در لحظه عبور از مبدأ مکان (T) منفی است؛ پس سرعت متحرک در لحظه عبور از مبدأ مکان با سرعت متوسط آن در بازه صفر تا T هم‌جهت است. ✓

حواستون باشه! حرکت متحرک روی یک خط راست (محور x) است؛ پس جهت سرعت یا در جهت محور x است! یا خلاف جهت آن! امیدواریم نمودار $x - t$ را با مسیر حرکت اشتباه نگرفته باشید!

(ت) شیب خط مماس بر نمودار از لحظه t' تا t ، مثبت و بعد از آن منفی است؛ بنابراین سرعت متحرک از لحظه t' تا t (نه t) در جهت محور x و بعد از آن در خلاف جهت محور x است. ✗

پس در مجموع ۲ عبارت درست بود.

۱۵۹. گزینه ۲ با توجه به شکل روبه‌رو، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

- ۱) نمودار متحرک A یک خط راست است؛ پس شیب و سرعت آن ثابت است. ✓
- ۲) نمودار متحرک B همواره بالای محور t است؛ پس بردار مکان آن همواره در جهت محور x است. ✗
- ۳) در بازه زمانی $(0, t_1)$ متحرک B در خلاف جهت محور x حرکت کرده است؛ در این بازه نمودار متحرک A زیر محور t است؛ پس در این مدت بردار مکان آن در خلاف جهت محور x است. ✓

۴) دو متحرک یک بار در لحظه t_1 و بار دوم در لحظه t_2 به هم می‌رسند. اگر به خط مماس بر نمودار B در لحظه t_2 (لحظه‌ای که دو متحرک برای بار دوم به هم می‌رسند) نگاه کنید، می‌بینید که از نمودار A که یک خط راست است، شیب بیشتری دارد؛ پس از آن‌جا که سرعت متحرک A ثابت است، سرعت متحرک B در این لحظه از سرعت متحرک A در مبدأ زمان بیشتر است. ✓

۱۶۰. گزینه ۳ با توجه به شکل، به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

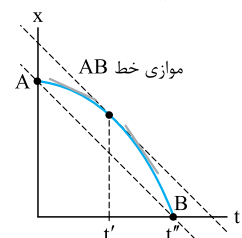
۱) دو متحرک در لحظه t_1 به هم می‌رسند که در این نقطه شیب نمودار مکان - زمان متحرک B بیشتر است؛ بنابراین سرعت B بیشتر است. ✗

۲) چون در بازه $(0, t_1)$ جابه‌جایی دو متحرک با هم برابر است، سرعت متوسط آن‌ها با هم برابر است. به بیان ریاضی: $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - 0}{t_1 - 0} = \frac{x}{t_1}$ ✗

۳) در لحظه t' مماس بر نمودار متحرک B با نمودار A موازی می‌شود و شیب این دو نمودار برابر می‌شود. از آن‌جا که شیب نمودار $x - t$ همان سرعت لحظه‌ای است، در این لحظه سرعت دو متحرک برابر می‌شود. ✓

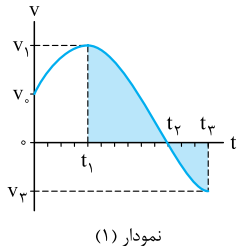
۴) چون متحرک B در بازه t_1 تا t_2 تغییر جهت ندارد، تندی متوسط متحرک B از t_1 تا t_2 برابر اندازه سرعت متوسط B در این بازه است. با توجه به نمودار در این بازه جابه‌جایی متحرک B از جابه‌جایی متحرک A بیشتر است و در نتیجه سرعت متوسطش در این بازه، از سرعت متوسط A بیشتر است. از طرفی نمودار مکان - زمان متحرک A یک خط راست است و سرعت متوسط آن در هر بازه زمانی با سرعت لحظه‌ای در هر لحظه برابر است؛ بنابراین:

$$\left. \begin{aligned} S_{av,B} &= |v_{av,B}| \\ v_{av,B} &> v_{av,A} \\ v_{av,A} &= v_{t_1,A} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{av,B} > v_{t_1,A} \quad \text{✗}$$



۱۶۱. گزینه ۳ سرعت در هر لحظه برابر با شیب خط مماس بر نمودار $x - t$ در همان لحظه است. همان‌طور که در شکل روبه‌رو می‌بینید، اندازه شیب خط مماس بر نمودار از صفر تا t'' در حال افزایش است. از طرفی اندازه شیب خط وصل بین دو نقطه A و B بیانگر اندازه سرعت متوسط در بازه $(0, t'')$ است. بنابراین با توجه به شکل روبه‌رو اندازه شیب خط مماس بر نمودار قبل از لحظه t' کم‌تر از اندازه شیب خط AB و بعد از آن بیشتر از اندازه شیب خط AB است. پس می‌فهمیم که سرعت لحظه‌ای ابتدا کم‌تر از سرعت متوسط بوده است، در لحظه t' با آن مساوی شده و پس از t' سرعت لحظه‌ای بیشتر از سرعت متوسط می‌شود.

درس هفتم نمودار سرعت-زمان



نمودار (۱)

می‌توانیم سرعت یک متحرک را که بر مسیر خط راست حرکت می‌کند، در هر لحظه با نمودار سرعت-زمان نشان دهیم. مثلاً شکل روبه‌رو نمودار سرعت-زمان متحرکی است که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند و سرعت متحرک در لحظه‌های $t_0 = 0, t_1, t_2, t_3$ به ترتیب برابر $v_0, v_1, v_2 = 0, v_3$ است.

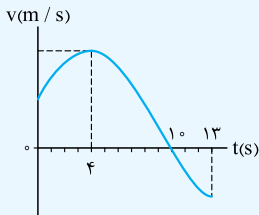
آنچه از نمودار سرعت-زمان می‌توانیم بفهمیم

۱. جهت حرکت متحرک در هر لحظه از زمان • علامت سرعت بالای محور t ، مثبت و پایین محور t ، منفی است، یعنی در لحظه‌هایی که نمودار بالای محور t است، متحرک در جهت مثبت محور و در لحظه‌هایی که نمودار پایین محور t است، متحرک در جهت منفی محور حرکت کرده است. مثلاً در نمودار (۱) در بازه زمانی صفر تا t_2 متحرک در جهت مثبت محور و در بازه زمانی t_2 به بعد متحرک در جهت منفی محور حرکت کرده است.

۲. لحظه‌های تغییر جهت متحرک • در لحظه‌هایی که نمودار سرعت-زمان محور t را قطع می‌کند، متحرک تغییر جهت داده است. مثلاً در نمودار (۱) متحرک در لحظه t_2 تغییر جهت داده است.

۳. تندشونده، کندشونده و یکنواخت بودن حرکت • هر وقت نمودار سرعت-زمان به محور t نزدیک شود، حرکت کندشونده است (زیرا تندی در حال کم شدن است) و هر وقت نمودار در حال دور شدن از محور t باشد، حرکت تندشونده است. (چون تندی در حال افزایش است). مثلاً در نمودار (۱) در بازه‌های صفر تا t_1 تا t_2 نمودار در حال دور شدن از محور t است، پس حرکت در این بازه‌های زمانی تندشونده است ولی در بازه زمانی t_1 تا t_2 نمودار در حال نزدیک شدن به محور t است و حرکت در این بازه زمانی کندشونده است.

حواستون باشه! در بازه زمانی که نمودار سرعت-زمان موازی محور t باشد، تندی متحرک ثابت می‌مونه و حرکت یکنواخته.



آزمون | شکل روبه‌رو نمودار سرعت-زمان متحرکی است که بر روی محور x حرکت می‌کند. این متحرک در چه لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد و در مدتی که در جهت محور x حرکت می‌کند، نوع حرکتش کدام است؟

(۱) $t = 4$ s، همواره کندشونده

(۲) $t = 4$ s، ابتدا تندشونده و سپس کندشونده

(۳) $t = 10$ s، همواره کندشونده

(۴) $t = 10$ s، ابتدا تندشونده و سپس کندشونده

پاسخ | (۱) نمودار سرعت-زمان در لحظه $t = 10$ s محور t را قطع کرده است. ← متحرک در لحظه $t = 10$ s تغییر جهت می‌دهد.

(۲) نمودار در بازه زمانی 0 تا 10 s بالای محور t است. ← سرعت متحرک در بازه $(0, 10)$ مثبت است و در جهت مثبت محور x حرکت کرده است.

(۳) نمودار در بازه 0 تا 4 s از محور t دور شده و در بازه 4 تا 10 s به محور t نزدیک شده است، پس حرکتش در بازه 0 تا 10 s ابتدا تندشونده و سپس کندشونده است.

۴. جابه‌جایی و مسافت طی شده

الف محاسبه اندازه جابه‌جایی: شاید مهم‌ترین نکته نمودارهای سرعت-زمان این باشد که مساحت محصور بین نمودار و محور t برابر مقدار جابه‌جایی جسم است. مثلاً در نمودار (۲) مساحت S_1 برابر اندازه جابه‌جایی متحرک در بازه زمانی t_1 تا t_2 و مساحت S_2 برابر اندازه جابه‌جایی متحرک در بازه زمانی t_2 تا t_3 است.

ب تشخیص جهت جابه‌جایی و محاسبه مسافت پیموده‌شده: اگر مساحت محصور بین نمودار و محور t ، بالای محور t باشد (مانند S_1) جابه‌جایی متحرک در جهت مثبت محور و اگر این مساحت زیر محور t باشد (مانند S_2)، جابه‌جایی متحرک در جهت منفی محور است. بنابراین جابه‌جایی متحرک در بازه‌های t_1 تا t_2 و هم‌چنین t_2 تا t_3 برابر می‌شود با:

$$\Delta x_{1,2} = S_1 \quad \Delta x_{2,3} = -S_2$$

$$I_{1,2} = S_1$$

اما می‌دانید که مسافت ربطی به جهت حرکت ندارد پس مسافت طی‌شده در بازه‌های t_1 تا t_2 و t_2 تا t_3 برابر است با:

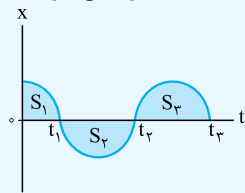
$$I_{2,3} = S_2$$

پ محاسبه جابه‌جایی کل و مسافت پیموده‌شده: جابه‌جایی کل برابر مجموع جابه‌جایی‌ها و مسافت کل برابر مجموع مسافت‌ها است. اما برای محاسبه جابه‌جایی کل و مسافت کل پیموده‌شده باید حواسمان به علامت‌ها باشد. مثلاً در نمودار (۲) جابه‌جایی و مسافت پیموده‌شده در بازه زمانی t_1 تا t_3 برابر است با:

$$\begin{cases} \Delta x_{1,3} = \Delta x_{1,2} + \Delta x_{2,3} = S_1 + (-S_2) = S_1 - S_2 \\ \text{جابه‌جایی در بازه } t_1 \text{ تا } t_3 \\ I_{1,3} = I_{1,2} + I_{2,3} = S_1 + S_2 \\ \text{مسافت در بازه } t_1 \text{ تا } t_3 \end{cases}$$

نکته پس از محاسبه جابه‌جایی (Δx) و مسافت پیموده شده (l) در یک بازه معین، می‌توانیم به کمک رابطه‌های $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ و $s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$ سرعت متوسط و تندی متوسط در آن بازه زمانی را هم حساب کنیم.

تست ۱۴ شکل زیر نمودار سرعت - زمان متحرکی است که بر روی یک خط راست حرکت می‌کند. اگر S_1 ، S_2 و S_3 مساحت محصور بین نمودار و محور t بوده و $S_2 = S_3 = 2S_1$ باشد، در بازه زمانی صفر تا t_3 تندی متوسط چند برابر اندازه سرعت متوسط است؟



- ۵ (۱)
- ۳ (۲)
- ۲ (۳)
- ۱ (۴)

پاسخ ۱۴ گام اول: برای محاسبه سرعت متوسط باید جابه‌جایی کلی را حساب کنیم. حواسمان باشد که S_1 و S_3 بالای محور t و S_2 زیر محور t است. پس داریم:

$$\Delta x_{(0, t_3)} = \Delta x_{(0, t_1)} + \Delta x_{(t_1, t_2)} + \Delta x_{(t_2, t_3)} \xrightarrow{\Delta x_{(0, t_1)} = S_1, \Delta x_{(t_1, t_2)} = -S_2, \Delta x_{(t_2, t_3)} = S_3} \Delta x_{(0, t_3)} = S_1 - S_2 + S_3 \xrightarrow{S_2 = S_3} \Delta x_{(0, t_3)} = S_1$$

(همین‌پوری هم با نگاه به نمودار می‌توانیم بگیریم چون S_2 و S_3 با هم برابرند و یکی بالا و یکی پایین محور t اند، جابه‌جایی دو تایی‌شون با هم صفر می‌شه و فقط S_1 می‌مونه.)

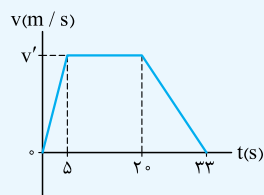
گام دوم: برای محاسبه مسافت کل باید مساحت‌ها رو با هم جمع کنیم:

$$l_{(0, t_3)} = l_{(0, t_1)} + l_{(t_1, t_2)} + l_{(t_2, t_3)} = S_1 + S_2 + S_3 \xrightarrow{S_2 = S_3 = 2S_1} l_{(0, t_3)} = S_1 + 2S_1 + 2S_1 = 5S_1$$

گام سوم: حالا نسبت تندی متوسط به اندازه سرعت متوسط در بازه صفر تا t_3 را حساب می‌کنیم:

$$\frac{s_{av(0, t_3)}}{v_{av(0, t_3)}} = \frac{\frac{l_{(0, t_3)}}{t_3}}{\frac{\Delta x_{(0, t_3)}}{t_3}} = \frac{5S_1}{S_1} = 5$$

تست ۱۵ نمودار سرعت - زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل روبه‌رو است. اگر اندازه سرعت متوسط آن در مدت 33 s برابر 8 m/s باشد، بیشترین مقدار سرعت آن در طول مسیر چند متر بر ثانیه است؟



- ۸ (۱)
- ۱۱ (۲)
- ۱۵ (۳)
- ۲۲ (۴)

پاسخ ۱۵ گام اول: از فرمول $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ ، جابه‌جایی جسم را در مدت 33 s حساب می‌کنیم:

$$8 = \frac{\Delta x}{33} \Rightarrow \Delta x = 33 \times 8 \text{ m}$$

یعنی مساحت زیر نمودار برابر این مقدار است.

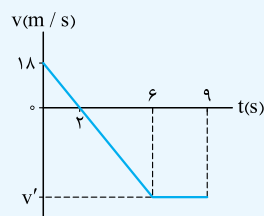
گام دوم: نمودار به شکل یک ذوزنقه است، پس داریم:

$$S = \frac{\text{قاعده بزرگ} + \text{قاعده کوچک}}{2} \times \text{ارتفاع} \Rightarrow 33 \times 8 = \frac{(20 - 5) + 33}{2} \times v' \Rightarrow v' = \frac{2 \times 8 \times 33}{48} = 11 \text{ m/s}$$

v' بیشترین سرعت در طول مسیر است.

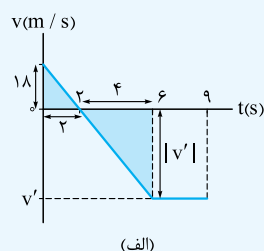
گاهی برای محاسبه مسافت، باید از تکنیک‌های ریاضی مثل تشابه دو مثلث کمک بگیریم. تست زیر رو ببینید:

تست ۱۶ نمودار سرعت - زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل روبه‌رو است. سرعت متوسط و تندی متوسط متحرک در بازه $(0, 9 \text{ s})$ به ترتیب از راست به چپ چند متر بر ثانیه است؟



- ۲۲، -۱۸ (۱)
- ۱۸، -۱۸ (۲)
- ۲۲، -۲۲ (۳)
- ۱۸، -۲۲ (۴)

پاسخ ۱۶ گام اول: در شکل (الف) به کمک تشابه دو مثلث (رنگ‌شده)، v' را حساب می‌کنیم:



$$\frac{|v'|}{18} = \frac{6}{9} \Rightarrow |v'| = 36 \Rightarrow v' = -36 \text{ m/s}$$

(الف)

گام دوم: مساحت‌های S_1 و S_2 را در شکل (ب) حساب می‌کنیم:

$$S_1 = \text{مساحت مثلث} = \frac{18 \times 2}{2} = 18$$

$$S_2 = \text{مساحت دوزنقه} = \frac{(9-6) + (9-2)}{2} \times 36 = 180$$

گام سوم: اول جابه‌جایی و سرعت متوسط را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta x_{\text{کل}} = S_1 - S_2 = 18 - 180 = -162 \text{ m}$$

$$v_{\text{av}} = \frac{\Delta x_{\text{کل}}}{\Delta t} = \frac{-162}{9-0} = -18 \text{ m/s}$$

گام چهارم: حالا مسافت و تندی متوسط را به دست می‌آوریم:

$$l_{\text{کل}} = S_1 + S_2 = 18 + 180 = 198 \text{ m}$$

$$s_{\text{av}} = \frac{l_{\text{کل}}}{\Delta t} = \frac{198}{9-0} = 22 \text{ m/s}$$

حالت خاص برای محاسبه سرعت متوسط و تندی متوسط

• اگر بخشی از نمودار که یک طرف محور t قرار دارد، به شکل مثلث باشد، سرعت متوسط در آن بازه برابر نصف سرعت بیشینه‌اش است. مثلاً در شکل زیر در بازه صفر تا t_1 یا t_1 تا t_2 سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{\text{av}(0, t_1)} = \frac{v_1}{2}, \quad v_{\text{av}(t_1, t_2)} = \frac{v_2}{2}$$

$$v_{\text{av}(0, t_1)} = \frac{S_1}{t_1 - 0} = \frac{\frac{v_1 \times t_1}{2}}{t_1} = \frac{v_1}{2}$$

اثبات:

آزمون ۱ در شکل روبه‌رو سرعت متوسط در بازه زمانی t_1 تا t_2 چند متر بر ثانیه است؟

- ۱- $\frac{-10}{3}$
- ۲- -10
- ۳- $-12/5$
- ۴- باید لحظه t_2 معلوم باشد.

پاسخ ۲ گام اول: با توجه به مساحت زیر نمودار در بازه t_1 تا t_2 جابه‌جایی متحرک در این بازه را حساب می‌کنیم:

$$S = \frac{20 \times \Delta t}{2} = 10 \Delta t \rightarrow \Delta x = -10 \Delta t$$

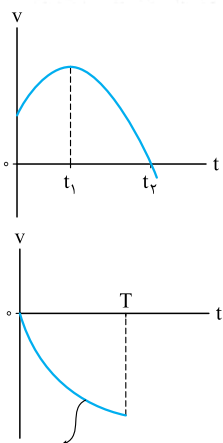
$$v_{\text{av}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-10 \Delta t}{\Delta t} = -10 \text{ m/s}$$

گام دوم: حالا می‌رویم سراغ سرعت متوسط در بازه Δt :

تکنیک نمودار در بازه زمانی t_1 تا t_2 به شکل مثلث و تماماً زیر محور t است. پس داریم:

$$v_{\text{av}} = \frac{-20}{2} = -10 \text{ m/s}$$

نمودار سرعت - زمان حرف‌های دیگه‌ای هم برای گفتن داره که توی مفهوم شتاب می‌گیریم.



۱۶۲. گزینه ۳ (۱) هنگامی که نمودار محور t را قطع می‌کند، متحرک تغییر جهت می‌دهد؛ همان‌طور که در شکل پیداست، این اتفاق در لحظه t_2 می‌افتد.
 (۲) در بازه زمانی t_1 تا t_2 نمودار سرعت - زمان بالای محور t بوده و علامت سرعت مثبت است! پس در این بازه، متحرک در جهت محور x حرکت کرده است.

۱۶۳. گزینه ۴ مطابق شکل، نمودار زیر محور t قرار دارد و علامت سرعت منفی است و از طرف دیگر در حال دور شدن از محور t است، پس اندازه سرعت ($|v|$) هم در حال افزایش است؛ بنابراین متحرک الزاماً در جهت منفی محور x حرکت کرده و تندی آن در حال افزایش است.

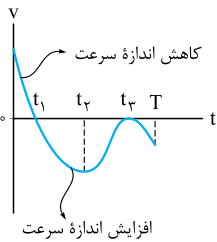
حواستون باشه نمودار سرعت - زمان رو با نمودار مکان - زمان قاطی نکنید. زیر محور t بودن نمودار $v-t$ یعنی متحرک در حال حرکت در جهت منفی محور x است. اما زیر محور t بودن نمودار $x-t$ یعنی متحرک در قسمت منفی محور x در حال حرکت است.

تندی در حال افزایش

۱۶۴. گزینه ۱ حرکت متحرکی همواره تندشونده است که نمودار سرعت - زمان آن در حال دور شدن از محور t باشد، یعنی اندازه سرعت لحظه‌ای آن همواره در حال افزایش باشد. این ویژگی فقط در نمودار (۱) دیده می‌شود.

۱۶۵. گزینه ۱ از t_1 تا t_2 نمودار سرعت - زمان در حال نزدیک شدن به محور t است و اندازه سرعت کم می شود؛ پس حرکت کندشونده است. در این بازه نمودار بالای محور t بوده و سرعت مثبت است؛ پس متحرک در جهت محور X حرکت می کند.

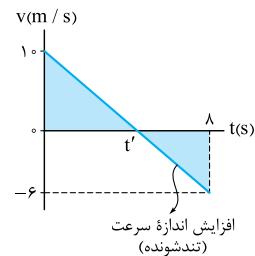
حواستون باشه نمودار $v-t$ را با نمودار $X-t$ اشتباه نگیرید. این جا در بازه های t_1 تا t_2 و t_2 تا t_3 و t_3 تا t_4 حرکت تندشونده و در بازه های t_1 تا t_2 و t_2 تا t_3 و t_3 تا t_4 حرکت کندشونده است.



۱۶۶. گزینه ۳ با توجه به شکل، به بررسی عبارت ها می پردازیم.

(الف) نمودار سرعت - زمان در بازه زمانی صفر تا t_1 به محور t نزدیک و در بازه زمانی t_1 تا t_2 از محور t دور شده است. پس در بازه زمانی صفر تا t_2 ، حرکت ابتدا کندشونده $(0, t_1)$ و سپس تندشونده (t_1, t_2) است. *
 (ب) در لحظه t_1 چون علامت سرعت تغییر کرده، جهت حرکت تغییر می کند؛ اما در لحظه t_2 چون علامت سرعت تغییری نکرده، جهت حرکت تغییر نمی کند. *
 (پ) در مبدأ زمان نمودار سرعت - زمان از بالای محور t شروع شده، پس علامت سرعت مثبت است؛ پس سرعت متحرک در جهت محور X است. *

(ت) در تمام بازه t_2 تا T نمودار زیر محور t است و علامت سرعت منفی است؛ پس جهت حرکت متحرک تغییر نکرده است. به خاطر همین، اندازه جابه جایی و مسافت طی شده متحرک یکسان خواهد بود. ✓



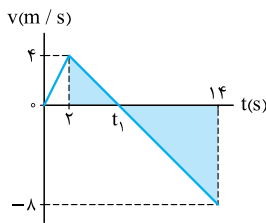
۱۶۷. گزینه ۴ مطابق شکل، جهت سرعت متحرک در لحظه t' تغییر می کند. تغییر جهت سرعت متحرک به معنای تغییر جهت حرکت است؛ پس باید مقدار t' را حساب کنیم. مطابق شکل دو مثلث رنگی با هم متشابه اند؛ بنابراین:

$$\frac{t'}{8-t'} = \frac{6}{10} \Rightarrow 10t' = 48 - 6t' \Rightarrow 16t' = 48 \Rightarrow t' = 3 \text{ s}$$

لحظه $t' = 3 \text{ s}$ می شود ابتدای ثانیه ششم! (ثانیه ششم یعنی از $t = 5 \text{ s}$ تا $t = 6 \text{ s}$)

حواستون باشه ثانیه پنجم یعنی از $t = 4 \text{ s}$ تا $t = 5 \text{ s}$! پس ابتدای ثانیه پنجم می شود $t = 4 \text{ s}$

(۲) در بازه زمانی $t' = 5 \text{ s}$ تا $t = 8 \text{ s}$ نمودار سرعت - زمان در حال دور شدن از محور t بوده و اندازه سرعت در حال افزایش است. پس در این بازه حرکت تندشونده است. ثانیه ششم در این بازه قرار دارد.



۱۶۸. گزینه ۳ گام اول: متحرک زمانی در سوی مخالف محور X حرکت می کند که سرعت آن منفی باشد؛ پس در شکل روبه رو از $t = t_1$ تا $t = 14 \text{ s}$ ، متحرک در جهت منفی محور X حرکت می کند. برای به دست آوردن t_1 از تشابه دو مثلث رنگی استفاده می کنیم:

$$\frac{t_1 - 2}{14 - t_1} = \frac{4}{8} \Rightarrow \frac{t_1 - 2}{14 - t_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2t_1 - 4 = 14 - t_1 \Rightarrow 3t_1 = 18 \Rightarrow t_1 = 6 \text{ s}$$

گام دوم: کار تمام نشده است. مدت زمانی را که متحرک در سوی منفی محور X حرکت می کند، می خواهیم:

$$\Delta t = 14 - 6 = 8 \text{ s}$$

۱۶۹. گزینه ۲ می دانیم که وقتی نمودار سرعت - زمان در حال دور شدن از محور t است، نوع حرکت تندشونده است.

