فهرست

فصل اول: هندسهٔ تحلیلی و جبر

درس اول: هندسهٔ تحلیلی ۸
درس دوم: معادلهٔ درجه‌دوم و تابع درجه ۲ ..... ۲۰
درس سوم: معادلات گویا و معادلات رادیکالی ۳۱

فصل دوم: هندسه

درس اول: ترسیم‌های هندسی ۴۰
درس دوم: استدلال ۴۵
درس سوم: قضیهٔ تالس ۴۸
درس چهارم: تشابه مثلث‌ها ۵۴

فصل سوم: تابع

درس اول: آشنایی با برخی از انواع تابع ۶۳
درس دوم: وارون یک تابع و تابع یک‌به‌یک ۷۳
درس سوم: اعمال جبری روی توابع ۸۱

فصل چهارم: مثلثات

درس اول: واحدهای اندازه‌گیری زاویه ۹۲
درس دوم: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی ۹۶
درس سوم: توابع مثلثاتی ۱۰۴

فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس اول: تابع نمایی و ویژگی‌های آن ۱۱۵
درس دوم: تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن ۱۲۰
درس سوم: نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی ۱۲۹

فصل ششم: حد و پیوستگی

درس اول: فرآیندهای حدی ۱۳۹
درس دوم: محاسبهٔ حد توابع ۱۴۵
درس سوم: پیوستگی ۱۵۳

فصل هفتم: آمار و احتمال

درس اول: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل ۱۶۴
درس دوم: آمار توصیفی ۱۷۸
پاسخ پرسش‌های دشوار ۱۸۹

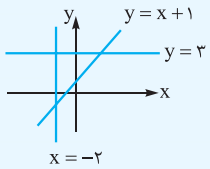
فصل ۱

هندسهٔ تحلیلی و جبر

درس ۱ هندسهٔ تحلیلی

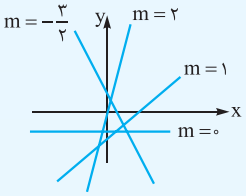
(یادآوری و تکمیل معادلهٔ خط)

خط راست، امتدادی است که از دو نقطه می‌گذرد. با داشتن دو نقطهٔ A و B از خط می‌توان شکل آن را رسم کرد.



معادلهٔ خط، رابطهٔ بین x و y است که در تمام نقاط خط برقرار می‌شود. معادلهٔ خط‌های مایل به صورت $y = ax + b$ و معادلهٔ خط افقی (موازی محور xها) به صورت $y = k$ و معادلهٔ خط قائم (موازی محورyها) به صورت $x = h$ است.

مقدار شیب، نشان می‌دهد که خط چه‌قدر مایل است (یعنی چه‌قدر به محورyها نزدیک است)، شیب (ضریب زاویهٔ یک خط) برابر است با نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$، یعنی $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

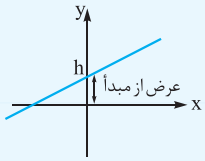


شیب خط افقی (موازی محورxها) برابر صفر است و شیب خط عمود، موازی محورyها تعریف نمی‌شود.

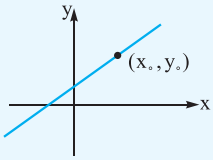
با توجه به شیب دو خط می‌توان بررسی کرد که آن دو خط نسبت به هم چگونه‌اند. دو حالت مهم داریم:

الف| اگر شیب‌ها برابر باشند، دو خط موازی‌اند. **ب|** اگر شیب‌ها، عکس و قرینهٔ هم باشند، دو خط بر هم عمودند. پس وقتی دو خط با شیب m_1 و m_2 داریم، می‌توان گفت: شرط موازی‌بودن: $m_1 = m_2$ و شرط عمودبودن: $m_1 m_2 = -1$

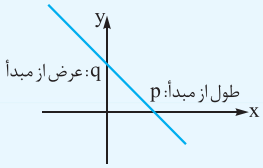
با داشتن شیب، می‌توان معادلهٔ خط را نوشت:



الف| اگر شیب و عرض از مبدأ را داشته باشیم، معادلهٔ خط $y = \underset{\text{شیب}}{m}x + \underset{\text{عرض از مبدأ}}{h}$ است.



ب| اگر شیب و یک نقطه از خط را داشته باشیم، معادلهٔ خط $y - y_0 = m(x - x_0)$ است.



یادآوری با داشتن طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط، معادلهٔ آن $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = ۱$ است.

مثلاً در خط به معادلهٔ $۲y + mx = ۳$، شیب برابر است با: $۲y = -mx + ۳ \Rightarrow y = -\frac{m}{۲}x + \frac{۳}{۲} \Rightarrow$ شیب $= -\frac{m}{۲}$

شیب، همان ضریب x است؛ البته باید y در طرف چپ تنها باشد.

اگر بخواهیم این خط با خط $y = ۲x + ۱$ موازی باشد، باید شیب آن‌ها برابر شود، یعنی $-\frac{m}{۲} = ۲$ پس $m = -۴$ است.

اگر بخواهیم این خط بر خط $y = \frac{۲}{۳}x - ۱$ عمود شود، باید شیب‌های آن‌ها عکس و قرینهٔ هم باشند، یعنی:

$$\underbrace{-\frac{m}{۲}}_{\text{شیب اولی}} \times \overbrace{\frac{۲}{۳}}^{\text{شیب دومی}} = -۱ \Rightarrow -\frac{m}{۳} = -۱ \Rightarrow m = ۳$$

توجه سه نقطهٔ A، B و C زمانی روی یک خط راست (بر یک استقامت) هستند که شیب پاره‌خط‌های AB، AC و BC برابر باشند.

پس مثلاً باید $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$ باشد.

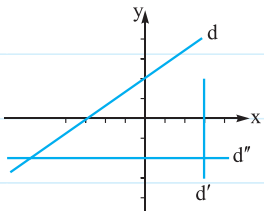
بنابراین اگر سه نقطهٔ $(-m+2,3)$ و $(-1,m)$ و $(2,1)$ روی یک خط راست باشند، داریم:

$$\frac{m-1}{-1-2} = \frac{3-1}{-m+2-2} \Rightarrow \frac{m-1}{-3} = \frac{2}{-m} \Rightarrow -m^2+m=-6 \Rightarrow m^2-m-6=0 \Rightarrow m=-2 \text{ یا } 3$$

به ازای $m=-2$ نقاط $(4,3)$، $(-1,-2)$ و $(2,1)$ روی خط $y=x-1$ هستند و به ازای $m=3$ نقاط $(-1,3)$، $(-1,3)$ و $(2,1)$ روی خط $2x+3y=7$ هستند.

پرسش‌ها

۱ **معادلهٔ خط‌های روبه‌رو را بنویسید.**



۲ **معادلهٔ خطی را بنویسید که:**

الف) از دو نقطهٔ $(-1,1)$ و $(1,2)$ عبور کند.

ب) با شیب ۳ از نقطهٔ $(1,2)$ بگذرد.

پ) از مبدأ مختصات با ضریب زاویهٔ $-\frac{1}{2}$ رسم شود.

۳ **در معادلهٔ $y=ax+b$، شیب خط برابر است با ..... .**

در معادله‌های $ax+by=c$ یا $ax+by+c=0$، شیب خط برابر است با ..... .

اگر طول از مبدأ و عرض از مبدأ را داشته باشیم، شیب خط برابر است با ..... .

اگر زاویهٔ خط با محورxها را داشته باشیم، شیب خط برابر است با ..... .

۴ **شیب خطی -2 است. این خط نسبت به خطوط زیر چه وضعی دارد؟ (موازی یا عمود یا متقاطع غیرعمود)**

الف) خطی با شیب ۳

ب) خطی با شیب $-\frac{1}{2}$

پ) خطی با شیب $\frac{1}{2}$

ت) خطی با شیب -2

۵ **کدام دو خط بر هم عمودند؟**

الف) $y=-2, x=1$

ب) $y=+\frac{1}{2}, y=-2$

پ) $y=\frac{2}{3}x, 4y+6x=11$

ت) $y=2x-1, x=2y-1$

۶ **الف)** شیب خط $۲kx - (k+۱)y = ۳$ چه‌قدر است؟

ب) به ازای کدام مقدار k، این خط موازی نیمساز ربع اول و سوم $(y = x)$ است؟

پ) به ازای کدام مقدار k، این خط بر خط $۳x - y = ۲$ عمود است؟

ت) به ازای $k = ۱$، خط مذکور را رسم کنید؛ نمودار آن از کدام نواحی می‌گذرد؟

ث) عرض از مبدأ آن به ازای $k = ۲$ چه‌قدر است؟

ج) به ازای کدام مقدار k، عرض از مبدأ آن $\frac{۱}{۳}$ است؟

۷ **رئوس مثلثی $A(۲,۳)$، $B(k,۱)$ و $C(-۱,۰)$ هستند. شیب اضلاع را حساب کنید. آیا مقداری از k وجود دارد که BC و AB بر هم عمود شوند؟ (یعنی $\hat{B} = ۹۰^\circ$ باشد.)**