این جا، در بازه زمانی صفر تا 1 s تا t' تا 8 s نمودار سرعت - زمان در حال دور شدن از محور t است. پس برای حل این تست کافی است بازه $\Delta t_2 = (8 - t')$ را تعیین کنیم. برای محاسبه t' از تشابه دو مثلث (رنگ شده) کمک می گیریم:

$$\frac{2}{| -5 |} = \frac{t' - 1}{8 - t'} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{t' - 1}{8 - t'} \Rightarrow 16 - 2t' = 5t' - 5 \Rightarrow 21 = 7t' \Rightarrow t' = \frac{21}{7} = 3 \text{ s}$$

$$\Delta t_2 = 8 - t' = 8 - 3 = 5 \text{ s}$$

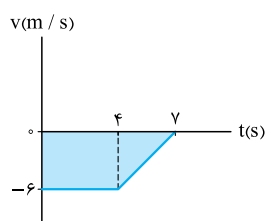
بنابراین حرکت متحرک 1 s (در بازه صفر تا 1 s) و 5 s (در بازه 3 s تا 8 s) تندشونده بوده است. یعنی مجموعاً $6 \text{ s} = 1 + 5$ حرکتش تندشونده بوده است.

۱۷۰. گزینه ۴ چون علامت سرعت متحرک در این بازه زمانی همواره منفی است؛ یعنی تغییر جهتی نداشته است؛ پس اندازه جابه جایی و مسافت طی شده یکسان است. (تا همین جا ۲ و ۳ رد شدند!) حالا برای محاسبه اندازه جابه جایی، مساحت زیر نمودار را حساب می کنیم:

$$l = |\Delta x| = S_{\text{دورزنه}} = \frac{4+7}{2} \times 6 = 33 \text{ m}$$

$$\vec{v} < 0 \Rightarrow \Delta x < 0 \Rightarrow \Delta \vec{x} = (-33\vec{i}) \text{ m}$$

366



$$S_1 = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

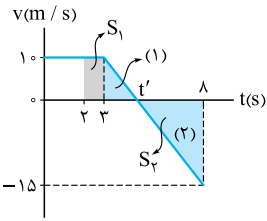
۱۷۱. گزینه ۴ گام اول: ابتدا مساحت های S_1 و S_2 را حساب می کنیم:

$$S_2 = \frac{(9-3) \times 5}{2} = 15$$

گام دوم: مسافت طی شده کاری به علامت سرعت ندارد؛ برای همین برابر $S_1 + S_2$ است: $l = S_1 + S_2 = 6 + 15 = 21 \text{ m}$

گام سوم: حالا چون S_1 بالای محور t ($v > 0$) و S_2 پایین محور t ($v < 0$) است، جابه جایی برابر $S_1 - S_2$ می شود؛ یعنی:

$$\Delta x = S_1 - S_2 = 6 - 15 = -9 \text{ m} \Rightarrow \Delta \vec{x} = (-9\vec{i}) \text{ m}$$



۱۷۲. گزینه ۲ | گام اول: ابتدا به کمک تشابه دو مثلث (۱) و (۲)، t' را حساب می‌کنیم:

$$\frac{1-t'}{t'-3} = \frac{1.5}{3} \Rightarrow 16-2t' = 3t'-9 \Rightarrow 5t' = 25 \Rightarrow t' = 5 \text{ s}$$

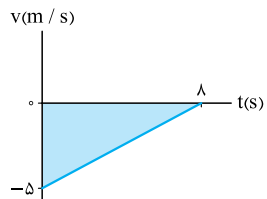
گام دوم: حالا مساحت‌های S_1 و S_2 را در بازه زمانی (۲ s, ۸ s) به دست می‌آوریم:

$$S_1 = \text{مساحت دوزنقه} = \frac{(5-2) + (3-2)}{2} \times 1.0 = 2.0 \quad S_2 = \text{مساحت مثلث} = \frac{(8-5) \times 1.5}{2} = 22/5$$

گام سوم: S_1 بالای محور t و S_2 پایین محور t قرار دارد؛ بنابراین جابه‌جایی متحرک برابر است با:

$$\Delta x = S_1 - S_2 = 2.0 - 22/5 = -2/5 \Rightarrow \Delta \vec{x} = (-2/5 \vec{i}) \text{ m}$$

حواستون باشه | اگر جابه‌جایی را در بازه زمانی (۰, ۸ s) حساب می‌کردید، به ۴ می‌رسیدید! پس همیشه سؤال را با دقت بخوانید!

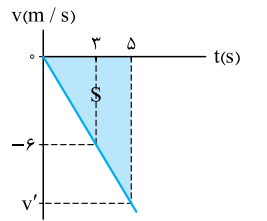


۱۷۳. گزینه ۴ | بردار مکان در مبدأ زمان را داریم و بردار مکان در لحظه $t = 8 \text{ s}$ را می‌خواهیم. پس لازم است بردار جابه‌جایی را در بازه (۰, ۸ s) به دست آوریم.

برای این کار از مساحت زیر نمودار استفاده می‌کنیم. در این جا چون نمودار سرعت - زمان زیر محور t است، علامت سرعت و در نتیجه جابه‌جایی منفی است:

$$\Delta x = -S = -\frac{(5 \times 8)}{2} = -20 \text{ m} \Rightarrow \Delta \vec{x} = (-20 \vec{i}) \text{ m}$$

عنه! بردار مکان در لحظه $t = 8 \text{ s}$ را می‌خواهیم: $\Delta \vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{x}_0 + \Delta \vec{x} = -5 \vec{i} - 20 \vec{i} = (-25 \vec{i}) \text{ m}$



۱۷۴. گزینه ۳ | در نمودار روبه‌رو، مسافت طی شده توسط متحرک در ۵ ثانیه اول برابر با مساحت زیر نمودار در این بازه زمانی (S) است. پس ابتدا باید به کمک تشابه اندازه v' را پیدا کنیم و بعد مساحت S را محاسبه کنیم:

$$\frac{|v'|}{6} = \frac{5}{3} \Rightarrow |v'| = 10 \text{ m/s}$$

$$\ell_{(0,5)} = S = \frac{5 \times 10}{2} = 25 \text{ m}$$

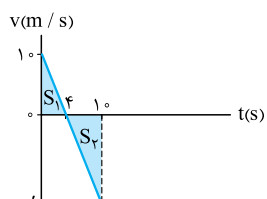
۱۷۵. گزینه ۴ | گام اول: برای محاسبه مسافت، باید مساحت‌های S_1 و S_2 را در شکل (الف) حساب کرده و با هم جمع کنیم؛ پس در قدم اول باید لحظه t' را پیدا کنیم. با توجه به تشابه دو مثلث در شکل (ب) داریم:

$$\frac{15-t'}{t'} = \frac{22}{4} \Rightarrow 11t' = 60 - 4t' \Rightarrow t' = \frac{60}{15} = 4 \text{ s}$$

گام دوم: حالا به راحتی می‌توانیم مساحت‌های S_1 و S_2 را به دست آوریم:

$$S_1 = \frac{8 \times t'}{2} = \frac{8 \times 4}{2} = 16, \quad S_2 = \frac{22 \times (20 - t')}{2} = \frac{22 \times (20 - 4)}{2} = 176$$

$$\ell = S_1 + S_2 = 16 + 176 = 192 \text{ m}$$



۱۷۶. گزینه ۲ | گام اول: ابتدا به کمک تشابه دو مثلث رنگی، مقدار v' را به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{|v'|} = \frac{2}{(10-4)} \Rightarrow 2|v'| = 3 \Rightarrow |v'| = 1.5 \Rightarrow v' = -1.5 \text{ m/s}$$

گام دوم: حالا مساحت‌های S_1 و S_2 را حساب می‌کنیم:

$$S_1 = \frac{4 \times 1}{2} = 2.0 \quad S_2 = \frac{(10-4) \times 1.5}{2} = 4.5$$

تکلیک | برای محاسبه مساحت مثلث S_2 می‌توانید از نسبت مساحت مثلث‌های متشابه هم استفاده کنید. (بازه صفر تا ۴ s را Δt_1 و بازه ۴ s تا ۱۰ s را Δt_2 نامیده‌ایم.)

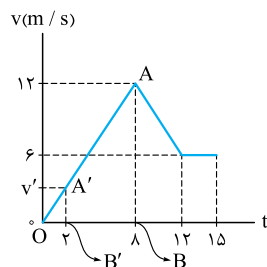
$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_2}{2} = \left(\frac{10-4}{4-0}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_2}{2} = \frac{9}{4} \Rightarrow S_2 = 4.5$$

$$\Delta x = S_1 - S_2 = 2.0 - 4.5 = -2.5 \text{ m}$$

گام سوم: S_1 بالای محور t و S_2 پایین محور t قرار دارد. پس جابه‌جایی برابر است با:

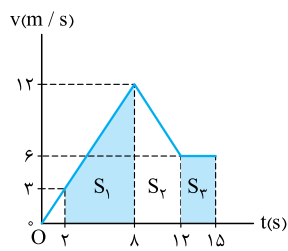
گام چهارم: با توجه به مکان اولیه متحرک و داشتن جابه‌جایی در ۱۰ ثانیه اول، مکان متحرک در لحظه $t = 10 \text{ s}$ دست می‌آید.

یعنی در لحظه $t = 10 \text{ s}$ متحرک در ۲۳ متری قسمت منفی محور x (سمت چپ مبدأ) قرار دارد.



۱۷۷. گزینه ۱ | گام اول: ابتدا باید اندازه سرعت متحرک در لحظه $t_1 = 2 \text{ s}$ را به دست آوریم. برای این کار مطابق شکل از تشابه دو مثلث OAB و OAB' کمک می‌گیریم:

$$\frac{v'}{12} = \frac{2}{12} \Rightarrow 4v' = 12 \Rightarrow v' = 3 \text{ m/s}$$

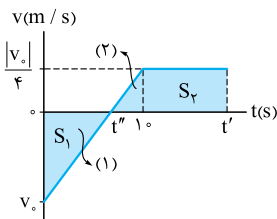


گام دوم: حالا با استفاده از مساحت زیر نمودار، جابه‌جایی متحرک در بازه زمانی $t_1 = 2$ s تا $t_2 = 15$ s را به دست می‌آوریم.

$$\Delta x_{(2,15)} = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{15}{2} \times (3+12) + \frac{18}{2} \times (6+12) + 6 \times (15-12) = 45 + 36 + 18 = 99 \text{ m}$$

گام سوم: با داشتن جابه‌جایی در بازه زمانی $(2 \text{ s}, 15 \text{ s})$ ، مکان متحرک در لحظه $t = 15$ s به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Delta x_{(2,15)} = x_2 - x_1 \Rightarrow 99 \vec{i} = \vec{x}_2 - (-6 \vec{i}) \Rightarrow \vec{x}_2 = 93 \vec{i}$$

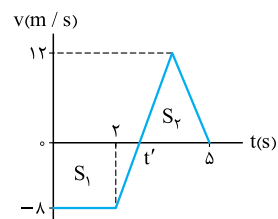


گام اول: چون $x_0 = 0$ است، برای آن که دوباره $x = 0$ شود، باید لحظه‌ای را پیدا کنیم که جابه‌جایی از $t = 0$ تا آن لحظه صفر شود. این لحظه را t' می‌نامیم. برای این که t' را به دست آوریم، اول باید لحظه‌ای را که سرعت صفر می‌شود (یعنی t'') تعیین کنیم. برای این کار از تشابه مثلث‌های (۱) و (۲) کمک می‌گیریم:

$$\frac{|v_0|}{4} = \frac{t''}{10-t''} \Rightarrow 4 = \frac{t''}{10-t''} \Rightarrow 40 - 4t'' = t'' \Rightarrow 5t'' = 40 \Rightarrow t'' = 8 \text{ s}$$

گام دوم: حالا که t'' را محاسبه کردیم به سراغ t' می‌رویم. جابه‌جایی از صفر تا t' صفر است، یعنی:

$$-S_1 + S_2 = 0 \Rightarrow S_1 = S_2 \Rightarrow \frac{|v_0| \times \lambda}{2} = \frac{(t'-10) + (t'-8)}{2} \times \frac{|v_0|}{4} \Rightarrow 4 \times 8 = 2t' - 18 \Rightarrow 2t' = 50 \Rightarrow t' = 25 \text{ s}$$



گام اول: جابه‌جایی متحرک در ۵ ثانیه اول صفر است، پس براساس نمودار سرعت - زمان شکل روبه‌رو داریم:

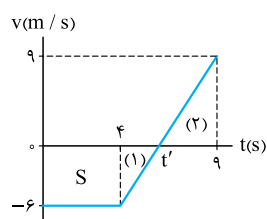
$$S_2 - S_1 = 0 \Rightarrow S_2 = S_1 \Rightarrow \frac{2 \times \lambda \times (\Delta - t')}{2} = \frac{\lambda \times (2 + t')}{2}$$

$$\Rightarrow 3 \times (\Delta - t') = 2 \times (2 + t')$$

$$\Rightarrow 15 - 3t' = 4 + 2t' \Rightarrow 11 = 5t' \Rightarrow t' = \frac{11}{5} = 2.2 \text{ s}$$

گام دوم: مسافت برابر مجموع مساحت‌ها بدون در نظر گرفتن علامت آن‌ها است:

$$l = S_1 + S_2 \xrightarrow{S_1=S_2} l = 2S_2 = 2 \left(\frac{(\Delta - t') \times 12}{2} \right) \xrightarrow{t'=2.2 \text{ s}} l = \frac{(\Delta - 2/5) \times 12}{2} = 33/5 \text{ m}$$



گام اول: هنگامی که نمودار سرعت - زمان محور t را قطع می‌کند (t')، علامت سرعت تغییر کرده و متحرک تغییر جهت می‌دهد؛ پس ابتدا به کمک تشابه مثلث‌های (۱) و (۲)، t' را حساب می‌کنیم:

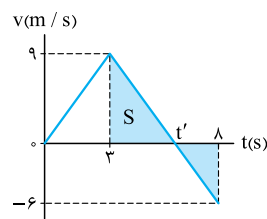
$$\frac{9-t'}{t'-4} = \frac{2}{2} \Rightarrow 18 - 2t' = 3t' - 12 \Rightarrow 5t' = 30 \Rightarrow t' = 6 \text{ s}$$

گام دوم: حالا به کمک مساحت زیر نمودار، جابه‌جایی متحرک از ابتدای حرکت ($t = 0$) تا لحظه تغییر جهت ($t' = 6$ s) را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x = -S = -\frac{(4+6)}{2} \times 6 = -30 \text{ m}$$

گام سوم: جابه‌جایی و مکان نهایی را داریم و مکان اولیه جسم را می‌خواهیم:

$$\Delta x = x - x_0 \Rightarrow -30 = 10 - x_0 \Rightarrow x_0 = 10 + 30 = 40 \text{ m} \Rightarrow \vec{x}_0 = (40 \vec{i}) \text{ m}$$



گام اول: می‌خواهیم بیشترین فاصله متحرک از مبدأ را حساب کنیم. با توجه به این که متحرک از مبدأ مکان شروع به حرکت کرده است، مطابق شکل از لحظه $t = 0$ تا t' متحرک در حال دور شدن از مبدأ (افزایش Δx) و بعد از آن با تغییر علامت سرعت و تغییر جهت، متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ است؛ با این حساب دورترین فاصله متحرک از مبدأ در لحظه t' اتفاق می‌افتد، پس باید مکان جسم در لحظه t' را پیدا کنیم؛ اولین کار، محاسبه t' به کمک تشابه است.

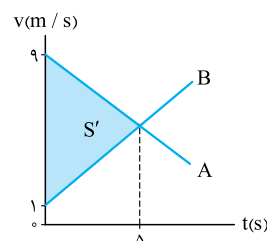
$$\frac{8-t'}{t'-3} = \frac{2}{2} \Rightarrow 24 - 3t' = 2t' - 6 \Rightarrow 5t' = 30 \Rightarrow t' = 6 \text{ s}$$

$$\Delta x = S = \frac{9 \times 6}{2} = 27 \text{ m}$$

گام دوم: حالا که مقدار t' را می‌دانیم، مساحت زیر نمودار در بازه زمانی $(0, t')$ را حساب می‌کنیم:

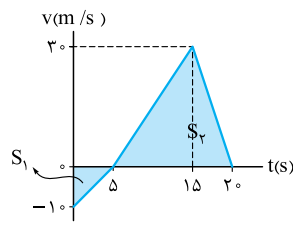
$$x_{\max} = x_0 + \Delta x = 0 + 27 = 27 \text{ m}$$

گام سوم: در ابتدا متحرک در $x = 0$ بوده است؛ پس بیشترین فاصله آن از مبدأ ۲۷ m است؛ به زبان ریاضی:



گزینه ۲ | ۱۸۲: با توجه به شکل، سرعت دو متحرک در $t = 5$ s با هم برابر می‌شود. حالا ما می‌خواهیم بفهمیم که در این لحظه دو متحرک چند متر از هم فاصله دارند. این را می‌دانیم که جابه‌جایی هر متحرک از مساحت زیر نمودار به دست می‌آید؛ بنابراین اختلاف مساحت این دو متحرک، فاصله این دو متحرک را از هم نشان می‌دهد. مطابق شکل اگر مساحت زیر نمودار A، S_A و مساحت زیر نمودار B، S_B باشد، S' اختلاف جابه‌جایی دو متحرک از هم را نشان می‌دهد؛ پس:

$$\Delta x_A - \Delta x_B = S_A - S_B = S' = \frac{(9-1) \times 5}{2} = 20 \text{ m} \xrightarrow{x_A=x_B} x_A - x_B = 20 \text{ m}$$



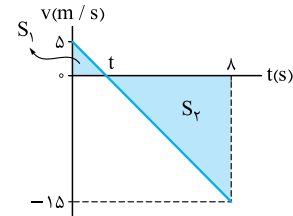
۱۸۳. گزینه ۳ | گام اول: جابه‌جایی را به کمک مساحت زیر نمودار $v-t$ در شکل روبه‌رو به دست می‌آوریم.

$$\Delta x = -S_1 + S_2 = -\frac{10 \times 15}{2} + \frac{30 \times (20 - 5)}{2} \Rightarrow \Delta x = -25 + 225 = 200 \text{ m}$$

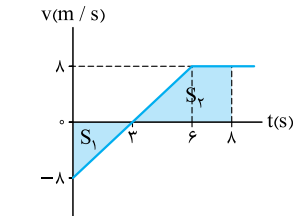
زیر محور t
بالای محور t

گام دوم: جابه‌جایی را که داریم، زمان هم داریم؛ پس برای دست آوردن سرعت متوسط چیزی کم نداریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{200}{20} = 10 \text{ m/s}$$

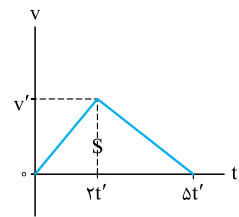


$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{50}{8} = 6.25 \text{ m/s}$$



$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{16}{8} = 2 \text{ m/s}, \quad s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{40}{8} = 5 \text{ m/s}$$

$$s_{av} - v_{av} = 5 - 2 = 3 \text{ m/s}$$



$$d = s = \frac{v' \times (\Delta t')}{2} = \frac{\Delta}{2} v' t'$$

گام سوم: اختلاف تندی متوسط و اندازه سرعت متوسط در این ۸ s به صورت مقابل به دست می‌آید:

گام اول: جابه‌جایی را که همان مساحت زیر نمودار است به دست می‌آوریم:

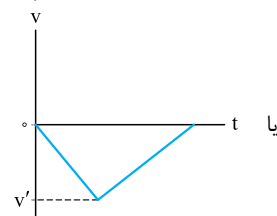
گام دوم: جابه‌جایی را تقسیم بر مدت‌زمان جابه‌جایی می‌کنیم و سرعت متوسط را تعیین می‌کنیم:

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta}{2} v' t'}{5 t'} = \frac{1}{2} v'$$

تکنیک | در نمودارهای سرعت - زمانی مانند شکل‌های روبه‌رو که نمودار به

شکل مثلث تماماً بالای محور t یا تماماً پایین محور t است، سرعت متوسط

همواره برابر $\frac{v'}{2}$ و تندی متوسط برابر $\frac{|v'|}{2}$ است.



۱۸۷. گزینه ۱ | گام اول: می‌دانید که جابه‌جایی متحرک برابر سطح زیر نمودار $v-t$ است. پس برای نمودار روبه‌رو داریم:

$$\Delta x = S = \frac{v_{max} \times 25}{2} = \frac{25}{2} v_{max}$$

گام دوم: طبق فرمول سرعت متوسط $(v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t})$ داریم:

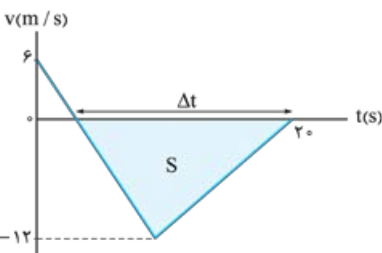
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow 10 = \frac{\frac{25}{2} v_{max}}{(25 - 0)} \Rightarrow v_{max} = 20 \text{ m/s}$$

$$v_{max} = 2v_{av} = 2 \times 10 = 20 \text{ m/s}$$

تکنیک | در نمودارهای این شکلی (مثلثی) همیشه سرعت متوسط برابر نصف سرعت بیشینه است. یعنی:

۱۸۸. گزینه ۲ | جاهایی که $v < 0$ است، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کرده است؛ بنابراین مطابق

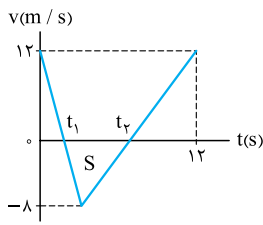
شکل، تندی متوسط در بازه‌ای که متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کرده، برابر است با:



$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{S}{\Delta t} = \frac{12 \times \Delta t}{2 \Delta t} = 6 \text{ m/s}$$

تکنیک

در بازه زمانی که متحرک در خلاف جهت محور حرکت می‌کند (Δt) نمودار مثلثی و تماماً پایین محور t قرار دارد، بنابراین در این بازه تندی متوسط برابر نصف تندی بیشینه است یعنی $s_{av} = \frac{|-12|}{2} = 6 \text{ m/s}$.



۱۸۹. گزینه ۳ | گام اول: مطابق شکل، متحرک در لحظه‌های t_1 و t_2 که علامت سرعتش تغییر می‌کند! تغییر جهت می‌دهد. برای محاسبه اندازه سرعت متوسط، ابتدا باید جابه‌جایی بین این دو لحظه را به کمک مساحت زیر نمودار به دست آوریم:

$$|\Delta x| = S = \frac{(t_2 - t_1) \times 8}{2} = 4(t_2 - t_1)$$

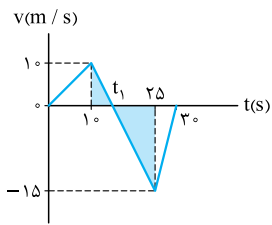
گام دوم: حالا با تقسیم این مقدار بر بازه زمانی (t_2, t_1) ، اندازه سرعت متوسط حساب می‌شود:

$$|v_{av}| = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} = \frac{4(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = 4 \text{ m/s}$$

تکنیک

گفتیم که در نمودارهای مثلثی، سرعت متوسط در آن بازه، نصف سرعت بیشینه است! در این‌جا هم در بازه زمانی t_1 تا t_2 نمودار به صورت مثلث و تمام آن زیر محور t است، پس داریم:

$$|v_{av}(t_1, t_2)| = \frac{|v_{max}|}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ m/s}$$



۱۹۰. گزینه ۱ | گام اول: وقتی سرعت منفی است، متحرک در سوی منفی محور در حال حرکت است. پس با توجه به شکل روبرو از $t = t_1$ تا $t = 30 \text{ s}$ متحرک به سمت منفی محور x در حال حرکت است. مقدار t_1 را به کمک تشابه به دست می‌آوریم. دو مثلث رنگی متشابه هستند. پس:

$$\frac{25 - t_1}{t_1 - 10} = \frac{|-15|}{10} \Rightarrow 50 - 2t_1 = 3t_1 - 30$$

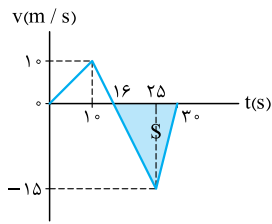
$$\Rightarrow 50 + 30 = 3t_1 + 2t_1 \Rightarrow 80 = 5t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{80}{5} = 16 \text{ s}$$

حالا سرعت متوسط از $t_1 = 16 \text{ s}$ تا $t = 30 \text{ s}$ را به دست می‌آوریم. برای این کار به جابه‌جایی در این بازه زمانی نیاز داریم که برابر با مساحت قسمت رنگی در شکل روبرو است:

$$\Delta x = -S = -\frac{(30 - 16) \times 15}{2} = -105 \text{ m}$$

بنابراین بزرگی سرعت متوسط در مدتی که متحرک در سوی مخالف محور x حرکت می‌کند، برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-105}{30 - 16} = -7/5 \text{ m/s} \Rightarrow |v_{av}| = 7/5 \text{ m/s}$$


تکنیک

در مدتی که متحرک در سوی منفی محور x جابه‌جا می‌شود، نمودار سرعت - زمان به شکل مثلث و تماماً زیر محور t قرار دارد. پس سرعت متوسط در این بازه برابر v' است. پس:

$$v_{av} = \frac{-15}{2} = -7/5 \text{ m/s}$$

گام دوم: برای محاسبه تندی متوسط در بازه زمانی $(10 \text{ s}, 30 \text{ s})$ به مسافت طی شده در این بازه زمانی احتیاج داریم که به صورت روبرو به دست می‌آید:

$$l = s_1 + s = \frac{(16 - 10) \times 10}{2} + \frac{(30 - 16) \times 15}{2} = 30 + 105 = 135 \text{ m}$$

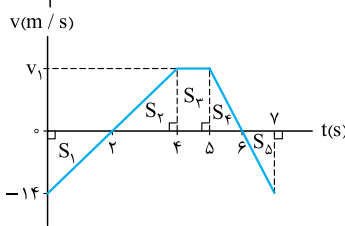
بنابراین تندی متوسط متحرک در بازه زمانی $(10 \text{ s}, 30 \text{ s})$ برابر است:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{135}{30 - 10} = \frac{135}{20} \Rightarrow s_{av} = 6/75 \text{ m/s}$$

گام سوم: با داشتن v_{av} و s_{av} مقدار خواسته شده در تست را به دست می‌آوریم:

$$v_{av} - s_{av} = 7/5 - 6/75 = 0/75 \text{ m/s}$$

۱۹۱. گزینه ۱ | گام اول: دو مثلث با مساحت‌های S_1 و S_2 براساس قاعده دو زاویه و ضلع بین با هم برابر هستند؛ بنابراین $v_1 = 14 \text{ m/s}$ است.

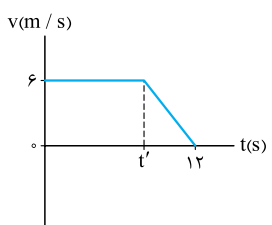


گام دوم: حالا برای تعیین سرعت متوسط باید جابه‌جایی را با توجه به مساحت‌ها به دست آوریم. S_1, S_2, S_3 و S_4 را به راحتی می‌توانیم به دست آوریم. تنها S_5 می‌ماند. همان‌طور که در نمودار روبرو می‌بینید، با توجه به قاعده دو زاویه و ضلع بین، دو مثلث با مساحت S_4 و S_5 با هم برابر هستند؛ پس $S_4 = S_5$ است؛ بنابراین، سرعت متوسط به صورت مقابل به دست می‌آید:

$$\Delta x = -\underbrace{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}_{S_4} - S_5 \Rightarrow \Delta x = S_4 = 14 \times 1 = 14 \text{ m} \Rightarrow v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{14}{7} = 2 \text{ m/s}$$

تکنیک

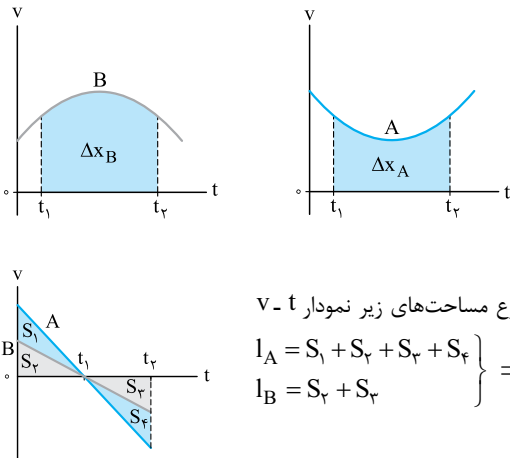
۱۹۲. گزینه ۱ | گام اول: مطابق شکل از لحظه t' تا $t = 12 \text{ s}$ نمودار سرعت - زمان در حال نزدیک شدن به محور t است؛ پس در این بازه حرکت کندشونده است. برای محاسبه جابه‌جایی در این بازه، t' را باید به دست آوریم؛ برای این کار از مساحت زیر نمودار و رابطه تندی متوسط کمک می‌گیریم:



$$s_{av}(0, 12) = \frac{l}{\Delta t} = \frac{\text{مساحت دوزنقه}}{12 - 0} \Rightarrow 5 = \frac{\frac{(12 + t') \times 6}{2}}{12} \Rightarrow 20 = 12 + t' \Rightarrow t' = 8 \text{ s}$$

گام دوم: حالا به کمک مساحت مثلث در بازه $t' = 8 \text{ s}$ تا $t = 12 \text{ s}$ ، اندازه جابه‌جایی مورد نظر را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x = \text{مساحت مثلث} = \frac{(12 - 8) \times 6}{2} = 12 \text{ m} \Rightarrow \Delta \vec{x} = (12\hat{i}) \text{ m}$$



۱۹۳. گزینه ۴) بزرگی سرعت متوسط را برای هر دو متحرک در بازه t_1 تا t_2 می‌خواهیم؛ یعنی Δt برای هر دو متحرک یکسان است. پس با توجه به رابطه $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ ، هر متحرکی که جابه‌جایی‌اش بیشتر باشد، بزرگی سرعت متوسط‌اش هم بیشتر خواهد بود. برای این کار باید بینیم مساحت زیر نمودار کدام متحرک بیشتر است. در شکل‌های روبه‌رو مشخص است که مساحت زیر نمودار متحرک B و در نتیجه جابه‌جایی متحرک B بیشتر است:

$$\Delta x_B > \Delta x_A \Rightarrow \frac{\Delta x_B}{\Delta t} > \frac{\Delta x_A}{\Delta t} \Rightarrow v_{av,B} > v_{av,A}$$

۱۹۴. گزینه ۱) تندی متوسط برابر با مسافت تقسیم بر زمان طی مسافت و مسافت‌های زیر نمودار $v-t$ است؛ پس به زبان ریاضی:

$$\left. \begin{aligned} I_A &= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \\ I_B &= S_2 + S_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow I_A > I_B \xrightarrow{\Delta t_A = \Delta t_B} \frac{I_A}{\Delta t} > \frac{I_B}{\Delta t} \Rightarrow s_{av,A} > s_{av,B}$$

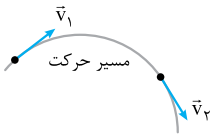
دس هشتم شتاب



مفهوم شتاب

شتاب با دو کمیت مهم فیزیکی نسبت فامیلی نزدیک دارد. یکی از این کمیت‌ها **تغییرات سرعت** است.^۱ به طوری که اگر بردار سرعت متحرک به هر نحوی **تغییر** کند، حرکت جسم **شتابدار** است؛ در واقع هر وقت تغییر سرعت هست، شتاب هم هست. سرعت مثل همه کمیت‌های برداری به دو صورت تغییر می‌کند:

- الف) تغییر اندازه سرعت:** وقتی اندازه سرعت (تندی) تغییر می‌کند، حرکت جسم یا کندشونده است یا تندشونده. در این صورت حتماً حرکت شتابدار است.
- ب) تغییر جهت سرعت:** می‌دانید که بردار سرعت مماس بر مسیر حرکت است؛ پس با تغییر راستا و جهت حرکت، راستا و جهت بردار سرعت هم تغییر می‌کند؛ یعنی در حرکت‌هایی که بر مسیر خط راست نیست، حتماً سرعت تغییر جهت می‌دهد و به همین دلیل حتماً شتاب داریم (حتی اگر اندازه سرعت تغییر نکند). در شکل روبه‌رو بردارهای \vec{v}_1 و \vec{v}_2 هم‌اندازه‌اند (مثلاً مقدار هر دو 10 m/s است) ولی جهت آن‌ها متفاوت است و برای همین می‌گوییم سرعت تغییر کرده و حرکت شتابدار است.



آست ۱) حرکت سقوط یک سنگ رهاشده از بالای یک ساختمان (در شرایط خلأ) به دلیل تغییر سرعت و حرکت یک ماهواره به دور زمین به دلیل تغییر سرعت، شتابدار است.

- ۱) اندازه، جهت ۲) اندازه، اندازه ۳) جهت، اندازه ۴) جهت، جهت

پاسخ ۱) ا وقتی سنگی را در شرایط خلأ از بالای یک بلندی رها می‌کنیم، به صورت تندشونده به سمت زمین سقوط می‌کند. در این حرکت دائماً اندازه سرعت افزایش می‌یابد و به همین دلیل حرکت شتابدار است. حرکت ماهواره به دور زمین، حرکت دایره‌ای یکنواخت است. یعنی اندازه سرعت ثابت است اما جهت آن دائماً تغییر می‌کند. به همین علت حرکت ماهواره به دور زمین (با آن که یکنواخت است) شتابدار است.

حواستون باشه ۱) سرعت با تغییر سرعت فرق می‌کند. جهت بردار سرعت لزوماً هم‌جهت با شتاب و تغییرات سرعت نیست. مثلاً در حرکت راست‌خط کندشونده، جهت بردارهای شتاب و تغییرات سرعت در خلاف جهت حرکت (یعنی خلاف جهت بردار سرعت) است.

شتاب متوسط

اگر بردار سرعت متحرک در لحظه t_1 برابر \vec{v}_1 و بردار سرعت متحرک در لحظه t_2 برابر \vec{v}_2 باشد، شتاب متوسط در بازه زمانی t_1 تا t_2 از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

در SI یکای تغییرات سرعت، متر بر ثانیه (m/s) و یکای زمان، ثانیه (s) است، پس یکای شتاب در SI متر بر مربع ثانیه (m/s^2) است:

$$\text{یکای تغییرات سرعت} = \frac{\text{یکای تغییرات سرعت}}{\text{یکای تغییرات زمان}} = \frac{\text{m/s}}{\text{s}} = \text{m/s}^2$$

نکته شتاب کمیته برداری است؛ زیرا از ضرب یک کمیت نرده‌ای ($\frac{1}{\Delta t}$) در یک کمیت برداری ($\Delta \vec{v}$) به دست می‌آید. در ضمن چون همواره مثبت است، پس بردار شتاب متوسط (\vec{a}_{av}) همواره هم‌سو با بردار تغییرات سرعت ($\Delta \vec{v}$) است.

آزمون ۱ بردار سرعت متحرکی در لحظه‌های $t_1 = 2\text{ s}$ و $t_2 = 5\text{ s}$ در SI به صورت $\vec{v}_1 = -6\vec{i}$ و $\vec{v}_2 = 3\vec{i}$ است. اندازه شتاب متوسط این متحرک در بازه ۲ s تا ۵ s چند متر بر مربع ثانیه است؟

پاسخ ۱ از فرمول $\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ بردار \vec{a}_{av} را حساب می‌کنیم:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{(3\vec{i}) - (-6\vec{i})}{5 - 2} = \frac{9\vec{i}}{3} = 3\vec{i} \Rightarrow a_{av} = 3\text{ m/s}^2$$

آزمون ۲ معادله سرعت - زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $\vec{v} = (t^2 - 25)\vec{i}$ است. شتاب متوسط این متحرک در ۲ ثانیه سوم حرکتش برحسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟

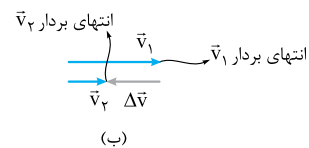
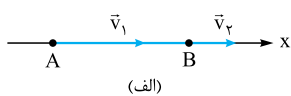
پاسخ ۲ گام اول: ۲ ثانیه سوم حرکت یعنی بازه زمانی $t_1 = 4\text{ s}$ تا $t_2 = 6\text{ s}$ ، پس باید سرعت متحرک در این لحظه‌ها را حساب کنیم:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = (4^2 - 25)\vec{i} = -9\vec{i} \\ \vec{v}_2 = (6^2 - 25)\vec{i} = 11\vec{i} \end{cases}$$

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{11\vec{i} - (-9\vec{i})}{6 - 4} = \frac{20\vec{i}}{2} = 10\vec{i}$$

رسم و محاسبه بردار تغییرات سرعت

برای محاسبه بردار شتاب باید بتوانیم بردار تغییرات سرعت را محاسبه کنیم. سرعت (v) و تغییرات سرعت (Δv) با آن که هم‌جنس هستند (یعنی واحد یکسان دارند) ولی دو کمیت متفاوت‌اند. در واقع تغییرات سرعت تفاضل دو بردار سرعت است. که برای خودش یک بردار مستقل است.



با توجه به کتاب درسی باید بتوانید در دو حالت بردار تغییرات سرعت را رسم کنید و حساب کنید.

الف) بردارهای \vec{v}_1 و \vec{v}_2 در یک راستا باشند: در حرکت بر مسیر خط راست بردارهای \vec{v}_1 و \vec{v}_2 همواره در یک راستا هستند. در شکل (الف) بردارهای سرعت یک متحرک را که بر روی محور x حرکت می‌کند، در دو مکان A و B کشیده‌ایم. برای رسم بردار تغییرات سرعت از A تا B این دو بردار را از یک نقطه رسم می‌کنیم (شکل (ب)). سپس بردار تغییرات سرعت ($\Delta \vec{v}$) را از انتهای بردار \vec{v}_1 به انتهای بردار \vec{v}_2 می‌کشیم.

در این حالت بردار $\Delta \vec{v}$ هم‌راستا با بردارهای \vec{v}_1 و \vec{v}_2 است. حواستون باشه گفتیم هم‌راستا است، یعنی $\Delta \vec{v}$ لزوماً هم‌جهت با \vec{v}_1 و \vec{v}_2 نیست. (مانند شکل (ب))

در این حالت بردار $\Delta \vec{v}$ از رابطه‌های مقابل محاسبه می‌شود:

$$\Delta \vec{v} = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)\vec{i} \quad \text{یا} \quad \Delta v = v_2 - v_1$$

در این رابطه با توجه به جهت حرکت، باید حواسمان به علامت v_1 و v_2 باشد. تست زیر را ببینید:

آزمون ۱ معادله سرعت - زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، در SI به صورت $v = -3t + 6$ است. بردار تغییر سرعت این متحرک در بازه $t_1 = 1\text{ s}$ تا $t_2 = 3\text{ s}$ در SI کدام است و هم‌جهت با کدام بردار سرعت است؟ (\vec{v}_1 و \vec{v}_2 به ترتیب بردارهای سرعت در لحظه‌های t_1 و t_2 هستند).

پاسخ ۱ گام اول: \vec{v}_1 و \vec{v}_2 را حساب می‌کنیم:

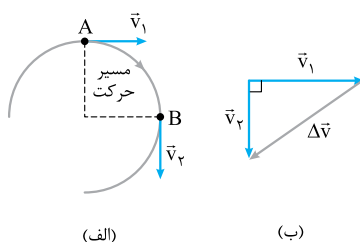
$$\begin{aligned} v_1 &= -3(1) + 6 = 3 \Rightarrow \vec{v}_1 = 3\vec{i} \text{ (m/s)} \\ v_2 &= -3(3) + 6 = -3 \Rightarrow \vec{v}_2 = -3\vec{i} \text{ (m/s)} \end{aligned}$$

گام دوم: $\Delta \vec{v}$ را به دست می‌آوریم:

$$\Delta v = v_2 - v_1 = (-3) - (3) = -6 \Rightarrow \Delta \vec{v} = -6\vec{i} \text{ (m/s)}$$

همین‌طور که می‌بینید، $\Delta \vec{v}$ هم‌سو با \vec{v}_2 و در خلاف جهت \vec{v}_1 است.

کمی عمیق‌تر

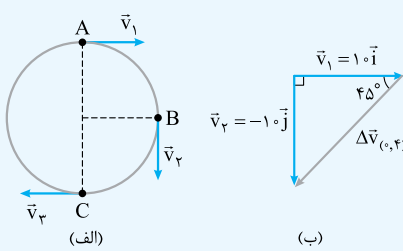
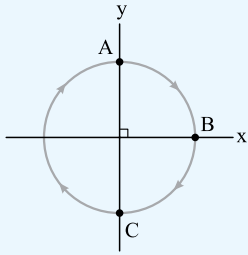


ب) بردارهای \vec{v}_1 و \vec{v}_2 بر هم عمود باشند: در این حالت جهت بردار سرعت 90° تغییر کرده است و بنابراین مسیر این حرکت نمی‌تواند خط راست باشد مثل شکل (الف) که بردارهای سرعت متحرک در نقطه‌های A و B (یعنی \vec{v}_1 و \vec{v}_2) بر هم عمودند. در این حالت بردار تغییرات سرعت مانند شکل (ب) از انتهای \vec{v}_1 به انتهای \vec{v}_2 رسم می‌شود. بنابراین همین‌طور که در شکل (ب) می‌بینید، اندازه Δv برابر وتر یک مثلث قائم‌الزاویه است که از رابطه فیثاغورس محاسبه می‌شود:

$$\Delta v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

در این حالت بردار $\Delta \vec{v}$ نه در جهت \vec{v}_1 است و نه در جهت \vec{v}_2 .

تست ۵ متحرکی با تندی ثابت 10 m/s بر روی مسیر دایره‌ای (شکل زیر) در جهت ساعتگرد حرکت می‌کند. اگر متحرک در لحظه‌های $t_1 = 0$ ، $t_2 = 4 \text{ s}$ و $t_3 = 8 \text{ s}$ به ترتیب در حال عبور از نقطه‌های A، B و C باشد، بردار شتاب متوسط متحرک در بازه‌های زمانی $(0, 4 \text{ s})$ و $(0, 8 \text{ s})$ به ترتیب چند متر بر مربع ثانیه است؟



$$\vec{a}_{av(0,8)} = -2/\delta \vec{i}, \vec{a}_{av(0,4)} = -2/\delta \vec{i} - 2/\delta \vec{j} \quad (1)$$

$$\vec{a}_{av(0,8)} = 0, \vec{a}_{av(0,4)} = -2/\delta \vec{i} - 2/\delta \vec{j} \quad (2)$$

$$\vec{a}_{av(0,8)} = 2/\delta \vec{i}, \vec{a}_{av(0,4)} = \delta \vec{i} + \delta \vec{j} \quad (3)$$

$$\vec{a}_{av(0,8)} = 0, \vec{a}_{av(0,4)} = \delta \vec{i} + \delta \vec{j} \quad (4)$$

پاسخ ۱ در شکل (الف)، بردارهای v_1 ، v_2 و v_3 را رسم کرده‌ایم.

(الف) محاسبه شتاب متوسط در بازه زمانی $(0, 4 \text{ s})$: بردارهای v_1 و v_2 برهم عمودند و بردار تغییر سرعت در بازه 0 تا 4 s $(\Delta \vec{v}_{(0,4)})$ مطابق شکل (ب) است.

بردار تغییرات سرعت در این بازه برابر می‌شود با: $\Delta \vec{v}_{(0,4)} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (-10\vec{j}) - (10\vec{i}) = -10\vec{i} - 10\vec{j}$.
 (اندازه $\Delta v_{(0,4)}$ برابر می‌شود با: $\sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} \text{ m/s}$)

حالا بردار شتاب متوسط در بازه 0 تا 4 s را می‌توانیم حساب کنیم:

$$\vec{a}_{av(0,4)} = \frac{\Delta \vec{v}_{(0,4)}}{\Delta t} = \frac{-10\vec{i} - 10\vec{j}}{4-0} = -2.5\vec{i} - 2.5\vec{j}$$

$$\sqrt{2.5^2 + 2.5^2} = 2.5\sqrt{2} \text{ m/s}^2$$

(اندازه بردار شتاب در بازه 0 تا 4 s برابر می‌شود با:

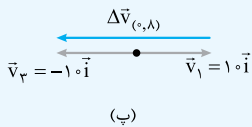
(ب) محاسبه شتاب متوسط در بازه زمانی $(0, 8 \text{ s})$:

در شکل (ب) بردارهای v_1 و v_3 را هم‌مبدأ کرده‌ایم، پس بردار تغییرات سرعت در بازه $(0, 8 \text{ s})$ به این صورت است:

$$\Delta \vec{v}_{(0,8)} = \vec{v}_3 - \vec{v}_1 = (-10\vec{i}) - (10\vec{i}) = -20\vec{i}$$

$$\vec{a}_{av(0,8)} = \frac{\Delta \vec{v}_{(0,8)}}{\Delta t} = \frac{-20\vec{i}}{8-0} = -2.5\vec{i}$$

بردار شتاب متوسط در بازه 0 تا 8 s :



در جدول زیر بردار تغییرات سرعت را در حالت‌های مختلف نشان داده‌ایم. فراموش نکنید که جهت بردار شتاب متوسط (\vec{a}_{av}) در جهت بردار $\Delta \vec{v}$ است. در همه حالت‌ها، بردار $\Delta \vec{v}$ از انتهای بردار v_1 به انتهای بردار v_2 کشیده می‌شود.

شکل	وضعیت بردار تغییرات سرعت	وضعیت بردارهای سرعت اولیه و سرعت نهایی
	$\Delta \vec{v}$ هم‌سو با v_1 و v_2	$ \vec{v}_2 > \vec{v}_1 $ هم‌جهت و $ \vec{v}_2 > \vec{v}_1 $
	$\Delta \vec{v}$ در خلاف جهت v_1 و v_2	$ \vec{v}_2 < \vec{v}_1 $ هم‌جهت و $ \vec{v}_2 < \vec{v}_1 $
	$\Delta \vec{v}$ در جهت v_2 و در خلاف جهت v_1	v_1 و v_2 در خلاف جهت هم
	$\Delta \vec{v}$ بر روی وتر مثلث قائم‌الزاویه و به سمت پیکان v_2	v_1 و v_2 عمود بر هم (کمی عمیق‌تر)

کمی عمیق‌تر

اول همین درس‌نامه گفتیم شتاب با دو کمیت فیزیکی مهم نسبت فامیلی نزدیک دارد که یکی از آن‌ها (تغییرات سرعت) را معرفی کردیم. حالا می‌خواهیم کمیت دیگر (یعنی نیروی خالص) را معرفی کنیم.

فرض کنید شما در حال رانندگی با یک خودرو در یک مسیر مستقیم هستید. اگر بخواهید خودرو سریع‌تر برود (یعنی اندازه سرعتش زیاد شود) چه کار می‌کنید؟ دقیقاً پایتان را روی پدال گاز، بیشتر فشار می‌دهید. با این کار در جهت سرعت، به اتومبیل نیرو وارد می‌کنید. اما اگر بخواهید اندازه سرعت خودرو کم شود چه کار می‌کنید؟ این بار پایتان را روی پدال ترمز فشار می‌دهید. در واقع شما با این کار در خلاف جهت سرعت به اتومبیل نیرو وارد می‌کنید.



یعنی اگر بخواهید سرعت جسمی زیاد شود، باید مانند شکل (الف) در جهت حرکت به آن نیرو وارد کنید (هَلْ بدهید) و اگر بخواهید سرعت جسم کم شود، باید مانند شکل (ب) در خلاف جهت حرکت به آن نیرو وارد کنید.



حالا اگر بخواهید مسیر حرکت خودرو را تغییر بدهید، مثلاً دور یک میدان بچرخید فرمان خودرو را می چرخانید. با این کار نیرویی عمود بر مسیر حرکت به خودرو وارد می کنید. این نیرو بدون این که اندازه سرعت را تغییر بدهد، جهت آن را عوض می کند. خلاصه این که هر وقت بر جسم نیروی خالص وارد شود، بردار سرعت به یکی از شکل های زیر تغییر می کند و در نتیجه شتاب ایجاد می شود. یعنی هر جا نیروی خالص هست، شتاب و تغییرات سرعت هم هست.

اگر نیروی خالص در جهت حرکت (بردار سرعت) باشد \leftarrow اندازه سرعت زیاد می شود. (حرکت تندشونده)
 اگر نیروی خالص در خلاف جهت حرکت (بردار سرعت) باشد \leftarrow اندازه سرعت کم می شود. (حرکت کندشونده)
 اگر نیروی خالص عمود بر مسیر حرکت (بردار سرعت) باشد \leftarrow بردار سرعت تغییر جهت می دهد اما حرکت یکنواخت است.

نکته بردار سرعت (\vec{v}) همیشه در جهت حرکت و بردار شتاب (\vec{a}) همیشه در جهت بردار نیروی خالص (\vec{F}_{net}) است.