۸ **دو سر پاره‌خط AB، نقاط $A(۳,۱)$ و $B(-۱,۲)$ هستند.**

الف) معادلهٔ خطی را بیابید که در نقطهٔ A بر پاره‌خط AB عمود شود؟

ب) معادلهٔ خطی را بیابید که از مبدأ به موازات AB رسم شود؟

۹ **طول از مبدأ و عرض از مبدأ خطی -۳ و ۵ هستند.**

الف) معادلهٔ این خط را بنویسید و شیب آن را تعیین کنید؟

ب) کدام نقطه روی این خط دارای عرض ۲ است؟

پ) نقطه‌ای با طول -۱ بر این خط بیابید؟

ت) این خط و محورهای مختصات چه مساحتی محصور می‌کنند؟

۱۰ به ازای کدام مقدار m، نقاط $(-۳,-۲)$، $(۲,۵)$ و $(m+۴,m-۱)$ روی یک خط راست‌اند؟

۱۱ از نقطهٔ $A(۳,۴)$ خطی بر $l: ۲x-y=۱$ عمود می‌کنیم. معادلهٔ این خط و مختصات پای قائم (محل عمودشدن) کدام است؟

(فاصلهٔ دو نقطه و نقطهٔ وسط پاره‌خط)

فاصلهٔ دو نقطه از هم یا طول پاره‌خط AB به صورت $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ برابر است با:

$$AB=\sqrt{(\Delta x)^۲+(\Delta y)^۲}=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}$$

پس فاصلهٔ یک نقطه تا مبدأ مختصات برابر است با: $OA=\sqrt{x_۱^۲+y_۱^۲}$

اگر دو نقطهٔ A و B دارای طول مساوی باشند: $AB=|y_۲-y_۱|$

و اگر دارای عرض مساوی باشند: $AB=|x_۲-x_۱|$

نقطهٔ وسط پاره‌خط AB، نقطه‌ای با مختصات $M(\frac{x_۱+x_۲}{۲},\frac{y_۱+y_۲}{۲})$ است. مثلاً در مثلثی با رئوس $A(۱,-۱)$، $B(۳,۱)$ و $C(۲,۴)$ داریم:

$$AB=\sqrt{(۳-۱)^۲+(۱-(-۱))^۲}=\sqrt{۴+۴}=۲\sqrt{۲}$$

$$AC=\sqrt{(۲-۱)^۲+(-۱-۴)^۲}=\sqrt{۲۶}\Rightarrow AC=\sqrt{(۲-۱)^۲+(۴-(-۱))^۲}=\sqrt{۲۶}$$

$$BC=\sqrt{(۲-۳)^۲+(۴-۱)^۲}=\sqrt{۱۰}$$

وسط ضلع AB نقطهٔ $M(\frac{۳+۱}{۲},\frac{۱+(-۱)}{۲})=(۲,۰)$ است؛ بنابراین طول میانهٔ CM برابر است با:

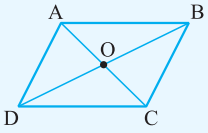
$$x_C=x_M\Rightarrow CM=|y_M-y_C|=۴-۰=۴$$

توجه در مورد مثلث، ۲ نکته داریم. یکی برای محاسبهٔ مساحت و دیگری برای مرکز ثقل (مختصات برخورد میانه‌ها)

۱) $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}|(x_B-x_A)(y_C-y_A)-(x_C-x_A)(y_B-y_A)|$

۲) $G=\frac{A+B+C}{۳}=(\frac{x_A+x_B+x_C}{۳},\frac{y_A+y_B+y_C}{۳})$

توجه در مورد متوازی‌الاضلاع ABCD، با توجه به شرط منصّف‌بودن قطرها، می‌توان ثابت کرد که:

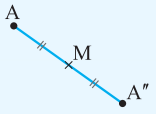


$$\frac{x_A+x_C}{۲}=\frac{x_B+x_D}{۲}=x_O$$

$$\frac{y_A+y_C}{۲}=\frac{y_B+y_D}{۲}=y_O$$

پس مثلاً در متوازی‌الاضلاع ABCD با رئوس $C(۳,۱)$، $B(۰,۲)$ و $A(۱,-۱)$ مختصات رأس D به صورت $D(۴,-۲)$ است تا شرط $A+C=B+D$ هم برای x و هم برای y برقرار شود.

توجه با استفاده از مفهوم نقطهٔ وسط پاره‌خط و قرینه می‌توان نشان داد که قرینهٔ نقطهٔ $A(x_۱,y_۱)$ نسبت به نقطهٔ $M(\alpha,\beta)$، نقطه‌ای با مختصات $A''(۲\alpha-x_۱,۲\beta-y_۱)$ است. بنابراین قرینهٔ نقطهٔ $A(x_۱,y_۱)$ نسبت به مبدأ نقطهٔ $A''(-x_۱,-y_۱)$ است.