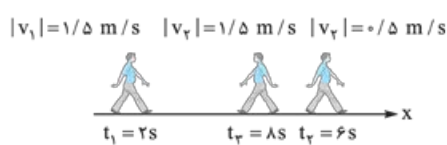
۱۹۵. گزینه ۳ برای محاسبه اندازه شتاب متوسط از رابطه $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ کمک می گیریم. در این رابطه فقط اندازه سرعت (تندی) متحرک در ابتدا و انتهای حرکت مهم است؛ بنابراین داریم: (تبدیل واحد سرعت هم یادتان نرود!)

$$v = 90 \text{ km/h} = 90 \div 3.6 \text{ m/s} = 25 \text{ m/s} \Rightarrow a_{av} = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{25 - 0}{5 - 0} = 5 \text{ m/s}^2$$

۱۹۶. گزینه ۳ بردار شتاب متوسط برابر با نسبت تغییرات سرعت به تغییرات زمان است:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{(-16\vec{j}) - (4\vec{j})}{4 - 0} = \frac{-20\vec{j}}{4} = (-5 \text{ m/s}^2)\vec{j}$$

۱۹۷. گزینه ۴ گام اول: به کمک شکل زیر بردار سرعت شخص را در هر لحظه، با توجه به اندازه سرعت و جهت حرکتش تعیین می کنیم:



$$|v_1| = 1/5 \text{ m/s} \quad |v_2| = 1/5 \text{ m/s} \quad |v_3| = 0/5 \text{ m/s} \quad t_1 = 2 \text{ s} \text{ , جهت حرکت مثبت: } \vec{v}_1 = (1/5 \text{ m/s})\vec{i}$$

$$t_2 = 4 \text{ s} \text{ , جهت حرکت مثبت: } \vec{v}_2 = (0/5 \text{ m/s})\vec{i}$$

$$t_3 = 6 \text{ s} \text{ , جهت حرکت منفی: } \vec{v}_3 = (-1/5 \text{ m/s})\vec{i}$$

گام دوم: شتاب متوسط را در دو بازه $(2 \text{ s}, 4 \text{ s})$ و $(4 \text{ s}, 6 \text{ s})$ به دست می آوریم:

$$\vec{v}_{av(2,-4)} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{-1/5\vec{i} - 1/5\vec{i}}{4 - 2} = \frac{-2\vec{i}}{2} = -\vec{i} \text{ (m/s}^2\text{)} \quad \vec{v}_{av(4,-6)} = \frac{\vec{v}_3 - \vec{v}_2}{t_3 - t_2} = \frac{-1/5\vec{i} - 0/5\vec{i}}{6 - 4} = \frac{-2\vec{i}}{2} = -\vec{i} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

۱۹۸. گزینه ۴ گام اول: ۲ ثانیه دوم یعنی بازه زمانی $(2 \text{ s}, 4 \text{ s})$. برای این که شتاب متوسط در این بازه را به دست آوریم باید سرعت لحظه ای در ابتدا و انتهای این بازه را تعیین کنیم. معادله سرعت - زمان برابر $v = 2t^2 - 4t - 2$ است؛ پس داریم:

$$t_1 = 2 \text{ s} \Rightarrow v_1 = 2(2)^2 - 4(2) - 2 = -2 \text{ m/s}, \quad t_2 = 4 \text{ s} \Rightarrow v_2 = 2(4)^2 - 4(4) - 2 = 14 \text{ m/s}$$

$$a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{14 - (-2)}{4 - 2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ m/s}^2 \quad \text{گام دوم: با توجه به این که شتاب متوسط از رابطه } a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ به دست می آید، داریم:}$$

۱۹۹. گزینه ۱ شتاب متوسط از رابطه $\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ به دست می آید. در $t = 0/2 \text{ s}$ تندی متحرک 8 m/s و متحرک در خلاف جهت محور x در حال حرکت است؛ بنابراین $\vec{v}_2 = (-8 \text{ m/s})\vec{i}$ است؛ با این حساب:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} \Rightarrow 24\vec{i} = \frac{-8\vec{i} - \vec{v}_1}{0.2 - 0} \Rightarrow 4/8\vec{i} = -8\vec{i} - \vec{v}_1 \Rightarrow \vec{v}_1 = -8\vec{i} - 4/8\vec{i} = -12/8\vec{i}$$

۲۰۰. گزینه ۲ گام اول: به کمک رابطه شتاب متوسط، بردار تغییر سرعت در بازه t_1 تا t_2 و t_2 تا t_3 را به دست می آوریم:

$$\vec{a}_{av(\Delta, 1^0)} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow -4\vec{i} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\frac{1^0 - \Delta}{\Delta}} \Rightarrow \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = -2^0\vec{i} \quad (1)$$

$$\vec{a}_{av(1^0, 12)} = \frac{\vec{v}_3 - \vec{v}_2}{t_3 - t_2} \Rightarrow 2\vec{i} = \frac{\vec{v}_3 - \vec{v}_2}{\frac{12 - 1^0}{2}} \Rightarrow \vec{v}_3 - \vec{v}_2 = 4\vec{i} \quad (2)$$

گام دوم: حالا از جمع رابطه (۱) و (۲)، اندازه بردار تغییر سرعت در بازه زمانی t_1 تا t_3 و بردار شتاب متوسط در این بازه را حساب می‌کنیم:

$$\xrightarrow{(1)+(2)} \vec{v}_3 - \vec{v}_1 = -16\vec{i} \Rightarrow \vec{a}_{av(\Delta, 12)} = \frac{-16\vec{i}}{12-5} = \frac{-16}{7}\vec{i} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

گام اول: به کمک رابطه شتاب متوسط، بردار تغییر سرعت در بازه t_1 تا t_3 و t_1 تا t_3 را به دست می‌آوریم:

$$\vec{a}_{av(e, 10)} = \frac{\vec{v}_3 - \vec{v}_1}{t_3 - t_1} \Rightarrow -2\vec{i} = \frac{\vec{v}_3 - \vec{v}_1}{10-0} \Rightarrow \vec{v}_3 - \vec{v}_1 = -20\vec{i} \quad (1)$$

$$\vec{a}_{av(e, 15)} = \frac{\vec{v}_3 - \vec{v}_1}{t_3 - t_1} \Rightarrow \frac{2}{3}\vec{i} = \frac{\vec{v}_3 - \vec{v}_1}{15-0} \Rightarrow \vec{v}_3 - \vec{v}_1 = 10\vec{i} \quad (2)$$

گام دوم: حالا با کم کردن رابطه (۱) از (۲)، بردار تغییر سرعت در بازه t_1 تا t_3 و بردار شتاب متوسط در این بازه را حساب می‌کنیم:

$$\xrightarrow{(2)-(1)} (\vec{v}_3 - \vec{v}_1) - (\vec{v}_3 - \vec{v}_1) = \vec{v}_3 - \vec{v}_3 = 10\vec{i} - (-20\vec{i}) = 30\vec{i}$$

$$\vec{a}_{av(10, 15)} = \frac{\vec{v}_3 - \vec{v}_3}{t_3 - t_3} = \frac{30\vec{i}}{15-10} = 6\vec{i}$$

گزینه ۴: شتاب متحرک وقتی صفر است که $\Delta v = 0$ باشد؛ یعنی $v = v_0$ ؛ از معادله واضح است که $v_0 = 6 \text{ m/s}$ است؛ پس سرعت متحرک در لحظه t' هم 6 m/s است؛ یعنی:

$$v' = v_0 = (6 \text{ m/s}) \vec{i}$$

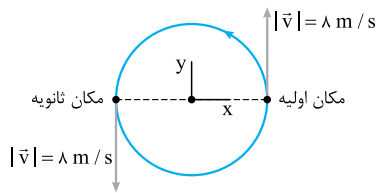
گزینه ۴: گام اول: وقتی متحرک در جهت محور X حرکت می‌کند علامت سرعت مثبت باشد؛ یعنی $v > 0$:

$$v = 32 - 2t' > 0 \Rightarrow 2(16 - t') > 0 \Rightarrow t' < 16 \Rightarrow -4 < t < 4 \text{ ————— زمان منفی نداریم}$$

گام دوم: حالا که بازه زمانی را پیدا کردیم، شتاب متوسط را در این بازه حساب می‌کنیم:

$$\vec{a}_{av(e, 4)} = \frac{\Delta \vec{v}_{(e, 4)}}{\Delta t_{(e, 4)}} = \frac{[32 - 2(4) - 32]\vec{i}}{4-0} = -8\vec{i}$$

گزینه ۲: گام اول: قبل از هر چیز، یک شکل می‌کشیم، ببینیم سوال چی گفته! متحرک نصف دایره را طی کرده است؛ پس حرکتش به صورت مقابل است:



$$\vec{v}_1 = 8\vec{j}, \vec{v}_2 = -8\vec{j}$$

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = -8\vec{j} - 8\vec{j} = -16\vec{j}$$

$$|a_{av}| = \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = \frac{16}{4} = 4 \text{ m/s}^2$$

گام سوم: در نهایت اندازه شتاب متوسط را حساب می‌کنیم:

گزینه ۱: گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. ۱ در بعضی از بازه‌های زمانی‌ای که بردار سرعت در ابتدا و انتهای آن بازه برابر است، شتاب متوسط صفر می‌شود. ✓

مثلاً در بازه (t_1, t_3) شتاب متوسط صفر است.

البته در بازه‌های زمانی دیگر شتاب صفر نیست مثل بازه‌های زمانی (t_1, t_3) .

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲ اگر شتاب ثابت باشد، شتاب متوسط همواره ثابت است، در حالی که در ۱ دیدیم در بعضی از بازه‌های زمانی شتاب صفر می‌شود و در بازه‌های زمانی دیگر شتاب صفر نیست. ✗

۳ نه! به طور مثال فرض کنید $\Delta t = t_3 - t_1$ یا $\Delta t' = t_3 - t_3$ یکسان باشد، شتاب متوسط متحرک در بازه (t_1, t_3) صفر است اما شتاب متوسط در بازه (t_1, t_3) صفر نیست. ✗

۴ همان‌طور که در شکل می‌بینید، بردار سرعت همواره در حال تغییر جهت است؛ پس شتاب حرکت صفر نیست. ✗

گزینه ۱: چون تندی حرکت ثابت است، اندازه سرعت در تمام لحظات ثابت است و بردارهای سرعت به صورت شکل روبه‌رو می‌شوند.

از آن‌جا که شتاب متوسط در هر بازه برابر با $\frac{\vec{v}_{\text{اولیه}} - \vec{v}_{\text{نهایی}}}{\Delta t}$ است، تنها در بازه‌هایی، شتاب متوسط صفر است که

نهایی $\vec{v} = \vec{v}_{\text{اولیه}}$ باشد. این اتفاق فقط در بازه زمانی اشاره شده در ۱ یعنی (t_1, t_3) می‌افتد.

گزینه ۱: صورت شکل روبه‌رو می‌شوند.

از آن‌جا که شتاب متوسط در هر بازه برابر با $\frac{\vec{v}_{\text{اولیه}} - \vec{v}_{\text{نهایی}}}{\Delta t}$ است، تنها در بازه‌هایی، شتاب متوسط صفر است که

نهایی $\vec{v} = \vec{v}_{\text{اولیه}}$ باشد. این اتفاق فقط در بازه زمانی اشاره شده در ۱ یعنی (t_1, t_3) می‌افتد.

نهایی $\vec{v} = \vec{v}_{\text{اولیه}}$ باشد. این اتفاق فقط در بازه زمانی اشاره شده در ۱ یعنی (t_1, t_3) می‌افتد.

نهایی $\vec{v} = \vec{v}_{\text{اولیه}}$ باشد. این اتفاق فقط در بازه زمانی اشاره شده در ۱ یعنی (t_1, t_3) می‌افتد.

نهایی $\vec{v} = \vec{v}_{\text{اولیه}}$ باشد. این اتفاق فقط در بازه زمانی اشاره شده در ۱ یعنی (t_1, t_3) می‌افتد.

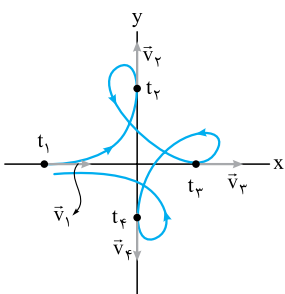
نهایی $\vec{v} = \vec{v}_{\text{اولیه}}$ باشد. این اتفاق فقط در بازه زمانی اشاره شده در ۱ یعنی (t_1, t_3) می‌افتد.

نهایی $\vec{v} = \vec{v}_{\text{اولیه}}$ باشد. این اتفاق فقط در بازه زمانی اشاره شده در ۱ یعنی (t_1, t_3) می‌افتد.

نهایی $\vec{v} = \vec{v}_{\text{اولیه}}$ باشد. این اتفاق فقط در بازه زمانی اشاره شده در ۱ یعنی (t_1, t_3) می‌افتد.

نهایی $\vec{v} = \vec{v}_{\text{اولیه}}$ باشد. این اتفاق فقط در بازه زمانی اشاره شده در ۱ یعنی (t_1, t_3) می‌افتد.

نهایی $\vec{v} = \vec{v}_{\text{اولیه}}$ باشد. این اتفاق فقط در بازه زمانی اشاره شده در ۱ یعنی (t_1, t_3) می‌افتد.

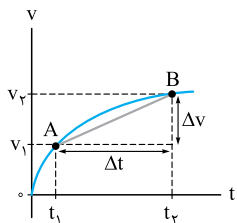


شتاب در نمودارهای سرعت-زمان و مکان-زمان

درس نهم



بررسی شتاب متوسط در نمودار سرعت-زمان

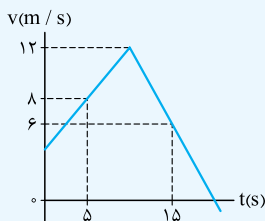


شکل روبه‌رو نمودار سرعت-زمان متحرکی است که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند. در این شکل دو نقطه A و B واقع بر نمودار سرعت-زمان را با یک خط به هم وصل کرده‌ایم. شیب این خط برابر می‌شود با:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{شیب خط AB} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow \text{شیب خط AB} = a_{av}(t_1, t_2)$$

بنابراین شیب خط AB برابر با شتاب متوسط در بازه (t_1, t_2) است، پس می‌توانیم بگوییم: «شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار سرعت-زمان بیانگر شتاب متوسط در بازه زمانی محدود بین آن دو نقطه است.»

آزمون | نمودار سرعت-زمان متحرکی که بر روی محور X حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. در بازه زمانی ۵ s تا ۱۵ s شتاب متوسط این



متحرک چند متر بر مربع ثانیه است و جهت حرکت متحرک در این بازه زمانی کدام است؟

- (۱) $-۰/۸$ ، در جهت منفی
- (۲) $-۰/۲$ ، در جهت منفی
- (۳) $-۰/۸$ ، در جهت مثبت
- (۴) $-۰/۲$ ، در جهت مثبت

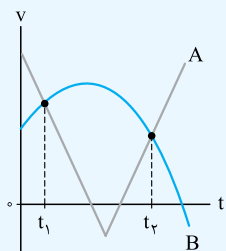
پاسخ | گام اول: شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار در بازه ۵ s تا ۱۵ s برابر با شتاب متوسط در این بازه است:

$$a_{av(5,15)} = \frac{6-8}{15-5} = \frac{-2}{10} = -۰/۲ \text{ m/s}^2$$

گام دوم: در بازه ۵ s تا ۱۵ s نمودار سرعت-زمان بالای محور t قرار دارد، پس در همه لحظه‌های این بازه زمانی، متحرک در جهت مثبت محور X حرکت کرده است.

آزمون | نمودار سرعت-زمان دو متحرک A و B، مطابق شکل روبه‌رو است. اگر بزرگی شتاب متوسط آن‌ها از لحظه t_1

تا t_2 به ترتیب $a_{av,A}$ و $a_{av,B}$ باشد، کدام گزینه درباره این دو متحرک در بازه زمانی t_1 تا t_2 درست است؟



- (۱) $a_{av,A} < a_{av,B}$ و هر دو متحرک، یک بار تغییر جهت داده‌اند.
- (۲) $a_{av,A} = a_{av,B}$ و متحرک A، دو بار تغییر جهت داده است.
- (۳) $a_{av,A} < a_{av,B}$ و متحرک A، دو بار تغییر جهت داده است.
- (۴) $a_{av,A} = a_{av,B}$ و هر دو متحرک یک بار تغییر جهت داده‌اند.

پاسخ | گام اول: در لحظه‌های t_1 و t_2 دو نمودار در دو نقطه M و N یکدیگر را قطع کرده‌اند، پس شیب خط واصل بین این دو نقطه (خط MN) برابر شتاب متوسط هر دو متحرک در این بازه زمانی است:

$$\text{شیب خط MN} = a_{av,A} = a_{av,B}$$

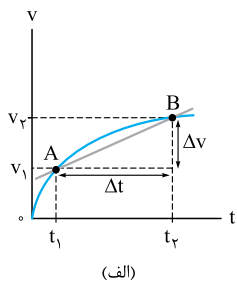
گام دوم: در بازه زمانی t_1 تا t_2 نمودار متحرک A در دو نقطه محور t را قطع کرده، یعنی دو بار علامت سرعت این متحرک تغییر کرده و این متحرک، دو بار تغییر جهت داده است، اما متحرک B در این بازه زمانی تغییر جهتی نداشته است. چون در (t_1, t_2) نمودارش محور t را قطع نکرده است.

شتاب لحظه‌ای

به شتاب متحرک در هر لحظه از زمان، شتاب لحظه‌ای می‌گوییم. بردار شتاب لحظه‌ای را با \vec{a} و مقدار آن را با a نشان می‌دهیم. هر جا واژه «شتاب» به تنهایی بیاید، منظور شتاب لحظه‌ای است.

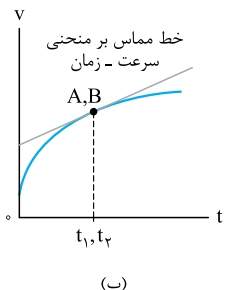
• بردار \vec{a} همیشه هم‌علامت با بردار نیروی خالص وارد بر جسم (\vec{F}_{net}) است. در واقع جهت شتاب، همواره هم‌سو با جهت نیروی خالص است.

نمایش شتاب لحظه‌ای در نمودار سرعت - زمان



دیدید که شیب خطی که دو نقطه از منحنی $v - t$ را به هم وصل می‌کند، برابر با شتاب متوسط در بازه زمانی متناظر با آن دو نقطه است. مثلاً در شکل (الف)، شیب خط AB برابر با شتاب متوسط در بازه t_1 تا t_2 است؛ به این صورت:

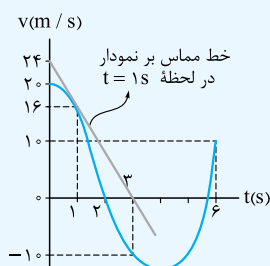
$$\text{شیب خط } AB = a_{av}(t_1, t_2) = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$



حالا t_1 و t_2 را به هم نزدیک می‌کنیم تا Δt کوچک و نقطه‌های A و B به هم نزدیک شوند و این کار را آن قدر ادامه می‌دهیم تا t_1 و t_2 در کنار هم قرار گیرند و Δt یک لحظه شود. حالا اگر مانند شکل (ب)، AB را امتداد دهیم، خطی مماس بر منحنی سرعت - زمان خواهد شد. شیب این خط برابر با شتاب لحظه‌ای است.

شتاب لحظه‌ای = شیب خط مماس بر منحنی $v - t$

آزمون ۱ متحرکی بر روی محور x حرکت می‌کند و نمودار سرعت - زمان آن مطابق شکل زیر است. نسبت شتاب متوسط متحرک در ۳ ثانیه دوم حرکت، به شتاب متحرک در لحظه $t = 1s$ کدام است؟



- (۱) $\frac{5}{12}$
- (۲) $-\frac{5}{12}$
- (۳) $\frac{5}{6}$
- (۴) $-\frac{5}{6}$

پاسخ ۱ گام اول: باید شیب خط وصل بین دو نقطه از نمودار در لحظه ۳s و ۶s را حساب کنیم. $a_{av}(3,6) = \frac{v_6 - v_3}{6 - 3} = \frac{10 - (-10)}{3} = \frac{20}{3} \text{ m/s}^2$

گام دوم: حالا باید شیب خط مماس در لحظه $t = 1s$ را به دست بیاوریم. خط مماس بر نمودار در لحظه $t = 1s$ از مختصات $(0, 24)$ و $(3, 0)$ گذشته است.

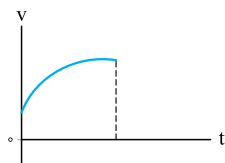
$$a_1 = \frac{0 - 24}{3 - 0} = -8 \text{ m/s}^2$$

پس داریم:

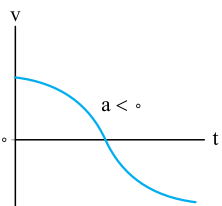
$$\frac{a_{av}(3,6)}{a_1} = \frac{\frac{20}{3}}{-8} = -\frac{5}{6}$$

گام سوم: نسبت $a_{av}(3,6)$ به a_1 را می‌خواهیم:

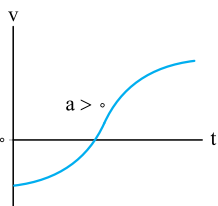
چند نکته ۱ واضح است که هر چه شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان بیشتر باشد، اندازه شتاب بیشتر است. (مثلاً تو شکل روبه‌رو، هرچی زمان می‌گذره، شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان و در نتیجه اندازه شتاب کم می‌شه.)



(پ)



(ب)



(الف)

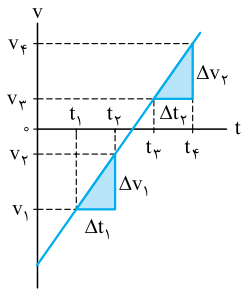
۲ با توجه به این‌که شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان برابر شتاب لحظه‌ای است، علامت و جهت شتاب سه حالت می‌تواند داشته باشد:

الف اگر نمودار سرعت - زمان صعودی باشد، علامت و جهت شتاب، مثبت است. (شکل (الف))

ب اگر نمودار سرعت - زمان نزولی باشد، علامت و جهت شتاب، منفی است. (شکل (ب))

پ اگر نمودار سرعت - زمان افقی باشد (شیب آن صفر باشد)، شتاب صفر است. (شکل (پ))

منفی یا مثبت بودن شتاب بیانگر جهت نیروی خالص وارد بر جسم هم است.

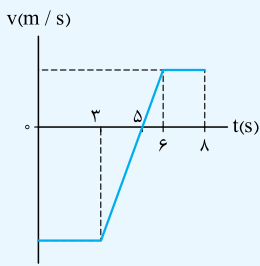


با علامت شتاب نمی‌توانیم جهت حرکت رو مشخص کنیم (جهت حرکت رو فقط با علامت سرعت یا جابه‌جایی تعیین می‌کنیم).

۳ اگر نمودار سرعت - زمان متحرکی یک خط راست باشد (مثل شکل روبه‌رو)، شیب نمودار چه در بازه زمانی دلخواه Δt و چه در لحظه دلخواه t یکسان است؛ بنابراین می‌توانیم بگوییم در این صورت شتاب در هر لحظه برابر با شتاب متوسط در هر بازه زمانی دلخواه است:

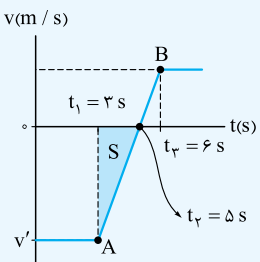
$$a_{\text{لحظه‌ای}} = a_{\text{av}} \Rightarrow a_{\text{لحظه‌ای}} = \frac{\Delta v_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2}$$

حالا به تستی رو ببینید که چندتا نکته قبل رو با هم داشته باشه:



تست ۱ شکل روبه‌رو نمودار سرعت - زمان متحرکی است که بر روی محور x حرکت می‌کند. اگر شتاب متحرک در لحظه $t = 5/5$ برابر 8 m/s^2 باشد، در بازه زمانی که حرکت گذشونده است، بردار سرعت متوسط متحرک برحسب متر بر ثانیه کدام است؟

- ۱) $8 \vec{i}$
- ۲) $-8 \vec{i}$
- ۳) $16 \vec{i}$
- ۴) $-16 \vec{i}$



پاسخ ۲ گام اول: با توجه به نمودار روبه‌رو از لحظه $t_1 = 3 \text{ s}$ تا $t_2 = 6 \text{ s}$ نمودار یک خط راست است (خط AB)؛ پس شتاب متحرک در هر لحظه دلخواه در بازه زمانی 3 s تا 6 s برابر با شتاب متوسط در هر بازه زمانی دلخواه در این محدوده زمانی است؛ پس می‌توانیم بگوییم شتاب متوسط در بازه $t_1 = 3 \text{ s}$ تا $t_2 = 5 \text{ s}$ هم برابر شتاب در لحظه $t = 5/5$ است.

گام دوم: در بازه $t_1 = 3 \text{ s}$ تا $t_2 = 5 \text{ s}$ نمودار سرعت - زمان در حال نزدیک شدن به محور t است؛ پس در این بازه زمانی، حرکت گذشونده است. ما باید سرعت متوسط در این بازه زمانی را حساب کنیم.

اندازه جابه‌جایی متحرک در بازه زمانی 3 s تا 5 s برابر مساحت مثلث S (در شکل بالا) است:

$$S = \frac{(t_2 - t_1) \times |v'|}{2} = \frac{(5 - 3) \times 16}{2} = 16 \quad \text{چون نمودار در این مدت زیر محور t است، جابه‌جایی منفی است.} \rightarrow \Delta x_{(3,5)} = -16 \text{ m}$$

$$v_{\text{av}(3,5)} = \frac{\Delta x_{(3,5)}}{\Delta t} = \frac{-16}{5-3} = -8 \text{ m/s} \Rightarrow \vec{v}_{\text{av}(3,5)} = -8 \vec{i}$$

گام سوم: حالا می‌توانیم سرعت متوسط را هم حساب کنیم.

تکنیک چون نمودار سرعت زمان در بازه 3 s تا 5 s با محور t تشکیل یک مثلث را می‌دهد، می‌توانیم از تکنیک مثلث، سرعت متوسط را حساب کنیم:

$$v_{\text{av}} = \frac{v'}{2} = \frac{-16}{2} = -8 \text{ m/s}$$

تشخیص تندشونده یا کندشونده بودن حرکت با علامت شتاب و سرعت

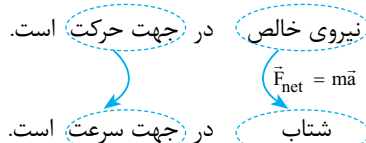
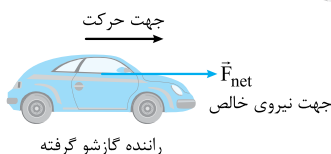
این‌جا می‌خواهیم تندشونده و کندشونده بودن حرکت را با توجه به نیروی خالص وارد بر جسم بگوییم تا درک عمیق‌تری از این موضوع پیدا کنید. اگر بدانیم جهت شتاب همان جهت نیروی خالص وارد بر جسم و جهت سرعت همان جهت حرکت است، به کمک جهت نیروی خالص و جهت حرکت به راحتی می‌توانیم تندشونده یا کندشونده بودن حرکت را تشخیص دهیم:

الف اگر شتاب و سرعت هم‌علامت باشند (هر دو مثبت یا هر دو منفی) یعنی جهت نیروی خالص وارد بر جسم در جهت حرکت جسم است؛ بنابراین نوع حرکت تندشونده است (مثل هالیتی که پاروی پدال گاز می‌ذاریم تا ماشین تندتر بره) این موضوع را می‌توانیم با زبان ریاضی هم بنویسیم:

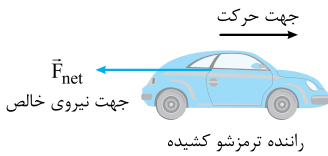
$$a v > 0 \Rightarrow \text{حرکت تندشونده} \Rightarrow \text{نیروی خالص در جهت حرکت}$$

ب اگر علامت شتاب و سرعت مخالف هم باشند (یکی مثبت و دیگری منفی) یعنی جهت نیروی خالص وارد بر جسم در خلاف جهت حرکت بوده و نوع حرکت کندشونده است. (مثل وقتی که پاروی پدال ترمز می‌ذاریم تا ماشین کندتر بره.) در این صورت داریم:

$$a v < 0 \Rightarrow \text{حرکت کندشونده} \Rightarrow \text{نیروی خالص در خلاف جهت حرکت}$$



۱ حرکت این اتومبیل تندشونده است، زیرا:

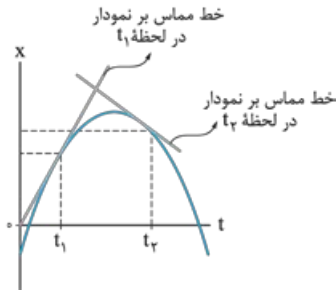


نیروی خالص $\vec{F}_{net} = m\vec{a}$ در خلاف جهت حرکت است.
شتاب در خلاف جهت سرعت است.

۲ حرکت این اتومبیل کندشونده است، زیرا:

شتاب در نمودار مکان-زمان

الف. شتاب متوسط در نمودار مکان-زمان

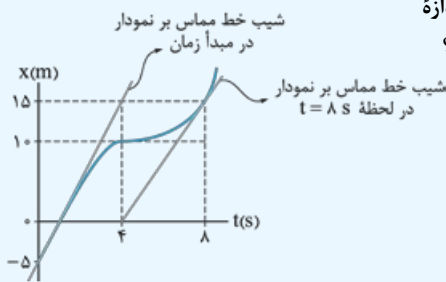


برای محاسبه شتاب متوسط دو کمیت لازم داریم: یکی Δv و دیگری Δt . در نمودار مکان-زمان، v در هر لحظه برابر شیب خط مماس در آن لحظه است. پس اگر شیب خط مماس بر نمودار مکان-زمان در دو لحظه t_1 و t_2 را داشته باشیم، به راحتی می‌توانیم شتاب متوسط در بازه t_1 تا t_2 را حساب کنیم. مثلاً برای شکل روبه‌رو داریم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\text{شیب خط مماس بر نمودار در لحظه } t_2 - \text{شیب خط مماس بر نمودار در لحظه } t_1}{t_2 - t_1}$$

۳ تست | شکل روبه‌رو، نمودار مکان-زمان متحرکی است که بر روی محور x حرکت می‌کند. اندازه

شتاب متوسط این متحرک در ۴ ثانیه دوم چند برابر اندازه شتاب متوسط آن در ۴ ثانیه اول است؟



- ۱ (۱)
- ۱/۴ (۲)
- ۱/۲ (۳)
- ۳/۴ (۴)

۴ پاسخ | گام اول: برای محاسبه شتاب متوسط در ۴ ثانیه اول باید سرعت در لحظه‌های $t_0 = 0$ و $t_1 = 4$ s را بدانیم. شیب خط مماس بر نمودار مکان-زمان در این لحظه‌ها را می‌نویسیم. بعد شتاب متوسط در ۴ ثانیه اول را به دست می‌آوریم.

$$v_0 = 0 = \text{شیب خط مماس بر نمودار مکان-زمان در مبدأ زمان} = \frac{15 - (-5)}{4 - 0} = 5 \text{ m/s}$$

$$a_{av(0,4)} = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{0 - 5}{4 - 0} = -\frac{5}{4} \text{ m/s}^2$$

گام دوم: به همین ترتیب که شتاب متوسط در ۴ ثانیه اول را حساب کردیم، شتاب متوسط در ۴ ثانیه دوم (یعنی بازه ۴ s تا ۸ s) را هم حساب می‌کنیم:

$$v_2 = 15 = \text{شیب خط مماس بر نمودار مکان-زمان در لحظه } t_2 = 8 \text{ s} = \frac{15 - 0}{8 - 4} = \frac{15}{4} \text{ m/s}$$

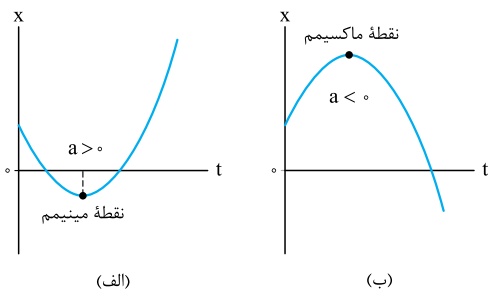
$$v_1 = 0 = \text{شیب خط مماس بر نمودار مکان-زمان در لحظه } t_1 = 4 \text{ s}$$

$$a_{av(4,8)} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{15}{4} - 0}{8 - 4} = \frac{\frac{15}{4}}{4} = \frac{15}{16} \text{ m/s}^2$$

$$\frac{|a_{av(4,8)}|}{|a_{av(0,4)}|} = \frac{\frac{15}{16}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{4}$$

گام سوم: نسبت اندازه شتاب در ۴ ثانیه دوم به ۴ ثانیه اول را می‌خواهیم:

ب. علامت شتاب لحظه‌ای در نمودار مکان-زمان



به کمک نمودار مکان-زمان به راحتی می‌توانیم، علامت یا جهت شتاب حرکت را تشخیص بدهیم. اگر نمودار مکان-زمان مانند شکل (الف)، نقطه مینیمم (کمینه) داشته باشد، علامت شتاب حرکت مثبت است. در این حالت گودی (تقعر) نمودار رو به بالا است.

اگر نمودار مکان-زمان مانند شکل (ب)، نقطه ماکسیمم (بیشینه) داشته باشد، علامت شتاب منفی است. در این حالت گودی (تقعر) نمودار رو به پایین است.

۵ یادآوری | جهت نیروی خالص همیشه در جهت شتاب است. پس در شکل (الف) نیروی خالص در جهت مثبت و در شکل (ب) نیروی خالص در جهت منفی است.

۱- نمودارهایی که جهت گودی آن تغییر می‌کند، مانند معادلات درجه ۳ و بیشتر، از حد کتاب درسی و کنکور سراسری فراتر است.

تشخیص تندشونده و کندشونده بودن حرکت در نمودار مکان-زمان

در نمودارهای مکان - زمان زیر به چیزهایی که می‌گوییم، دقت کنید:

الف) به طرف چپ نقطه اکسترمم نگاه کنید:

در هر دو نمودار هر چه از سمت چپ به نقطه اکسترمم (ماکسیمم یا مینیمم) نزدیک می‌شویم، اندازه شیب خط مماس بر نمودار کم می‌شود. یعنی از سمت چپ با نزدیک شدن به نقطه اکسترمم تندی **کاهش** می‌یابد و حرکت **کندشونده** است. این طوری هم می‌شود گفت که در طرف چپ نقطه اکسترمم، علامت سرعت و شتاب مخالف هم است. پس داریم:

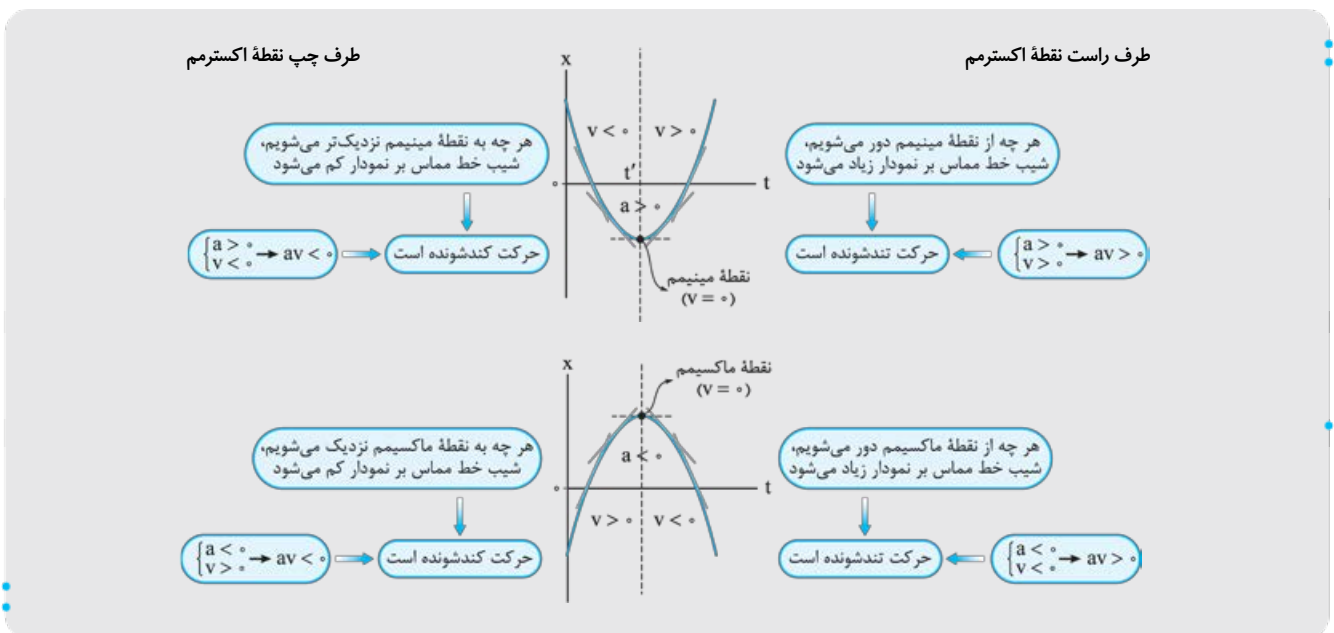
$$av < 0 \Rightarrow \text{حرکت کندشونده}$$

ب) حالا به طرف راست نقطه اکسترمم نگاه کنید:

در هر دو نمودار هر چه در طرف راست نقطه اکسترمم از آن دور می‌شویم، اندازه شیب خط مماس بر نمودار **زیاد** می‌شود. یعنی با دور شدن از نقطه اکسترمم از سمت راست، تندی **زیاد** می‌شود و حرکت **تندشونده** است.

به این صورت هم می‌توانید بگویید که در طرف راست نقطه اکسترمم، سرعت و شتاب هم‌علامت‌اند. یعنی:

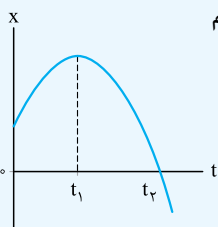
$$av > 0 \Rightarrow \text{حرکت تندشونده}$$



خلاصه این‌که:

در نمودار مکان - زمان همواره قبل از نقطه کمینه یا بیشینه حرکت کندشونده است و بعد از نقطه کمینه یا بیشینه، حرکت تندشونده است.^۱

آزمون ۱۴ نمودار مکان - زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، یک سهمی مطابق شکل روبه‌رو است. کدام



گزینه درباره حرکت این متحرک نادرست است؟

- ۱) جهت نیروی خالص وارد بر جسم در تمام لحظه‌ها در خلاف جهت محور X است.
- ۲) حرکت متحرک از لحظه t_2 به بعد تندشونده است.
- ۳) علامت تغییرات سرعت در هر بازه زمانی دلخواه منفی است.
- ۴) بردار شتاب حرکت در لحظه t_1 از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد.

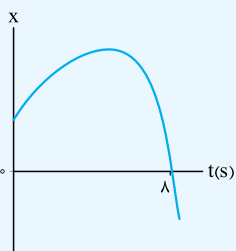
پاسخ ۱۴

همین‌طور که می‌بینید نمودار نقطه بیشینه دارد و جهت گودی‌اش به سمت پایین است؛ پس جهت شتاب و نیروی خالص وارد بر جسم در تمام لحظه‌ها در خلاف جهت محور X (در جهت منفی) است. یعنی عبارت **۱** درست است و عبارت **۴** که می‌گوید بردار شتاب در لحظه t_1 تغییر علامت می‌دهد، نادرست است.

عبارت **۳** هم درست است، چون تغییرات سرعت همیشه هم‌جهت با شتاب متوسط است و در این‌جا با توجه به منفی بودن علامت شتاب در تمام لحظه‌ها، شتاب متوسط و در نتیجه تغییرات سرعت، در هر بازه زمانی دلخواه هم منفی است.

و اما عبارت **۲** گفتیم نوع حرکت قبل از نقطه اکسترمم کندشونده و بعد از آن تندشونده است، پس در بازه صفر تا t_1 حرکت کندشونده و از t_1 به بعد حرکت تندشونده است.

۱- این‌که از چه مدت قبل از نقطه اکسترمم حرکت کندشونده و تا چه مدت بعد از اکسترمم حرکت تندشونده است، از محدوده کتاب درسی و کنکور سراسری خارج است.



تست ۱۳ شکل روبه‌رو نمودار مکان - زمان متحرکی است که بر روی محور X حرکت می‌کند. تندی این متحرک در لحظه‌ای که بردار مکان متحرک صفر می‌شود، 14 m/s است. اگر به مدت 5 s ، حرکت کندشونده با شتاب متوسط -2 m/s^2 باشد، شتاب متوسط آن در 8 ثانیه اول حرکت بر حسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2} \vec{i}$ (۲) $-\frac{1}{2} \vec{i}$

(۳) $3 \vec{i}$ (۴) $-3 \vec{i}$

پاسخ ۱۴ گام اول: حرکت متحرک از مبدأ زمان تا نقطه بیشینه، کندشونده است. پس با توجه به این که حرکت کندشونده 5 s طول می‌کشد، نمودار در $t = 5 \text{ s}$ بیشینه و سرعت در این لحظه صفر است (شکل روبه‌رو). با داشتن شتاب متوسط متحرک در 5 ثانیه اول، می‌توانیم سرعت اولیه را حساب کنیم:

$$a_{av(0,5)} = \frac{v_5 - v_0}{t_5 - t_0} \Rightarrow -2 = \frac{0 - v_0}{5 - 0} \Rightarrow v_0 = 10 \text{ m/s}$$

گام دوم: بردار مکان متحرک در لحظه $t = 8 \text{ s}$ صفر می‌شود و طبق صورت تست در این لحظه تندی 14 m/s است.

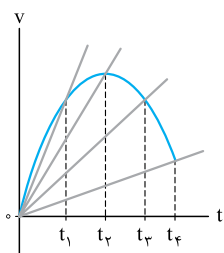
در لحظه $t = 8 \text{ s}$ شیب نمودار منفی است. $\rightarrow v_8 = -14 \text{ m/s}$

گام سوم: حالا می‌توانیم شتاب متوسط متحرک در 8 ثانیه اول را حساب کنیم: $\vec{a}_{av(0,8)} = (-3 \text{ m/s}^2) \vec{i}$

$$a_{av(0,8)} = \frac{v_8 - v_0}{t_8 - t_0} = \frac{-14 - 10}{8 - 0} = \frac{-24}{8} \Rightarrow \vec{a}_{av(0,8)} = (-3 \text{ m/s}^2) \vec{i}$$

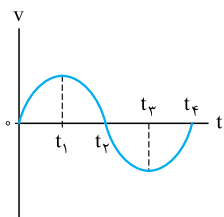
هر چیزی را که درباره تندی یا کندشونده بودن حرکت متحرک باید بدانید در جدول زیر آورده‌ایم:

نوع حرکت	علامت شتاب و سرعت	جهت نیرو و حرکت	وضعیت در نمودار سرعت - زمان	وضعیت در نمودار مکان - زمان
تندشونده	$av > 0$	نیرو در جهت حرکت یا در جهت سرعت	نمودار سرعت - زمان در حال دور شدن از محور t	نمودار مکان - زمان در حال دور شدن از نقطه اکسترمم (طرف راست اکسترمم)
کندشونده	$av < 0$	نیرو در خلاف جهت حرکت یا نیرو در خلاف جهت سرعت	نمودار سرعت - زمان در حال نزدیک شدن به محور t	نمودار مکان - زمان در حال نزدیک شدن به نقطه اکسترمم (طرف چپ اکسترمم)



۲۰۷. گزینه ۱ در درس‌نامه گفتیم که شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار سرعت - زمان بیانگر شتاب متوسط در بازه زمانی محدود بین آن دو نقطه است؛ بنابراین هر چه شیب خط عبوری از دو نقطه بیشتر باشد، شتاب متوسط در آن بازه زمانی هم بزرگ‌تر است.

مطابق شکل در بازه زمانی $(0, t_1)$ شیب خط واصل بین دو نقطه بیشتر از حالت‌های دیگر است؛ بنابراین در بازه زمانی $(0, t_1)$ شتاب متوسط متحرک بزرگ‌تر است.



۲۰۸. گزینه ۲ هر جا که نمودار سرعت - زمان نزولی باشد، علامت و جهت شتاب متوسط منفی خواهد بود. در نمودار سرعت - زمان روبه‌رو، نمودار در بازه (t_1, t_3) نزولی است؛ پس در همین بازه شتاب متوسط متحرک در خلاف جهت محور X است.

۲۰۹. گزینه ۴ ابتدا اندازه شتاب متوسط در 4 ثانیه دوم یعنی بازه $(4 \text{ s}, 8 \text{ s})$ را به دست می‌آوریم:

$$a_{av(4,8)} = \frac{v_8 - v_4}{t_8 - t_4} = \frac{12 - 0}{4} = 3 \text{ m/s}^2$$

۱ $a_{av(2,8)} = \frac{v(8) - v(2)}{t_8 - t_2} = \frac{12 - (-6)}{8 - 2} = \frac{18}{6} = 3 \text{ m/s}^2 \checkmark$

۲ $a_{av(2,4)} = \frac{v(4) - v(2)}{t_4 - t_2} = \frac{0 - (-6)}{4 - 2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ m/s}^2 \checkmark$

حالا گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم:



۳ $a_{av(0,2)} = \frac{v_2 - v_0}{t_2 - t_0} = \frac{-2 - (7)}{2} = \frac{-9}{2} = -4.5 \text{ m/s}^2 \Rightarrow |a_{(0,2)}| = 4.5 \text{ m/s}^2 \checkmark$

۴ $a_{av(0,8)} = \frac{v_8 - v_0}{t_8 - t_0} = \frac{12 - 7}{8 - 0} = \frac{5}{8} \text{ m/s}^2 \times$

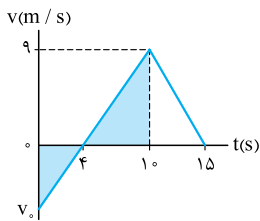
۲۱۰. گزینه ۴ با توجه به رابطه $|\bar{a}_{av}| = \frac{|\Delta v|}{\Delta t}$ ، بزرگی شتاب در هر گزینه را مقایسه و بررسی می‌کنیم:

۱ $(\frac{T}{2} \text{ تا } \frac{T}{4}) : |a_{av}| = \frac{|-v_m - 0|}{\frac{T}{2} - \frac{T}{4}} = \frac{v_m}{\frac{T}{4}} = 4 \frac{v_m}{T} \checkmark$, $(\frac{3T}{4} \text{ تا } \frac{T}{2}) : |a_{av}| = \frac{|0 - (-v_m)|}{\frac{3T}{4} - \frac{T}{2}} = \frac{v_m}{\frac{T}{4}} = 4 \frac{v_m}{T} \checkmark$

۲ $(\frac{3T}{4} \text{ تا } \frac{T}{4}) : |a_{av}| = \frac{0 - 0}{\frac{3T}{4} - \frac{T}{4}} = 0$, $(T \text{ تا } 0) : |a_{av}| = \frac{v_m - (-v_m)}{T - 0} = 2 \frac{v_m}{T} \checkmark$

۳ $(\frac{T}{2} \text{ تا } 0) : |a_{av}| = \frac{|-v_m - v_m|}{\frac{T}{2} - 0} = 4 \frac{v_m}{T}$, $(T \text{ تا } \frac{T}{2}) : |a_{av}| = \frac{v_m - (-v_m)}{T - \frac{T}{2}} = 4 \frac{v_m}{T} \checkmark$

۴ $(\frac{T}{2} \text{ تا } 0) : |a_{av}| = 4 \frac{v_m}{T}$ (در ۳ حساب کردیم) , $(\frac{3T}{4} \text{ تا } \frac{T}{4}) : |a_{av}| = 0$ (در ۲ حساب کردیم) \times

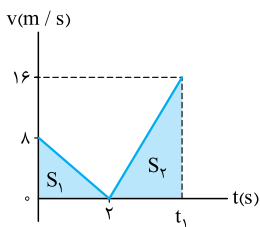


۲۱۱. گزینه ۱ گام اول: به کمک تشابه مثلث‌ها، مقدار سرعت اولیه را به دست می‌آوریم. دو مثلث رنگی با هم متشابه‌اند:

پس داریم: $\frac{|v_0|}{9} = \frac{4}{10-4} \Rightarrow \frac{|v_0|}{9} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow |v_0| = 6 \text{ m/s} \xrightarrow{v_0 \text{ زیر محور است}} v_0 = -6 \text{ m/s}$

گام دوم: شتاب متوسط را با استفاده از رابطه $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ محاسبه می‌کنیم:

$a_{av(0,15)} = \frac{0 - (-6)}{15 - 0} = \frac{6}{15} = 0.4 \text{ m/s}^2$



۲۱۲. گزینه ۲ گام اول: با توجه به نمودار روبه‌رو تغییرات سرعت برابر با $\Delta v = 16 - 8 = 8 \text{ m/s}$ است. از طرفی تغییرات

$a_{av(0,t_1)} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow 2 = \frac{8}{t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{8}{2} = 4 \text{ s}$

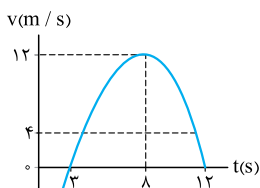
زمان برابر $t_1 - 0 = t_1 = 4 \text{ s}$ است؛ پس:

گام دوم: حالا جابه‌جایی را به دست می‌آوریم. همان‌طور که می‌دانید اندازه جابه‌جایی برابر با مساحت زیر نمودار $v - t$ است. پس:

$\Delta x = S_1 + S_2 = \frac{8 \times 2}{2} + \frac{16 \times (t_1 - 2)}{2} \xrightarrow{t_1=4 \text{ s}} \Delta x = 8 + \frac{16 \times (4 - 2)}{2} = 8 + 16 = 24 \text{ m}$

گام سوم: به کمک $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ پرونده این تست را می‌بندیم:

$v_{av} = \frac{24}{4 - 0} = \frac{24}{4} = 6 \text{ m/s}$



۲۱۳. گزینه ۱ گام اول: در بازه صفر تا ۳ s نمودار سرعت - زمان زیر محور t است و در این مدت علامت سرعت منفی بوده

و متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کرده است. اندازه شتاب متوسط در این بازه برابر است با:

$a_{av(0,3)} = \frac{v_3 - v_0}{\Delta t_{(0,3)}} = \frac{0 - (-12)}{3 - 0} = 4 \text{ m/s}^2$

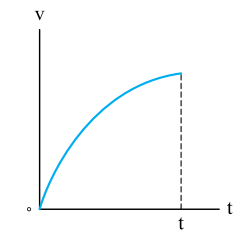
گام دوم: در بازه ۳ s تا ۸ s نمودار سرعت - زمان در حال دور شدن از محور t است و پس در این مدت تندی در حال افزایش و حرکت

تندشونده است. اندازه شتاب متوسط در این بازه را هم حساب می‌کنیم:

$a_{av(3,8)} = \frac{v_8 - v_3}{\Delta t_{(3,8)}} = \frac{12 - 0}{8 - 3} = \frac{12}{5} \text{ m/s}^2$

گام سوم: حالا نسبت اندازه‌های دو شتاب را به دست می‌آوریم:

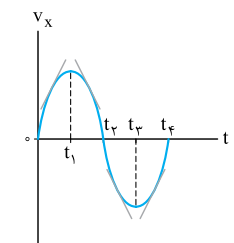
$\frac{a_{av(0,3)}}{a_{av(3,8)}} = \frac{4}{\frac{12}{5}} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$



۲۱۴. گزینه ۴ اگر به نمودار روبه‌رو دقت کنید، می‌بینید که در هر لحظه نمودار سرعت - زمان در حال دور شدن از محور t

است، پس اندازه سرعت در حال افزایش است و در نتیجه حرکت تندشونده است. از طرفی چون نمودار سرعت - زمان یک خط راست

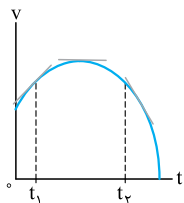
نیست (منحنی است) و شیب نمودار در هر لحظه تغییر می‌کند، شتاب متغیر است.



۲۱۵. گزینه ۱ باید به دنبال ناحیه‌ای بگردیم که شیب نمودار $v - t$ مثبت باشد. این ناحیه با توجه به شکل روبه‌رو از صفر تا

t_1 و از t_3 تا t_4 است. در گزینه‌ها، بازه زمانی t_3 تا t_4 را می‌بینیم.

۲۱۶. گزینه ۴ می‌دانیم که شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ ، شتاب را نشان می‌دهد. مطابق شکل، مقدار شیب نمودار ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌شود. بنابراین اندازه شتاب ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.



۲۱۷. گزینه ۴ با توجه به نمودار، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

- ۱ در بازه صفر تا t_1 ، اندازه سرعت (تندی) در حال افزایش است؛ نه کاهش! ✗
- ۲ اندازه شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ ، بزرگی شتاب را نشان می‌دهد؛ از آنجا که نمودار بخشی از یک سهمی است، اندازه شیب خط در لحظه t_2 بیشتر از لحظه صفر است؛ پس بزرگی شتاب در لحظه t_2 بیشتر از لحظه صفر است. ✗
- ۳ در بازه صفر تا t_1 ، سرعت در حال افزایش ($\Delta v > 0$) و در بازه t_1 تا t_2 ، سرعت در حال کاهش ($\Delta v < 0$) است؛ بنابراین طبق رابطه

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

از صفر تا t_1 شتاب در جهت محور X و از t_1 تا t_2 شتاب در خلاف جهت محور X است. ✗

۴ اندازه شیب خط گذرنده از دو نقطه t_1 و t_2 ، بیشتر از اندازه شیب خط گذرنده از $t=0$ تا t_2 است؛ بنابراین بزرگی شتاب متوسط در بازه t_1 تا t_2 بیشتر از بزرگی شتاب متوسط در بازه صفر تا t_2 است. ✓

۲۱۸. گزینه ۱ با توجه به نمودار، عبارت‌ها را بررسی می‌کنیم:

- الف در لحظه t_1 ، علامت شتاب از مثبت به منفی تغییر می‌کند، اما علامت سرعت همچنان مثبت است. ✗
- ب در بازه زمانی t_1 تا t_2 نمودار بالای محور t است (v مثبت است)، بنابراین متحرک در جهت محور X حرکت کرده است. ✓
- پ در بازه زمانی صفر تا t_1 ، تندی در حال افزایش است؛ نه کاهش! ✗
- ت بردار شتاب متوسط در بازه زمانی صفر تا t_2 (شیب خط گذرنده از $t=0$ و t_2) خلاف جهت محور X است، ولی بردار شتاب از صفر تا t_1 در جهت محور X و از t_1 تا t_2 در خلاف جهت محور X است! ✗

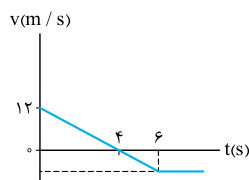
بنابراین فقط عبارت (ب) درست است.

۲۱۹. گزینه ۱ شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ برابر شتاب لحظه‌ای در نقطه مورد نظر است؛ پس اگر نسبت شتاب در $t=1^0s$ به شتاب در $t=2s$ را می‌خواهیم، باید شیب مماس‌های وارد بر نمودار $v-t$ در این نقاط را به دست آوریم:

$$\left. \begin{aligned} t=2s \Rightarrow \text{شیب مماس بر نمودار} &= \frac{16-1^0}{2-0} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow a_{(2)} = 3 \text{ m/s}^2 \\ t=1^0s \Rightarrow \text{شیب مماس بر نمودار} &= \frac{1^0-(-1^0)}{1^0-0} = \frac{2^0}{1^0} = 2 \Rightarrow a_{(1^0)} = 2 \text{ m/s}^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a_{(1^0)}}{a_{(2)}} = \frac{2}{3}$$

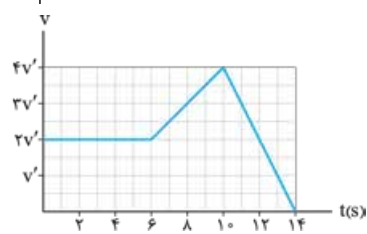
۲۲۰. گزینه ۲ چون نمودار سرعت-زمان در بازه زمانی $(0, 6s)$ یک خط راست است، شتاب در این بازه زمانی ثابت است. پس برای محاسبه شتاب متوسط در بازه زمانی $(3s, 6s)$ می‌توانیم شتاب متوسط در هر بازه دلخواهی از $(0, 6s)$ را حساب کنیم؛ یعنی:

$$|a_{av(3,6)}| = |a_{av(0,6)}| = \frac{|0-12|}{6} = 3 \text{ m/s}^2$$



۲۲۱. گزینه ۱ ابتدا با توجه به خانه‌های شطرنجی اندازه زمان و سرعت (پارامتری) را برای هر خانه مشخص می‌کنیم. حالا از آنجا که نمودار در چند بخش به صورت خطی است، شتاب لحظه‌ای در هر بخش برابر شتاب متوسط در آن بازه است؛ مثلاً اندازه شتاب در لحظه $t=8s$ برابر شتاب متوسط در بازه $(6s, 1^0s)$ است؛ بنابراین:

$$\left. \begin{aligned} a_8 &= a_{av(6,1^0)} = \frac{4v' - 2v'}{1^0 - 6} = \frac{v'}{2} \\ a_{12} &= a_{av(1^0,14)} = \frac{0 - 4v'}{14 - 1^0} = -v' \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a_8}{a_{12}} = \frac{\frac{v'}{2}}{-v'} = -\frac{1}{2}$$



۲۲۲. گزینه ۲ چون نمودار سرعت-زمان متحرک B در بازه صفر تا t_2 خط راست است، شتاب متحرک B در بازه زمانی صفر تا t_2 ثابت است. با توجه به این موضوع شتاب متوسط متحرک B در بازه t_1 تا t_2 همان شتاب متوسط در بازه صفر تا t_2 است و داریم:

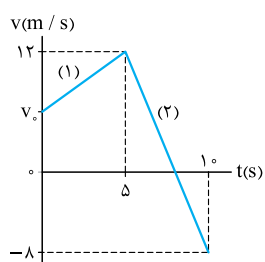
$$2 = \frac{|a_{av,A}|}{|a_{av,B}|} = \frac{|\frac{\Delta v_A}{\Delta t_A}|}{|\frac{\Delta v_B}{\Delta t_B}|} = \frac{|\frac{0-3v}{t_1-0}|}{|\frac{0-(-2v)}{t_2-0}|} \Rightarrow 2 = \frac{3v}{t_1} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{t_2}{t_1}$$

۲۲۳. گزینه ۱ گام اول: در بازه $(0s$ تا $5s)$ نمودار سرعت-زمان خط راست است؛ پس شتاب در این بازه ثابت است و شتاب هر لحظه (مثل $t=8s$) برابر با شتاب متوسط ($a_{av,2}$) در این بازه است. با توجه به شکل روبه‌رو داریم:

$$a_8 = a_{av,2} \Rightarrow a_8 = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2} = \frac{-8-12}{1^0-5} = \frac{-2^0}{5} = -4 \text{ m/s}^2$$

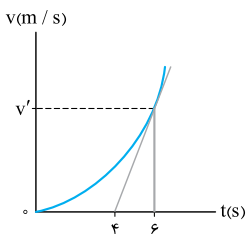
گام دوم: اندازه شتاب در ۲ ثانیه دوم یعنی در بازه $(2s$ تا $4s)$ نصف $|a_8|$ است؛ از طرفی چون شیب نمودار $v-t$ در بازه صفر تا $5s$ ثابت و مثبت است. شتاب متوسط در این بازه ثابت و مثبت است و داریم:

$$a_{av,1} = \frac{1}{2} |a_8| \Rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1}{2} (4) \Rightarrow \frac{12-v_0}{5-0} = 2 \Rightarrow 12-v_0 = 1^0 \Rightarrow v_0 = 2 \text{ m/s}$$



$$\vec{v}_0 = (2 \text{ m/s}) \vec{j}$$

گام سوم: متحرک روی محور y حرکت می‌کند و سرعت اولیه‌اش مثبت است؛ پس:



۲۲۴. گزینه ۳ مطابق شکل فرض می‌کنیم اندازه سرعت متحرک در لحظه $t = 6\text{ s}$ ، v' باشد. با توجه به این که شیب خط مماس بر نمودار در لحظه $t = 6\text{ s}$ را هم می‌توان به دست آورد؛ بنابراین:

$$\left. \begin{aligned} a_6 &= \frac{v'}{6-4} = \frac{v'}{2} \\ a_{av(0,6)} &= \frac{v'}{6-0} = \frac{v'}{6} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a_6}{a_{av(0,6)}} = \frac{\frac{v'}{2}}{\frac{v'}{6}} = 3$$

۲۲۵. گزینه ۴ در نمودار $X-t$ سرعت لحظه‌ای برابر با شیب خط مماس بر نمودار است. در $t = 0\text{ s}$ و $t = 5\text{ s}$ سرعت صفر است، چون در این دو لحظه خط مماس بر نمودار افقی است؛ پس شتاب متوسط در این بازه زمان هم صفر می‌شود؛ به زبان ریاضی:

$$\left\{ \begin{aligned} v(0) &= 0 \\ v(5) &= 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(5) - v(0)}{5} = \frac{0 - 0}{5} = 0$$

۲۲۶. گزینه ۱ این نمودار یک سهمی با نقطه کمینه (گودی رو به بالا) است. پس شتاب این حرکت در تمام لحظه‌ها مثبت و غیرصفر است. از جمله در لحظه t_1 (نادرستی عبارت ۱) و در لحظه t_1 (درستی عبارت ۴).

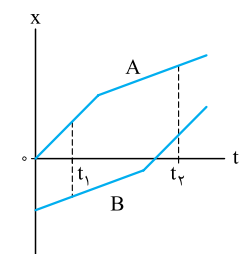
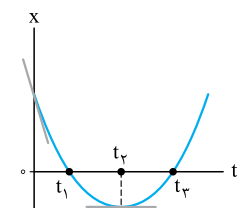
حواستون باشه! در لحظه t_1 شیب نمودار مکان - زمان صفر است، در نتیجه سرعت در این لحظه صفر است، نه شتاب.

بررسی گزینه‌های دیگر:

۲ حرکت قبل از نقطه اکسترمم کندشونده و پس از آن تندشونده است. پس در بازه صفر تا t_1 حرکت کندشونده است. ✓

۳ در شکل روبه‌رو خط مماس در لحظه‌های صفر و t_1 را نشان داده‌ایم. شیب این خط‌ها نشان می‌دهد علامت سرعت در لحظه صفر منفی و سرعت در لحظه t_1 نیز صفر است، پس داریم:

$$\left\{ \begin{aligned} v_0 &< 0 \\ v_{t_1} &= 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow v_{t_1} - v_0 > 0 \Rightarrow a_{av(0,t_1)} > 0 \quad \checkmark$$



۲۲۷. گزینه ۳ بررسی شتاب متوسط متحرک A: شیب نمودار $X-t$ بیانگر سرعت است؛ بنابراین سرعت متحرک A در t_1 بیشتر از سرعتش در t_1 است و داریم:

$$v_{t_1,A} < v_{1,A} \Rightarrow v_{t_1,A} - v_{1,A} < 0 \xrightarrow{\Delta t > 0} \frac{v_{t_1,A} - v_{1,A}}{\Delta t} < 0 \Rightarrow \frac{\Delta v_A}{\Delta t} < 0 \Rightarrow a_{av,A} < 0$$

بررسی شتاب متوسط متحرک B: برای متحرک B سرعت در t_1 بیشتر از سرعت در t_1 است و داریم:

$$v_{t_1,B} > v_{1,B} \Rightarrow v_{t_1,B} - v_{1,B} > 0 \xrightarrow{\Delta t > 0} \frac{v_{t_1,B} - v_{1,B}}{\Delta t} > 0 \Rightarrow \frac{\Delta v_B}{\Delta t} > 0 \Rightarrow a_{av,B} > 0$$

۲۲۸. گزینه ۱ برداشت ۱: گفتیم در نمودار مکان - زمان، در بازه‌ای که مینیمم داریم (U) علامت شتاب مثبت و در بازه‌ای که ماکسیمم داریم (∩) شتاب منفی است؛ بنابراین شتاب در بازه صفر تا t_1 در خلاف جهت محور X است.

برداشت ۲: هر جا متحرک در جهت محور X حرکت کند، علامت سرعت هم مثبت می‌شود؛ با این حساب در بازه زمانی صفر تا t_1 و t_1 تا t_2 سرعت در جهت محور X است.

نتیجه

در بازه زمانی صفر تا t_1 شتاب متوسط در خلاف جهت محور X و سرعت متوسط در جهت محور X است.

۲۲۹. گزینه ۲ گام اول: با توجه به تقارنی که در سهمی نسبت به نقطه اکسترمم آن وجود دارد در شکل روبه‌رو نقطه بیشینه در $t = 4\text{ s}$ قرار دارد و در نتیجه سرعت متحرک در $t = 4\text{ s}$ صفر است. هم‌چنین سرعتش در $t = 8\text{ s}$ به صورت مقابل به دست می‌آید:

$$v_8 = \frac{0 - (32)}{12 - 8} = \frac{-32}{4} = -8\text{ m/s}$$

گام دوم: پس شتاب متوسط در این بازه برابر است با:

$$a_{av(4,8)} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_8 - v_4}{\Delta t} = \frac{-8 - 0}{8 - 4} = \frac{-8}{4} = -2\text{ m/s}^2 \Rightarrow |a_{av}| = 2\text{ m/s}^2$$

۲۳۰. گزینه ۱ گام اول: ۳ ثانیه دوم حرکت یعنی از $t = 3\text{ s}$ تا $t = 6\text{ s}$ برای این که در این بازه شتاب متوسط را به دست آوریم، باید سرعت لحظه‌ای در $t = 3\text{ s}$ و $t = 6\text{ s}$ را حساب کنیم.

چون در بازه $(0, 4\text{ s})$ و $(4\text{ s}, 8\text{ s})$ نمودار $X-t$ خط راست است، در این بازه‌ها سرعت ثابت است و داریم:

$$v_3 = v_{av,1} = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{10 - 2}{4 - 0} = \frac{8}{4} = 2\text{ m/s} \quad v_6 = v_{av,2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{-6 - 10}{8 - 4} = \frac{-16}{4} = -4\text{ m/s}$$

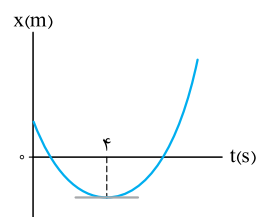
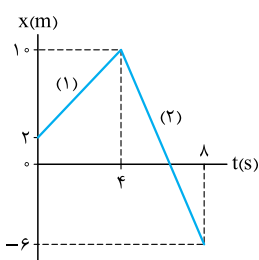
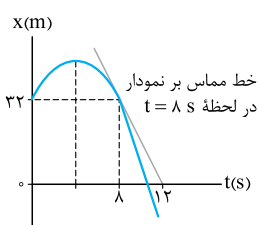
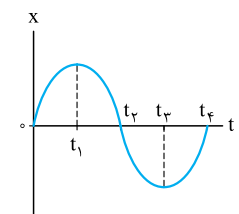
گام دوم: حالا می‌توانیم شتاب متوسط را حساب کنیم:

$$a_{av(3,6)} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_6 - v_3}{\Delta t} = \frac{-4 - 2}{6 - 3} = \frac{-6}{3} = -2\text{ m/s}^2$$

بنابراین، بردار شتاب متوسط به صورت $\vec{a}_{av} = (-2\text{ m/s}^2)\vec{i}$ خواهد بود.

۲۳۱. گزینه ۴ در نمودار مکان - زمان، حرکت قبل از نقطه اکسترمم کندشونده است. پس این‌جا که در بازه صفر تا 4 s حرکت کندشونده است، نقطه کمینه در لحظه $t = 4\text{ s}$ قرار دارد. از طرف دیگر می‌دانید که در نمودار مکان - زمان در نقطه اکسترمم شیب خط مماس بر نمودار و در نتیجه سرعت متحرک صفر است. پس داریم:

$$a_{av(0,4)} = \frac{v_4 - v_0}{\Delta t_{(0,4)}} \xrightarrow{v_4=0} \xrightarrow{a_{av(0,4)}=5\text{ m/s}^2} \Delta v = \frac{0 - v_0}{4 - 0} \Rightarrow v_0 = -20\text{ m/s} \Rightarrow \vec{v}_0 = (-20\text{ m/s})\vec{i}$$



درس دهم معادله و نمودار شتاب - زمان در حرکت راست خط



معادله شتاب - زمان

شتاب متحرکی را که بر مسیر مستقیم حرکت می کند می توانیم با معادله شتاب - زمان نشان بدهیم. در سطح کتاب درسی از معادله شتاب - زمان می توانیم چیزهایی مثل اندازه شتاب در هر لحظه و یا لحظه تغییر جهت بردار شتاب را حساب کنیم. تست زیر را ببینید:

تست ۱۵ معادله شتاب - زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می کند در SI به صورت $a = 2t - 4$ است. در چه لحظه ای جهت شتاب متحرک

تغییر می کند؟

۵ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴)

پاسخ ۱۳ می خواهیم لحظه تغییر علامت شتاب را پیدا کنیم. برای این کار باید معادله $a = 2t - 4$ را تعیین علامت کنیم: لحظه تغییر علامت شتاب

$$a = 0 \Rightarrow 2t - 4 = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ s}$$

t (s)	0	2
a (m/s ²)	-4	(-)
		(+)

با توجه به جدول تعیین علامت در لحظه $t = 2 \text{ s}$ ، بردار شتاب، از منفی به مثبت تغییر جهت می دهند.

یادآوری هر اتفاقی برای شتاب می افتد، برای نیروی خالص وارد بر جسم هم می افتد. مثلاً در تست بالا، در لحظه ای که شتاب تغییر علامت می دهد و جهتش تغییر می کند، نیروی خالص وارد بر جسم هم جهتش تغییر می کند.

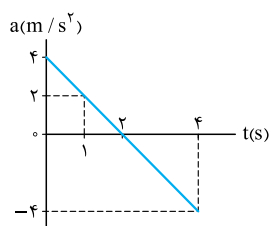
نمودار شتاب - زمان

برای هر حرکتی بر مسیر مستقیم می توانیم نمودار شتاب - زمان رسم کنیم. این نمودار هم مثل معادله شتاب - زمان، وضعیت شتاب متحرک در هر لحظه را نشان می دهد.

آنچه از نمودار شتاب - زمان می توانیم بفهمیم

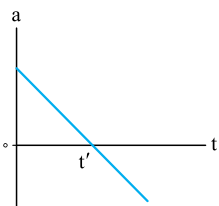
۱. تشخیص شتاب متحرک در هر لحظه هر نقطه از نمودار شتاب - زمان نشان می دهد که شتاب

متحرک در هر لحظه چه قدر است. هم چنین علامت و جهت شتاب بالای محور t مثبت و پایین محور t منفی است. مثلاً در نمودار شتاب - زمان روبه رو، شتاب متحرک در لحظه $t_1 = 1 \text{ s}$ برابر 2 m/s^2 و در لحظه $t_2 = 4 \text{ s}$ برابر -4 m/s^2 است.



۲. لحظه تغییر جهت بردار شتاب لحظه ای که نمودار شتاب - زمان محور t را قطع می کند، شتاب برای

لحظه ای صفر می شود و علامت (جهت) شتاب تغییر می کند. مثلاً در شکل روبه رو علامت و جهت شتاب در لحظه t' از مثبت به منفی تغییر می کند. (لحظه t' ، لحظه تغییر جهت نیروی خالص وارد بر جسم هم هست).

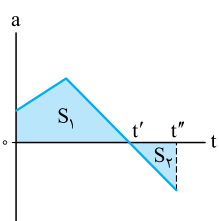


۳. محاسبه تغییرات سرعت مساحت محصور بین نمودار شتاب - زمان و محور t برابر اندازه تغییرات

سرعت (Δv) است. (تأکید می کنیم تغییرات سرعت، نه خود سرعت!) مثلاً در شکل روبه رو مساحت S_1 برابر تغییرات سرعت متحرک در بازه زمانی صفر تا t' است.

اگر نمودار شتاب - زمان بالای محور t باشد، علامت تغییرات سرعت (Δv) مثبت و اگر نمودار شتاب - زمان پایین محور t باشد، علامت تغییرات سرعت منفی است. مثلاً در شکل روبه رو تغییرات سرعت در بازه زمانی صفر تا t' مثبت و در بازه t' تا t'' منفی است:

$$\Delta v_1 = S_1, \Delta v_2 = -S_2$$



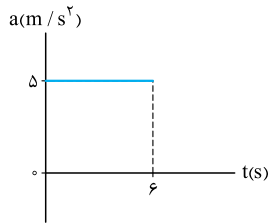
۴. محاسبه شتاب متوسط • با داشتن تغییرات سرعت در یک بازه زمانی می‌توانیم شتاب متوسط را هم در آن بازه محاسبه کنیم؛ مثلاً در شکل بالا شتاب متوسط در بازه‌های زمانی «صفر تا t' » و « t' تا t'' »، و هم‌چنین «صفر تا t'' » به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$a_{av(0,t')} = \frac{\Delta v_1}{t' - 0} = \frac{S_1}{t'}$$

$$a_{av(t',t'')} = \frac{\Delta v_2}{t'' - t'} = \frac{-S_2}{t'' - t'}$$

$$a_{av(0,t'')} = \frac{\Delta v_1 + \Delta v_2}{t'' - 0} = \frac{S_1 + (-S_2)}{t''}$$

۵. سرعت متحرک در هر لحظه و تشخیص تندشونده یا کندشونده بودن حرکت • هرگز نمی‌توانیم



فقط با یک نمودار شتاب - زمان خالی سرعت متحرک در هر لحظه را پیدا کنیم یا تندشونده و کندشونده بودن حرکت را تشخیص بدهیم. ولی اگر در صورت مسئله سرعت در یک لحظه (مثل سرعت اولیه) را بدهند، می‌توانیم چیزهای دیگری را هم بفهمیم.

مثلاً فرض کنید در شکل روبه‌رو سرعت اولیه $v_0 = -10 \text{ m/s}$ است.

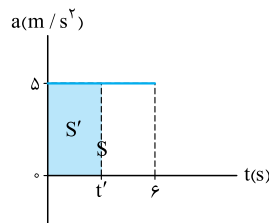
۳ تا از مهم‌ترین سؤال‌هایی که می‌شود پرسید، این‌ها هستند:

الف) سرعت متحرک در یک لحظه خاص مثلاً $t = 6 \text{ s}$ چند متر بر ثانیه است؟

ب) در چه لحظه‌ای سرعت متحرک صفر می‌شود و متحرک تغییر جهت می‌دهد؟ (این سؤال از همشون مهم‌تره)

پ) در کدام بازه زمانی حرکت کندشونده و در کدام بازه زمانی حرکت تندشونده است؟

حالا به این سؤال‌ها یکی‌یکی پاسخ می‌دهیم:



الف) اول با محاسبه مساحت زیر نمودار در بازه صفر تا 6 s تغییرات سرعت را حساب می‌کنیم:

$$\Delta v_{(0,6)} = S = 5 \times 6 = 30 \text{ m/s}$$

با داشتن سرعت اولیه، سرعت در لحظه $t = 6 \text{ s}$ را حساب می‌کنیم:

$$\Delta v_{(0,6)} = v_6 - v_0 \xrightarrow{v_0 = -10 \text{ m/s}} 30 = v_6 - (-10) \Rightarrow v_6 = 20 \text{ m/s}$$

ب) حالا می‌رسیم به مهم‌ترین سؤال؛ «در چه لحظه‌ای سرعت صفر می‌شود؟» فرض کنید در شکل در لحظه t' سرعت صفر شده است. پس با داشتن

سرعت ابتدا و انتهای بازه صفر تا t' می‌توانیم، لحظه t' را هم حساب کنیم:

$$S' = \Delta v_{(0,t')} \xrightarrow{S' = \Delta t'} \Delta t' = v' - v_0 \xrightarrow{v' = 0, v_0 = -10 \text{ m/s}} \Delta t' = 0 - (-10) \Rightarrow t' = \frac{10}{5} = 2 \text{ s}$$

یعنی در لحظه $t' = 2 \text{ s}$ سرعت متحرک صفر می‌شود و جهت حرکت متحرک از منفی به مثبت تغییر می‌کند.

پ) تندی متحرک در لحظه‌های صفر، $t' = 2 \text{ s}$ و $t = 6 \text{ s}$ به ترتیب 10 m/s ، صفر و 20 m/s است، پس از صفر تا 2 s حرکت کندشونده و از 2 s تا 6 s حرکت تندشونده است.

آزمون ۱ | نمودار شتاب - زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل روبه‌رو است. اگر در مبدأ زمان سرعت متحرک -4 m/s باشد، شتاب متوسط متحرک در بازه صفر تا $t = 6 \text{ s}$ و لحظه تغییر جهت متحرک در این بازه زمانی برحسب یکاهای SI به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

۱) $2, 2/25$

۲) $4, 2/25$

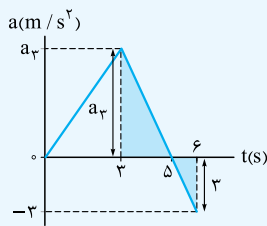
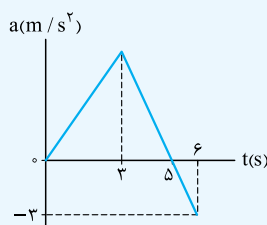
۳) $2, 1/25$

۴) $4, 1/25$

پاسخ ۱ | محاسبه شتاب متوسط در بازه صفر تا 6 s :

گام اول: در شکل (الف) به لطف تشابه دو مثلث رنگی، a_3 را حساب می‌کنیم:

$$\frac{5-3}{6-5} = \frac{a_3}{3} \Rightarrow a_3 = 6 \text{ m/s}^2$$



(الف)

گام دوم: برای محاسبه شتاب متوسط باید تغییرات سرعت را داشته باشیم؛ پس می‌رویم سراغ محاسبه مساحت‌های S_1 و S_2 در شکل (ب):

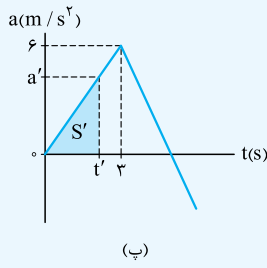
$$\begin{cases} S_1 = \frac{5 \times 6}{2} = 15 \\ S_2 = \frac{1 \times 3}{2} = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \Delta v = S_1 - S_2 = 15 - 1/2 = 14/2 \text{ m/s}$$

به کمک رابطه $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ شتاب متوسط در بازه $(0, 6 \text{ s})$ را به دست می‌آوریم:

$$a_{av} = \frac{14/2}{6-0} = 2/25 \text{ m/s}^2$$

(ب)

گام سوم: رسیدیم به قسمت سخت مسئله، می‌خواهیم لحظه تغییر جهت متحرک را پیدا کنیم. برای حل این قسمت باید لحظه‌ای را پیدا کنیم که متحرک سرعتش صفر شده و تغییر علامت می‌دهد. سرعت اولیه متحرک -4 m/s است؛ پس برای این که سرعتش صفر شود باید تغییرات سرعتش $+4 \text{ m/s}$ باشد:



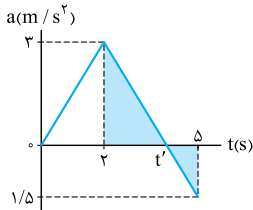
$$\Delta v = v' - v_0 \xrightarrow{v_0 = -4 \text{ m/s}} \Delta v = 0 - (-4) = 4 \text{ m/s}$$

یعنی مساحت S' در شکل (پ) باید برابر ۴ باشد: رابطه (۱) $a't' = 4 \Rightarrow \frac{a't'}{2} = 4 \Rightarrow a't' = 8$
با کمی دقت در شکل (پ) می‌بینیم که بین t' و a' نسبت تالسی ۳ به ۴ برقرار است:

$$\frac{a'}{t'} = \frac{6}{3} \Rightarrow a' = 2t' \quad \text{رابطه (۲)}$$

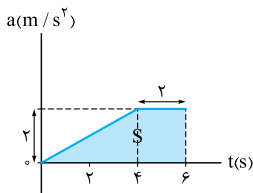
حالا $a't' = 8$ را در رابطه (۲) قرار می‌دهیم و جواب تست را پیدا می‌کنیم: $2t'^2 = 8 \Rightarrow t'^2 = 4 \Rightarrow t' = 2 \text{ s}$

۲۳۲. گزینه ۳ | لحظه‌ای که نمودار شتاب - زمان، محور t را قطع می‌کند، علامت و جهت شتاب تغییر می‌کند. مطابق شکل برای محاسبه این لحظه (t')، از تشابه دو مثلث رنگی استفاده می‌کنیم:



$$\frac{3 - t'}{t' - 2} = \frac{1/5}{2} \Rightarrow 10 - 2t' = t' - 2 \Rightarrow 3t' = 12 \Rightarrow t' = 4 \text{ s}$$

۲۳۳. گزینه ۳ | گام اول: سطح زیر نمودار شتاب - زمان برابر تغییرات سرعت (یعنی Δv) است؛ پس مساحت زیر نمودار یعنی ذوزنقه رنگی را حساب می‌کنیم:

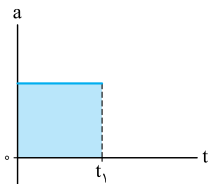


$$\Delta v = S = \frac{(2+6) \times 2}{2} = 8 \text{ m/s}$$

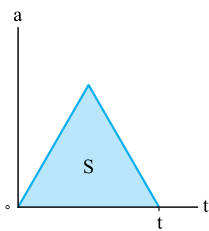
گام دوم: چون متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده است، سرعت اولیه برابر صفر است؛ یعنی:

$$\Delta v = v - v_0 \Rightarrow 8 = v - 0 \Rightarrow v = 8 \text{ m/s}$$

۲۳۴. گزینه ۴ | مطابق شکل، نمودار شتاب - زمان در بازه $(0, t_1)$ بالای محور t قرار دارد، پس $\Delta v > 0$ است؛ اما چون در مورد سرعت اولیه (اندازه و مثبت بودن آن) اطلاعاتی نداریم، نمی‌توانیم درباره نوع حرکت حرفی بزنیم!

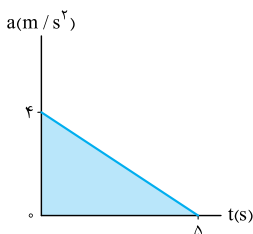


۲۳۵. گزینه ۱ | مساحت زیر نمودار شتاب - زمان، تغییرات سرعت را نشان می‌دهد. مطابق شکل، چون نمودار شتاب - زمان بالای محور t است؛ تغییرات سرعت مثبت است ($\Delta v > 0$). حالا از آنجا که متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده، سرعت اولیه‌اش هم صفر است؛ بنابراین اندازه سرعت متحرک در بازه زمانی $(0, t)$ همواره در حال افزایش است؛ یعنی حرکت این متحرک در بازه $(0, t)$ پیوسته تندشونده است.



تکنیک بدون شک حرکتی که از حال سکون شروع می‌شود، تندشونده است. از آنجا که در تمام مدت جهت شتاب (شما بفونید نیروی فالس وارد بر جسم) مثبت و در جهت حرکت است، پس این حرکت در تمام لحظه‌ها تندشونده است.

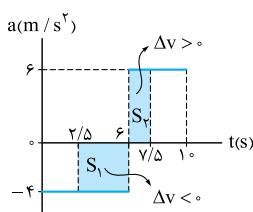
۲۳۶. گزینه ۴ | گام اول: مساحت زیر نمودار $a-t$ برابر تغییرات سرعت است. با توجه به این موضوع مقدار تغییرات سرعت را حساب می‌کنیم:



$$\Delta v = \frac{4 \times 5}{2} = 10 \text{ m/s}$$

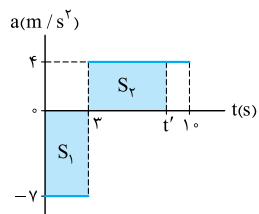
گام دوم: با داشتن سرعت اولیه و تغییرات سرعت، سرعت نهایی را تعیین می‌کنیم: $v_2 = v_1 + \Delta v = -6 + 10 = 4 \text{ m/s}$
می‌بینیم که سرعت از -6 m/s به 4 m/s رسیده است. یعنی ابتدا اندازه سرعت متحرک کاهش پیدا کرده و به صفر می‌رسد (کندشونده) و بعد از تغییر جهت از صفر تا 4 m/s افزایش پیدا کرده است (تندشونده)؛ بنابراین حرکت متحرک ابتدا کندشونده و سپس تندشونده بوده است.

۲۳۷. گزینه ۲ | می‌دانیم که مساحت زیر نمودار شتاب - زمان در یک بازه زمانی، تغییرات سرعت متحرک در آن بازه را نشان می‌دهد؛ با این حساب اگر سرعت متحرک در لحظه $t_1 = 2/5 \text{ s}$ و در لحظه $t_2 = 7/5 \text{ s}$ باشد، مساحت زیر نمودار در این بازه زمانی، تغییرات سرعت در این بازه زمانی را نشان می‌دهد؛ یعنی:



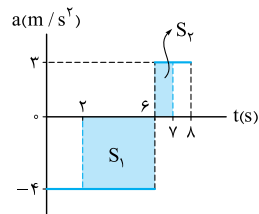
$$\Delta v_{(2/5, 7/5)} = -S_1 + S_2 = -\left(\frac{3}{5}\right) \times 6 + \left(\frac{1}{5}\right) \times 6 = -14 + 9 = -5 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \Delta \vec{v}_{(2/5, 7/5)} = (-5\hat{i}) \text{ m/s}$$



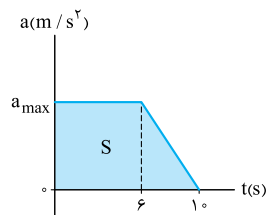
۲۳۸. گزینه ۳ جهت حرکت وقتی تغییر می‌کند که علامت سرعت عوض شود. با این حساب باید دنبال لحظه‌ای بگردیم که در آن $v = 0$ می‌شود. برای این کار از بردار سرعت اولیه و مساحت زیر نمودار کمک می‌گیریم:

$$\begin{cases} \Delta v = -S_1 + S_2 = -(v) \times 3 + v(t' - 3) = vt' - 3v \\ \Delta \vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}_0 \xrightarrow{\vec{v}'=0, \vec{v}_0=-\Delta \vec{i}} \Delta \vec{v} = \Delta \vec{i} \Rightarrow \Delta v = \Delta m/s \end{cases} \Rightarrow 5 = 4t' - 3v \Rightarrow 4t' = 3v \Rightarrow t' = 9/5 s$$



۲۳۹. گزینه ۳ برای محاسبه شتاب متوسط در بازه زمانی (۲ s تا ۷ s) به کمک مساحت زیر نمودار، اول تغییرات سرعت در این بازه زمانی و بعد شتاب متوسط را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \Delta v_{(2,7)} &= -S_1 + S_2 = -(v-2) \times 4 + (v-6) \times 3 = -16 + 3 = -13 \text{ m/s} \Rightarrow \Delta \vec{v}_{(2,7)} = (-13\vec{i}) \text{ m/s} \\ \Rightarrow \bar{a}_{av(2,7)} &= \frac{\Delta \vec{v}_{(2,7)}}{\Delta t} = \frac{-13\vec{i}}{7-2} = (-2/6\vec{i}) \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

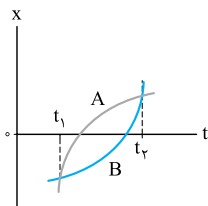


۲۴۰. گزینه ۲ گام اول: با توجه به مقدار شتاب متوسط در بازه زمانی (۰, ۱۰ s)، تغییرات سرعت را به دست می‌آوریم:

$$a_{av(0,10)} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow v/2 = \frac{\Delta v}{10-0} \Rightarrow \Delta v = 7v \text{ m/s}$$

گام دوم: در شکل روبه‌رو مساحت زیر نمودار تغییرات سرعت را نشان می‌دهد؛ بنابراین a_{max} برابر است با:

$$\Delta v = S = \frac{1}{2} (6+10) a_{max} = 7v \Rightarrow a_{max} = 9 \text{ m/s}^2$$



۲۴۱. گزینه ۲ مطابق شکل روبه‌رو هر دو متحرک به یک‌اندازه جابه‌جا شده‌اند. چون تغییر جهت هم نداده‌اند، مسافت طی شده برای آن‌ها مساوی اندازه جابه‌جایی است؛ بنابراین:

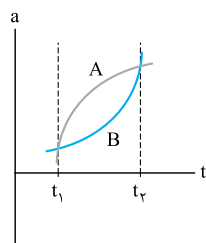
$$I_A = I_B$$

اگر در درستی گزینه‌های دیگر شک دارید، می‌توانید توضیحات زیر را بخوانید:

۲ در شکل (پ) معلوم است که مساحت زیر نمودار شتاب - زمان متحرک A بیشتر از B است؛ پس تغییرات سرعت و در نتیجه شتاب متوسط متحرک A بیشتر از B است.

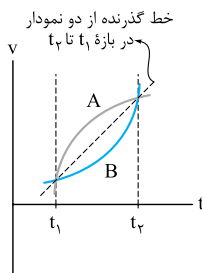
۳ می‌دانید در نمودار سرعت - زمان، شیب خط گذرنده از دو نقطه نمودار برابر شتاب متوسط است. همین‌طور که در شکل (ب) می‌بینید خط گذرنده از دو نمودار در بازه t_1 تا t_2 یکسان است. پس در این بازه شتاب متوسط دو متحرک برابر است.

۱ در شکل (الف) می‌بینید که مساحت زیر نمودار سرعت - زمان متحرک A بیشتر از B است؛ پس جابه‌جایی و در نتیجه سرعت متوسط A بیشتر از B است. ✓



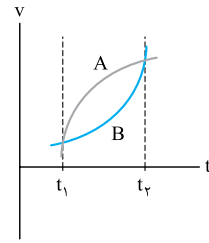
(پ)

$$a_{av,A} > a_{av,B}$$



(ب)

$$a_{av,A} = a_{av,B}$$



(الف)

$$v_{av,A} > v_{av,B}$$

$$\vec{v}_{av,A} = \frac{\vec{d}_A}{\Delta t} = \frac{-4\vec{i} - (-12\vec{i})}{5} = \frac{8\vec{i}}{5} = (1/6 \text{ m/s})\vec{i}$$

۲۴۲. گزینه ۴ سرعت متوسط متحرک A را حساب می‌کنیم: پس ۱ درست است.

حالا به سراغ تندی متوسط متحرک A می‌رویم. متحرک A در مبدأ تغییر جهت داده است؛ پس از مکان $-12\vec{i}$ به مبدأ رفته و سپس تغییر جهت داده و به مکان $-4\vec{i}$ بازگشته است. با توجه به این موضوع مسافت طی شده برابر است با:

$$I_A = |\Delta x_{1,A}| + |\Delta x_{2,A}| = |0 - (-12)| + |(-4) - 0| = 12 + 4 = 16 \text{ m}$$

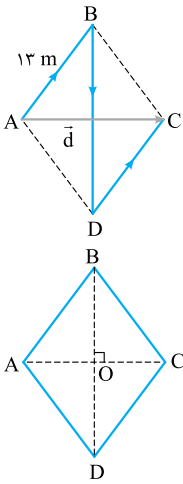
در نتیجه تندی متوسط برابر با $s_{av} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{16}{5} = 3/2 \text{ m/s}$ است و ۳ درست است.

چون تندی متوسط دو متحرک با هم برابر است، مسافت طی شده توسط دو متحرک هم برابر است. از آنجایی که هر دو متحرک فقط یک بار و در مبدأ تغییر جهت داده‌اند، متحرک B از $\vec{d}_{1,B} = 9\vec{i}$ به مبدأ و پس از تغییر جهت در مبدأ به نقطه $\vec{d}_{2,B}$ رفته است. با توجه به این که مسافت طی شده در این حرکت ۱۶ m است، داریم:

$$I_B = |\Delta x_{1,B}| + |\Delta x_{2,B}| \xrightarrow{I_A=I_B} 16 = |0 - 9| + |x_2 - 0| \Rightarrow 16 = 9 + x_2 \Rightarrow x_2 = 7 \text{ m} \Rightarrow \vec{d}_{2,B} = 7\vec{i}$$

$$\vec{v}_{av,B} = \frac{\vec{d}_B}{\Delta t} = \frac{7\vec{i} - 9\vec{i}}{5} = \frac{-2\vec{i}}{5} = (-0/4 \text{ m/s})\vec{i}$$

پس ۲ درست است. حالا به سراغ این که چرا ۴ نادرست است، می‌رویم:



۲۴۳. گزینه ۲ | گام اول: متحرک مسافت $I_{AB} + I_{BD} + I_{DC} = 50 \text{ m}$ را طی کرده است. با توجه به این که در لوزی ضلع‌های روبه‌رو با هم برابر است. مطابق شکل روبه‌رو داریم:


$$I_{AB} + I_{BD} + I_{DC} = 50 \text{ m} \Rightarrow 13 + I_{BD} + 13 = 50 \Rightarrow I_{BD} = 50 - 26 = 24 \text{ m}$$

گام دوم: در لوزی قطر‌ها بر هم عمود هستند و یکدیگر را نصف می‌کنند؛ پس:

$$\left. \begin{matrix} OB = 12 \text{ m} \\ AB = 13 \text{ m} \end{matrix} \right\} \Rightarrow AB^2 = OA^2 + OB^2 \Rightarrow 13^2 = OA^2 + 12^2 \Rightarrow OA^2 = 169 - 144 = 25 \Rightarrow OA = 5 \text{ m}$$

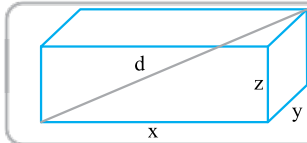
$$13n = 13 \Rightarrow OA = \Delta n = \Delta \text{ m}$$

$$d = 2OA = 2 \times 5 = 10 \text{ m}$$

تکنیک در مثلث BOA، الگوی مثلث  وجود دارد! بنابراین:

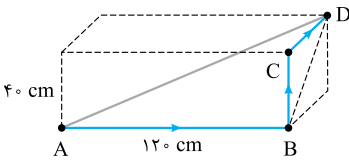
گام سوم: مطابق شکل، اندازه جابه‌جایی برابر اندازه قطر کوچک است، یعنی:

۲۴۴. گزینه ۲



$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{به طور کلی در یک مکعب به ابعاد } x, y \text{ و } z, \text{ اندازه قطر مکعب برابر است با:}$$

یادآوری



گام اول: ابتدا با توجه به مسافت طی شده، از نقطه A تا D، اندازه ضلع CD را حساب می‌کنیم:

$$I = AB + BC + CD = 120 + 40 + CD = 190 \text{ cm} \Rightarrow CD = 30 \text{ cm} = 0.3 \text{ m}$$

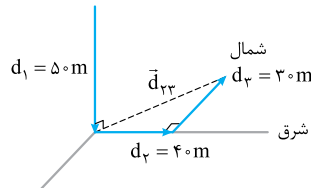
گام دوم: مطابق شکل، جابه‌جایی برابر طول پاره‌خط AD است؛ یعنی قطر مکعب مستطیل:

$$AD = \sqrt{(1/2)^2 + (0/3)^2 + (0/4)^2} = \sqrt{1/44 + 0/09 + 0/16} \Rightarrow AD = 1/3 \text{ m}$$

تکنیک در مثلث BDC الگوی مثلث $\Delta n, 4n, 3n$ و در مثلث ABD، الگوی مثلث $\Delta n, 12n, 13n$ داریم؛ بنابراین:

$$\left\{ \begin{matrix} BC = 40 \text{ cm} \\ CD = 30 \text{ cm} \end{matrix} \right\} \Rightarrow BD = 50 \text{ cm}$$

$$\left\{ \begin{matrix} AB = 120 \text{ cm} \\ BD = 50 \text{ cm} \end{matrix} \right\} \Rightarrow AD = 130 \text{ cm} = 1.3 \text{ m}$$



۲۴۵. گزینه ۲ | گام اول: ابتدا حساب می‌کنیم که متحرک روی سطح چند متر جابه‌جا شده است. مطابق شکل چون بردار جابه‌جایی در جهت شمال بر بردار جابه‌جایی در جهت شرق عمود است؛ بنابراین:

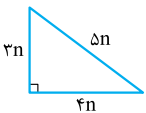
$$|\vec{d}_{33}| = |\vec{d}_1 + \vec{d}_2| = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = \sqrt{2500} = 50 \text{ m}$$

گام دوم: از طرفی بردار \vec{d}_1 که در جهت پایین است بر بردار \vec{d}_{33} عمود است؛ یعنی:

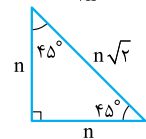
$$d = |\vec{d}_1 + \vec{d}_{33}| = \sqrt{d_1^2 + d_{33}^2} = \sqrt{50^2 + 50^2} = \sqrt{2500 + 2500} = \sqrt{5000} = 50\sqrt{2} \text{ m}$$

تکنیک ۱ اگر در سه بعد (در راستای عمود بر هم) حرکت داشته باشیم، می‌توانیم مستقیم از رابطه زیر جابه‌جایی را حساب کنیم:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(30)^2 + (40)^2 + (50)^2} = \sqrt{900 + 1600 + 2500} = \sqrt{5000} \Rightarrow d = 50\sqrt{2} \text{ m}$$



$$\left\{ \begin{matrix} d_{\text{شرق}} = 40 \text{ m} \\ d_{\text{شمال}} = 30 \text{ m} \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{مثلث } \Delta n, 4n, 3n} d_{33} = 50 \text{ m}$$



$$\left\{ \begin{matrix} d_{33} = 50 \text{ m} \\ d_1 = 50 \text{ m} \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{مثلث } n\sqrt{2}, n, n} d = 50\sqrt{2} \text{ m}$$

تکنیک ۲ تکنیک مثلث‌های معروف:

۲۴۶. گزینه ۱ | گام اول: باید جابه‌جایی متحرک را از A تا B و کل مسیر تعیین کنیم. اگر به شکل زیر نگاه کنید، می‌بینید که AOB یک مثلث متساوی‌الساقین

است که یک زاویه 60° دارد. می‌دانید مثلث متساوی‌الساقینی که یک زاویه 60° داشته باشد، مثلث متساوی‌الاضلاع است؛ پس اندازه جابه‌جایی متحرک از A تا B برابر

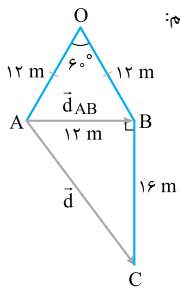
با $AB = OA = OB = 12 \text{ m}$ است. برای جابه‌جایی کل هم باید اندازه بردار AC را به کمک فیثاغورس حساب کنیم:

$$d = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20 \text{ m}$$

$$\left\{ \begin{matrix} 3n = 12 \text{ m} \\ 4n = 16 \text{ m} \end{matrix} \right\} \Rightarrow d = \Delta n = 20 \text{ m}$$

تکنیک در اضلاع مثلث ABC، الگوی $\Delta n, 3n, 4n$ و Δn وجود دارد:

گام دوم: چون سرعت متوسط و جابه‌جایی در مسیر AOB و کل مسیر را داریم، می‌توانیم مدت هر یک از این جابه‌جایی‌ها را به دست آوریم:



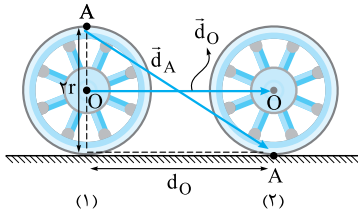
$$\Delta t_{AOB} = \frac{d_{AOB}}{v_{av, AOB}} \Rightarrow \Delta t_{AOB} = \frac{12}{3} = 4 \text{ s}, \quad \Delta t = \frac{d}{v_{av}} = \frac{20}{2.5} = 8 \text{ s}$$

گام سوم: برای به دست آوردن تندی متوسط در مسیر AOB و کل مسیر همه چیز را داریم:

$$s_{av, AOB} = \frac{l_{AOB}}{\Delta t_{AOB}} = \frac{AO + OB}{\Delta t_{AOB}} = \frac{12 + 12}{4} = 6 \text{ m/s}$$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{AO + OB + BC}{\Delta t} = \frac{12 + 12 + 16}{8} = 5 \text{ m/s}$$

۲۴۷. گزینه ۴ | گام اول: پس از این که چرخ نیم دور بزند، مطابق شکل روبه‌رو نقطه A در پایین‌ترین قسمت چرخ قرار می‌گیرد برای این که نقطه A از وضعیت (۱) به وضعیت (۲) برسد، چرخ باید در راستای افقی به اندازه نصف محیط خود جابه‌جا شود؛ بنابراین همان‌طور که در شکل می‌بینید جابه‌جایی مرکز چرخ (d_O) هم برابر نصف محیط چرخ خواهد بود:



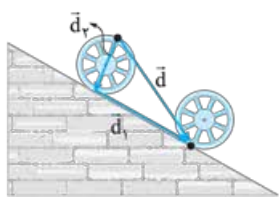
$$d_O = \frac{\text{محیط چرخ}}{2} = \pi r \frac{r=0.5 \text{ m}}{\pi=3} \rightarrow d_O = 3 \times 0.5 = 1.5 \text{ m}$$

گام دوم: با توجه به شکل نقطه A به اندازه d_O = 1/5 m در راستای افقی و به اندازه 2r = 2 × 0.5 = 1 m در راستای قائم جابه‌جا شده است بنابراین به کمک قضیه فیثاغورس جابه‌جایی نقطه A به صورت مقابل به دست می‌آید:

$$d_A = \sqrt{1^2 + (1/5)^2} = \sqrt{1 + 2/25} = \sqrt{3/25} \Rightarrow d_A = \sqrt{13}/5 = \frac{\sqrt{13}}{5} \text{ m}$$

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} \Rightarrow \sqrt{13} = \frac{d}{1} \Rightarrow d = \sqrt{13} \text{ m}$$

۲۴۸. گزینه ۳ | گام اول: به کمک رابطه سرعت متوسط، جابه‌جایی تکه سنگ را به دست می‌آوریم:



گام دوم: وقتی که چرخ نیم دور می‌زند، هر یک از نقاط چرخ (از جمله نقطه‌ای که سنگ به آن چسبیده) به موازات سطح شیبدار به اندازه نصف محیط چرخ (d₁) جابه‌جا می‌شوند. از طرفی پس از نیم دور چرخش چرخ، جابه‌جایی سنگ در راستای عمود بر سطح شیبدار به اندازه قطر چرخ (d₂) خواهد بود (به شکل روبه‌رو نگاه کنید) بنابراین به کمک قضیه فیثاغورس، جابه‌جایی کل سنگ برابر است با:

$$d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} \xrightarrow{d_1 = \pi r, \pi=3; d_2 = 2r} d = \sqrt{(3r)^2 + (2r)^2} = \sqrt{13r^2} = \sqrt{13}r$$

در گام اول $d = \sqrt{13} \text{ m}$ به دست آمد؛ بنابراین:

۲۴۹. گزینه ۱ | گام اول: ابتدا معادله فاصله این دو متحرک را باید به دست آوریم. برای این کار، دو معادله را از هم کم می‌کنیم؛ یعنی:

$$\Delta x = x_A - x_B = 4t^2 - 11t + 13 - (9t - 13) = 4t^2 - 20t + 26$$

گام دوم: حالا باید کمینه Δx را حساب کنیم. از ریاضی می‌دانید که در معادله درجه دو (یعنی $x = At^2 + Bt + C$) در لحظه $t = -\frac{B}{2A}$ مقدار x اکستریم است؛ از طرفی چون A (ضریب t²) مثبت است، معادله کمینه دارد؛ بنابراین:

$$t_{\min} = \frac{20}{2 \times 4} = \frac{5}{4} \text{ s} \Rightarrow \Delta x_{\min} = 4 \times \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 20 \times \frac{5}{4} + 26 = 25 - 25 + 26 = 1 \text{ m}$$

پس کم‌ترین فاصله دو متحرک از هم، یک متر است.

۲۵۰. گزینه ۱ | گام اول: جابه‌جایی را در بازه (۰، ۵ s) حساب می‌کنیم و به کمک آن مقدار B را تعیین می‌کنیم. با استفاده از این که اندازه سرعت متوسط ۴ m/s است، داریم:

$$\Delta x = v_{av} \Delta t = 4 \times 5 = 20 \text{ m} \quad (I)$$

از طرفی می‌دانیم $\Delta x = x_5 - x_0$ است:

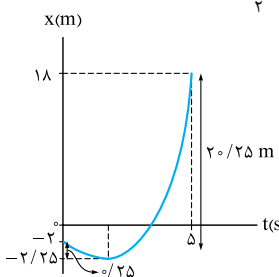
$$\Delta x = x_5 - x_0 = ((5)^2 + B(5) - 2) - ((0)^2 + B(0) - 2) = 25 + 5B \quad (II)$$

$$(I), (II): 20 = 25 + 5B \Rightarrow -5 = 5B \Rightarrow B = -1$$

$$t = \frac{-B}{2A} = \frac{-(-1)}{2(1)} = \frac{1}{2} \text{ s}$$

گام دوم: لحظه تغییر جهت را به دست می‌آوریم:

$$l = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = |(x_1 - x_0)| + |(x_5 - x_1)|$$



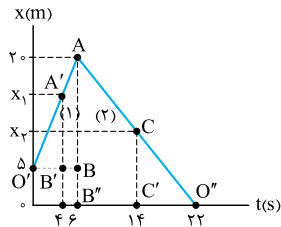
$$= \left| \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \right| - (-2) + \left| ((5)^2 + (-1)(5) - 2) - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)\left(\frac{1}{2}\right) - 2\right) \right|$$

$$= \left| \left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} - 2 \right| + 2 + \left| (25 - 5 - 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2) \right| = | -2.25 | + | 20.25 | = 20.5 \text{ m}$$

گام چهارم: با داشتن مسافت طی شده و مدت‌زمان طی مسافت، به دست آوردن تندی متوسط دیگر کاری ندارد:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{20.5}{5} = 4.1 \text{ m/s}$$

در نمودار مکان - زمان می‌توان کل داستان را یک‌جا ببینید.



۲۵۱. گزینه ۱ گام اول: ابتدا لحظه‌های $t = 4$ s (ابتدای بازه) و $t = 14$ s (انتهای بازه) را روی نمودار مشخص می‌کنیم.

گام دوم: حالا باید مقدار x_1 و x_2 را به دست آوریم. برای این کار از تشابه مثلث‌ها استفاده می‌کنیم. مطابق شکل، در بخش (۱) نمودار، دو مثلث $O'A'B'$ و $O'AB$ متشابه‌اند؛ بنابراین:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{O'B'}{OB} \Rightarrow \frac{x_1 - \delta}{20 - \delta} = \frac{\delta}{4} \Rightarrow x_1 - \delta = 10 \Rightarrow x_1 = 15 \text{ m}$$

به همین ترتیب در بخش (۲) نمودار، دو مثلث $O''CC'$ و $O''AB''$ متشابه هستند:

$$\frac{CC'}{AB''} = \frac{O''C'}{O''B''} \Rightarrow \frac{x_2}{10} = \frac{22 - 14}{22 - 6} \Rightarrow x_2 = 10 \text{ m}$$

تکلیک بر روی محور t ، ۱۴ میانگین ۶ و ۲۲ است. پس بر روی محور x ، x_2 هم باید میانگین صفر و ۲۰ باشد؛ یعنی $x_2 = \frac{0+20}{2} = 10$

گام سوم: با داشتن مقدار x_1 و x_2 ، می‌توانیم جابه‌جایی متحرک و مسافت طی‌شده آن را حساب کنیم. (در محاسبه مسافت حواستان به تغییر جهت هم باشد.)

$$l = |20 - 15| + |10 - 20| = 5 + 10 = 15 \text{ m}, \quad \vec{d} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1 = (10 - 15)\vec{i} = -5\vec{i}$$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{15}{14 - 4} = 1.5 \text{ m/s}$$

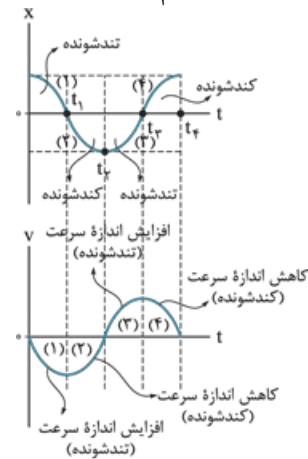
گام چهارم: حالا همه چیز برای محاسبه تندی متوسط متحرک و سرعت متوسط آن فراهم است:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t} = \frac{-5\vec{i}}{10} = -0.5\vec{i} \text{ m/s}$$

۲۵۲. گزینه ۲ با توجه به این که معادله سرعت - زمان $v = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$ ریشه مضاعف دارد، متحرک تغییر جهت نمی‌دهد و در نتیجه، اندازه جابه‌جایی

$$l = |\Delta x| = \left| \left(\frac{2}{3} \right)^3 - (2) + 1 \right| - \left| \left(\frac{0}{3} \right)^3 - (0) + 1 \right| = \left| \left(\frac{8}{27} - 1 \right) - 1 \right| = \frac{2}{3} \text{ m}$$

و مسافت طی‌شده با هم برابر است؛ بنابراین:



۲۵۳. گزینه ۲ مطابق شکل نمودار $x-t$ در بخش (۱) شیب منفی و اندازه آن در حال افزایش است! پس در این بخش سرعت منفی و حرکت تندشونده باید باشد. (تا همین جا گزینه درست را پیدا کرده‌ایم.)

در بخش (۲) حرکت، شیب هم‌چنان منفی و اندازه آن در حال کاهش است! پس در این بخش سرعت هم‌چنان منفی و حرکت کندشونده باید باشد. در بخش (۳) شیب مثبت و اندازه آن در حال افزایش است؛ پس در این بخش سرعت مثبت و حرکت تندشونده است.

در بخش (۴) باز هم شیب مثبت و اندازه آن در حال کاهش است، پس در این بخش سرعت مثبت و حرکت کندشونده است.

یادآوری گفتیم که در نمودار مکان - زمان قبل از رسیدن به اکستریم حرکت تندشونده و بعد از آن کندشونده است.

تکلیک به نمودار نگاه کنید، در بازه صفر تا t_p شیب نمودار مکان - زمان (یعنی سرعت) منفی است پس در این بازه، نمودار سرعت - زمان زیر محور t قرار دارد. این وضعیت فقط در نمودار ۲ دیده می‌شود.

۲۵۴. گزینه ۴ ابتدا نمودار $v-t$ را با توجه به معادله سرعت رسم می‌کنیم. برای این کار ریشه‌های معادله و لحظه اکستریم را باید حساب کنیم:

$$v = t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ s (ریشه مضاعف)}$$

چون ریشه مضاعف است، لحظه اکستریم هم $t = 1$ s می‌شود. (اگر شک دارید، از رابطه $t = \frac{-B}{2A}$ ، یک بار دیگر لحظه اکستریم را حساب کنید!)

با توجه به مثبت بودن ضریب t^2 ، سهمی باید رو به بالا باشد؛ بنابراین:

حالا با توجه به نمودار، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

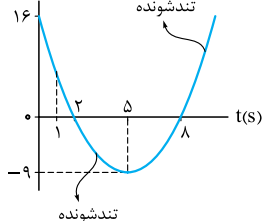
۱ علامت سرعت همواره مثبت است؛ پس متحرک پیوسته در جهت محور x حرکت کرده است. *

۲ با توجه به گزینه قبل، جهت متحرک تغییری نکرده است کلاً. *

۳ قبل از $t = 1$ s نمودار سرعت - زمان در حال نزدیک شدن به محور t و بعد از آن در حال دور شدن از محور t است؛ بنابراین حرکت متحرک ابتدا کندشونده و سپس تندشونده بوده است. *

۴ اگر $t = 2$ s را در معادله سرعت - زمان قرار دهید؛ به عدد روپه‌رو می‌رسید:

۲۵۵. گزینه ۲ گام اول: برای حل این تست ابتدا نمودار $v-t$ را با توجه به معادله سرعت - زمان رسم می‌کنیم.



برای این کار باید ریشه‌های معادله سرعت - زمان و نقطه اکستریم را حساب کنیم:

$$v = t^2 - 10t + 16 = (t-2)(t-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \text{ s} \\ t_2 = 8 \text{ s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow t_{min} = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{2+8}{2} = 5 \text{ s}$$

ضریب t^2 مثبت است.

(از رابطه $t_{min} = \frac{-B}{2A}$ هم می‌توانید t_{min} را حساب کنید ولی خوب محاسبه لحظه وسط کار راحت‌تری است!)

گام دوم: هر جا که نمودار در حال دور شدن از محور t باشد (افزایش اندازه سرعت)، حرکت تندشونده خواهد بود. مطابق شکل نمودار، در بازه‌های زمانی $2s$ تا $5s$ و از لحظه $8s$ به بعد $(8s, +\infty)$ حرکت تندشونده است؛ در بین گزینه‌ها، $2/5$ ثانیه دوم یعنی بازه زمانی $2/5s$ تا $5s$ در این بازه قرار دارد.

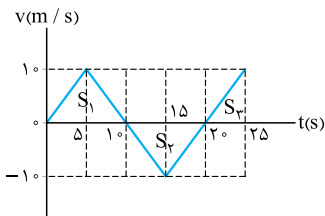
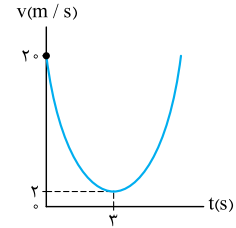
۲۵۶. گزینه ۳ | گام اول: اگر Δ معادله $20 - 12t + 2t^2 = v$ صفر یا بزرگ‌تر از صفر باشد، کم‌ترین اندازه سرعت، صفر خواهد شد. پس در قدم اول Δ را حساب می‌کنیم:

$$\Delta = B^2 - 4AC = (-12)^2 - (4 \times 2 \times 20) = -16 < 0$$

پس تندی این متحرک هرگز صفر نخواهد شد. (یعنی نمودار سرعت زمان هرگز محور t را قطع نخواهد کرد.)
گام دوم: حالا لحظه اکسترمم شدن معادله سرعت را و در صورت مثبت بودن t ، سرعت در این لحظه را حساب می‌کنیم:

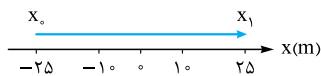
$$t = \frac{-B}{2A} = \frac{-(-12)}{2 \times 2} = 3s \Rightarrow v_p = 2(3)^2 - 12(3) + 20 = 2 \text{ m/s}$$

یعنی نزدیک‌ترین فاصله نمودار $v - t$ با محور زمان 2 m/s است. (شکل روبه‌رو).
پس **۳** جواب ماست.



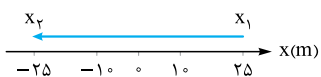
۲۵۷. گزینه ۴ | با توجه به نمودار، متحرک در بازه زمانی صفر تا $1s$ در جهت محور x (S_1 بالای محور t)، در بازه زمانی $1s$ تا $2s$ در خلاف جهت محور x (S_2 پایین محور t) و در بازه زمانی $2s$ تا $3s$ دوباره در جهت محور x حرکت کرده است. حالا می‌خواهیم بدانیم متحرک در طی این حرکتش چند بار از 10 m متری مبدأ، یعنی $x = \pm 10 \text{ m}$ گذشته است؛ برای این کار به کمک مساحت زیر نمودار، جابه‌جایی را در سه بازه زمانی‌ای که گفتیم، حساب می‌کنیم و بررسی می‌کنیم که بعد از هر جابه‌جایی، چندبار از $x = \pm 10 \text{ m}$ عبور کرده است!

$$1) \text{ بازه زمانی صفر تا } 1s: \Delta x_1 = S_1 = \frac{1 \times 1}{2} = 50 \text{ m} \Rightarrow x_1 = x_0 + \Delta x_1 = -25 + 50 = 25 \text{ m}$$



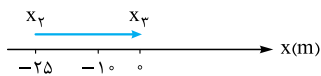
با توجه به اندازه جابه‌جایی در این بازه زمانی متحرک، 2 بار از 10 m متری مبدأ عبور کرده است.

$$2) \text{ بازه زمانی } 1s \text{ تا } 2s: \Delta x_2 = -S_2 = \frac{-(20 - 10) \times 10}{2} = -50 \text{ m} \Rightarrow x_2 = x_1 + \Delta x_2 = 25 - 50 = -25 \text{ m}$$



در بازه زمانی $1s$ تا $2s$ نیز، متحرک، 2 بار از 10 m متری مبدأ عبور کرده است.

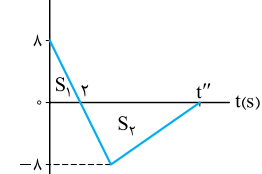
$$3) \text{ بازه زمانی } 2s \text{ تا } 3s: \Delta x_3 = S_3 = \frac{(25 - 20) \times 10}{2} = 25 \text{ m} \Rightarrow x_3 = x_2 + \Delta x_3 = -25 + 25 = 0$$



در این بازه متحرک، 1 بار از 10 m متری مبدأ عبور کرده است.

بنابراین در مجموع متحرک، 5 بار $(2+2+1)$ از 10 m متری مبدأ عبور کرده است.

۲۵۸. گزینه ۲ | گام اول: ابتدا با توجه به سرعت متوسط متحرک در t'' ثانیه اول $(0, t'')$ و مساحت زیر نمودار، مقدار t'' را حساب می‌کنیم:

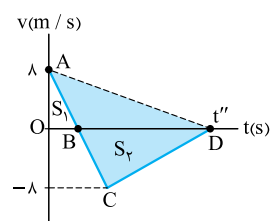


$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{S_1 - S_2}{t'' - 0} \Rightarrow -2/4 = \frac{8 \times 2 - \frac{1}{2}(t'' - 2)}{t''} \Rightarrow -2/4t'' = 8 - 4t'' + 8 \Rightarrow 1/6t'' = 16$$

$$\Rightarrow t'' = 10s$$

گام دوم: حالا که مقدار t'' را می‌دانیم، می‌توانیم با جمع مساحت‌های زیر نمودار، مسافت طی شده و بعد از آن تندی متوسط در این بازه را حساب کنیم:

$$\ell = S_1 + S_2 = \frac{8 \times 2}{2} + \frac{8 \times (10 - 2)}{2} = 8 + 32 = 40 \text{ m}, s_{av(0,10)} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{40}{10} = 4 \text{ m/s}$$



تکنیک در شکل روبه‌رو مساحت دو مثلث ABD و BCD با هم برابر است. چرا؟ چون قاعده هر دو مثلث BD و ارتفاع هر دو برابر 8 واحد است. پس می‌توانیم بنویسیم:

$$s_{av} = \frac{S_1 + S_2}{t'' - 0} = \frac{\text{مساحت مثلث } OAD}{t''} = \frac{8 \times t''}{t''} = 8 \text{ m/s}$$

۲۵۹. گزینه ۳ | بررسی عبارت‌ها:

(الف) در لحظه‌های $3s$ و $5s$ نمودار محور t را قطع کرده و در نتیجه سرعت تغییر علامت می‌دهد، پس جهت سرعت متحرک، 2 بار تغییر می‌کند. ✓
(ب) از $t = 3s$ تا $t = 5s$ که سرعت مثبت است، متحرک در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. باید بیشینه سرعت در این قسمت را به دست آوریم. با توجه به لحظه‌های $3s$ و $5s$ که در آن‌ها سرعت صفر می‌شوند، معادله سرعت - زمان را می‌نویسیم. این لحظه‌ها ریشه‌های معادله سرعت به ازای $v = 0$ هستند. پس داریم:

$$v = -(t - 3)(t - 5)$$

(علامت منفی به خاطر رو به پایین بودن سهمی است.)

$$t = \frac{3+5}{2} = 4s$$

همان‌طور که می‌دانید سهمی مورد نظر در لحظه وسط $3s$ تا $5s$ بیشینه می‌شود:



$$t = 4s \Rightarrow v_p = -(4 - 3)(4 - 5) = 1 \text{ m/s} \checkmark$$

پس در $t = 4s$ سرعت را به دست می‌آوریم:

پ) در تمام بازه زمانی صفر تا ۳ s علامت سرعت منفی است و متحرک فقط در یک جهت (منفی) حرکت کرده است. پس اندازه جابه‌جایی و مسافت طی شده در این بازه زمانی با هم مساوی است. در نتیجه اندازه سرعت متوسط و تندی متوسط با هم برابر است. *
 ت) کافی است $t = 6 \text{ s}$ را در معادله‌ای که به دست آوردیم، قرار دهیم:

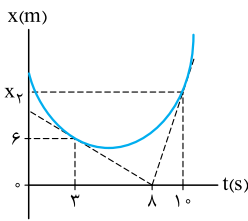
$$v_c = -(6-3)(6-5) = -3 \text{ m/s}$$

اندازه سرعت متحرک 3 m/s است و چون سرعت منفی است، متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. ✓
۲۶۰. گزینه ۱ گام اول: در نمودار مکان - زمان برای تشخیص سرعت اولیه باید شیب اولیه نمودار را نگاه کنیم:
 شیب اولیه نمودار A منفی است. ← سرعت اولیه متحرک A در جهت منفی محور x است.
 شیب اولیه نمودار B صفر است. ← سرعت اولیه متحرک B صفر است (از حال سکون شروع به حرکت کرده است).
 شیب اولیه نمودار C مثبت است. ← سرعت اولیه متحرک C مثبت است.

گام دوم: اگر نمودار مکان - زمان نقطه مینیمم داشته باشد (این شکلی: )، شتاب مثبت و اگر نقطه ماکسیمم داشته باشد (این شکلی: )، شتاب منفی است. پس علامت شتاب متحرک A مثبت و شتاب متحرک B و C منفی است.

گام سوم: در نقطه اکسترمم (ماکسیمم یا مینیمم) متحرک تغییر جهت می‌دهد. پس متحرک‌های A و C در یک لحظه معین تغییر جهت می‌دهند. با این حساب، عبارت «الف»، متحرک B ، عبارت «ب»، متحرک A و عبارت «پ»، متحرک C را توصیف می‌کند.

۲۶۱. گزینه ۴ گام اول: با توجه به شیب خط مماس، می‌توانیم سرعت متحرک در لحظه $t_1 = 3 \text{ s}$ را به دست آوریم. (اطلاعاتمان برای محاسبه شیب خط در لحظه $t_2 = 10 \text{ s}$ ناقص است.)



$$v_1 = (t_1 = 3 \text{ s}) \text{ شیب خط در لحظه} = \frac{0-6}{3-0} = -2 \text{ m/s} \Rightarrow \vec{v}_1 = (-2\hat{i}) \text{ m/s}$$

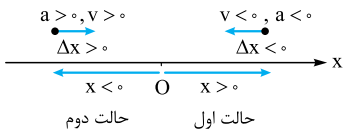
گام دوم: با توجه به داشتن شتاب متوسط متحرک در بازه زمانی $(3 \text{ s}$ تا $10 \text{ s})$ ، می‌توانیم v_2 (سرعت در لحظه t_2) را حساب کنیم:

$$\vec{a}_{av(3,10)} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow 0/\hat{i} = \frac{\vec{v}_2 - (-2\hat{i})}{10-3} \Rightarrow 0 = \vec{v}_2 + 2\hat{i} \Rightarrow \vec{v}_2 = (-2\hat{i}) \text{ m/s}$$

گام سوم: حالا با داشتن سرعت متحرک در لحظه t_2 ، می‌توانیم به کمک شیب خطی مماس در لحظه $t_2 = 10 \text{ s}$ ، بردار مکان را در این لحظه حساب کنیم:

$$v_2 = \frac{x_2 - 0}{10 - 8} \Rightarrow 4/4 = \frac{x_2}{2} \Rightarrow x_2 = 8/8 \text{ m} \Rightarrow \vec{x}_2 = (1\hat{i}) \text{ m}$$

۲۶۲. گزینه ۳ در صورت سؤال گفته شده که متحرک به طور تندی‌شونده (a و v هم‌علامت) در حال نزدیک شدن به مبدأ است. دو حالت ممکن برای متحرک را در شکل روبه‌رو رسم کردیم:



حالا به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱ درست: در حالت اول $a < 0$ و $x > 0$ و در حالت دوم $a > 0$ و $x < 0$ است یعنی بردار مکان و شتاب متحرک در خلاف جهت یکدیگر است.

۲ درست: با توجه به رابطه $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ و مثبت بودن Δt ، شتاب و تغییر سرعت یک متحرک همواره هم‌جهت‌اند.

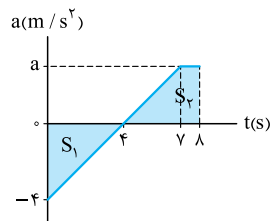
۳ نادرست: در حالت اول $a < 0$ و $\Delta x < 0$ و در حالت دوم $a > 0$ و $\Delta x > 0$ است بنابراین جابه‌جایی و شتاب این متحرک هم‌جهت‌اند.

۴ درست: چون حرکت متحرک تندی‌شونده است، سرعت و شتاب هم‌جهت‌اند (هم‌علامت‌اند).

تکلیک با توجه به این‌که جابه‌جایی و سرعت همواره هم‌جهت‌اند، **۳** و **۴** همدیگر را نقض می‌کنند یعنی اگر **۳** درست باشد، حتماً **۴** نادرست است و بالعکس. از طرفی طبق صورت تست حرکت متحرک تندی‌شونده است پس سرعت و شتاب هم‌جهت‌اند. با توجه به این موضوع، **۴** درست و **۳** نادرست است.

$$\frac{a}{|-4|} = \frac{4-4}{4-0} \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{0}{4} \Rightarrow a = 0 \text{ m/s}^2$$

۲۶۳. گزینه ۳ گام اول: به کمک تشابه مثلث‌ها، مقدار a را به دست می‌آوریم: **گام دوم:** ابتدا با توجه به نمودار، تغییرات سرعت را به دست می‌آوریم:



$$\Delta v = S_2 - S_1 = \frac{3 \times (1+4)}{2} - \frac{4 \times 4}{2} = 7.5 - 8 = -0.5 \text{ m/s}$$

گام سوم: حالا با داشتن سرعت اولیه و تغییرات سرعت، به راحتی می‌توانیم سرعت در $t = 8 \text{ s}$ را به دست آوریم:

$$\Delta v = v - v_0 \Rightarrow -0.5 = v - (-5) \Rightarrow -0.5 = v + 5 \Rightarrow v = -5.5 \text{ m/s}$$

گام چهارم: مطابق شکل در ثانیه هشتم (7 s تا 8 s) شتاب مثبت است، علامت سرعت هم که از ابتدا تا $t = 8 \text{ s}$ منفی است، بنابراین $av < 0$ و حرکت کندشونده است.

۲۶۴. گزینه ۴ گام اول: دقت کنید که با نمودار شتاب - زمان طرف هستیم و از روی نمودار مشخص است که در تمام بازه زمانی صفر تا 7 s حرکت شتابدار است یعنی در تمام این بازه حرکت یا تندی‌شونده است یا کندشونده. از این‌که سؤال گفته حرکت در بازه 5 s تا 7 s تندی‌شونده بوده است می‌فهمیم که از 2 s تا 5 s حرکت کندشونده بوده و در نتیجه در لحظه $t = 5 \text{ s}$ سرعت متحرک صفر شده و تغییر علامت داده است. یعنی داریم:

گام دوم: با توجه به شکل روبه‌رو برای محاسبه Δv ، مساحت زیر نمودار در بازه صفر تا 5 s را حساب می‌کنیم:

$$\Delta v_{(0,5)} = -S_1 + S_2 + S_3 \xrightarrow{S_1=S_2} \Delta v_{(0,5)} = S_2 = 4 \times (5-4) = 4 \text{ m/s}$$

حواستون باشه با توجه به نمودار، شتاب متحرک در مدت 2 s از -4 m/s^2 به صفر رسید. چون نمودار خطی است، 2 s هم طول می‌کشد تا شتاب آن از صفر به 4 m/s^2 برسد. بنابراین ابعاد مثلث‌های S_1 و S_2 کاملاً برابر و در نتیجه $S_1 = S_2$ است.