پرسش‌ها

۱۲ دو نقطهٔ $A(۶,۷)$ و $B(۴,-۵)$ داده شده‌اند.

الف) فاصله‌های A، AB و B را پیدا کنید.

ب) وسط A و B چه مختصاتی دارد؟

پ) معادلهٔ عمودمنصف AB کدام است؟

۱۳ با استفاده از طول اضلاع و شیب‌ها، نشان دهید مثلث با رئوس $A(۸,۶)$، $B(۴,۸)$ و $C(۲,۴)$ قائم‌الزاویه است؟

۱۴ مثلث با رئوس $(۱,۶)$، $(۲,-۲)$ و $(-۳,-۱)$ چه نوعی است؟

۱۵ اگر دو رأس از مثلث متساوی‌الاضلاعی $(۳,۰)$ و $(-۱,۰)$ باشند، مختصات رأس سوم کدام است؟ با رسم شکل نشان دهید چرا مسئله دو جواب دارد؟

۱۶ دو سر قطری از یک دایره $A(-۱,۸)$ و $B(۵,-۲)$ هستند.

الف) مرکز دایره در کدام نقطه است؟

ب) شعاع دایره چه‌قدر است؟

پ) آیا نقطهٔ $(-۴,۶)$ روی این دایره است؟

ت) اگر نقطهٔ $(۱,k)$ روی این دایره باشد، k کدام است؟ **راهنمایی:** به تعریف دایره دقت کنید.

ث) این دایره روی محورyها، وتری با کدام طول ایجاد می‌کند؟ **راهنمایی:** نقاط برخورد با محور yها را پیدا کنید.

۱۷ **دو سر پاره‌خطی داده شده‌اند. معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط را بنویسید (یعنی معادلهٔ خطی که نقاط روی آن از دو سر پاره‌خط به یک فاصله‌اند).**

الف) $(۷,۴),(-۱,۲)$

ب) $(۱,۴),(۱,۷)$

پ) $(۲,-۱),(۰,-۱)$

ت) $(۴,-۲)$, مبدأ

ث) $(b,a),(a,b)$

ج) $(-a,a),(a,-a)$

۱۸ **مختصات نقطه‌ای که از سه نقطهٔ $C(۳,۳)$، $B(۶,۲)$ و $A(۸,-۲)$ به یک فاصله باشد، بیابید؟ (یک بار از مفهوم عمودمنصف استفاده کنید و یک بار نقطهٔ موردنظر را $M(\alpha,\beta)$ در نظر بگیرید و با شرط‌های $AM = BM = CM$ به معادله‌هایی برحسب α و β برسید.)**

توجه: این نقطه مرکز دایره‌ای است که از ۳ نقطهٔ A، B و C می‌گذرد.

۱۹ **مرکز و شعاع دایره‌ای که از نقاط $(۱,-۲)$، $(۰,۰)$ و $(-۲,-۴)$ می‌گذرد، بیابید.**

راهنمایی: ابتدا نشان دهید که این نقاط، سه رأس مثلث قائم‌الزاویه‌اند.

۲۰ **آیا نقاط زیر، رئوس یک متوازی‌الاضلاع‌اند؟**

الف) $(-۵,-۱),(۱,۲),(۵,۱),(-۲,-۱)$

ب) $(0,1),(-1,-2),(-3,k),(b,-1)$

۲۱ **سه رأس مستطیلی $C(0,9)$، $B(-4,-1)$ و $A(3,2)$ هستند. مختصات رأس چهارم را پیدا کنید. (ابتدا معلوم کنید در مثلث ABC کدام زاویه قائمه است؟)**

۲۲ **سه رأس از یک لوزی، نقاط $C(-8,-1)$، $B(-2,-7)$ و $A(6,7)$ هستند. رأس چهارم لوزی در کدام نقطه است؟ (اول معلوم کنید از بین AB، AC و BC کدام‌ها مساوی‌اند؟)**

الف) مساحت مثلث با رئوس $C(5,7)$، $B(1,-3)$ و $A(-5,1)$ کدام است؟

ب) مختصات نقطهٔ برخورد ۳ میانه و طول ارتفاع C را پیدا کنید.

پ) معادله و طول میانهٔ AM کدام است؟

۲۳ **قرینهٔ نقطهٔ $A(2,3)$ نسبت به نقطهٔ $M(-4,1)$ کدام است؟**

۲۴ **مرکز دایره‌ای $(2,3)$ و یک سر قطری از آن $(-1,2)$ است.**

الف) مختصات سر دیگر این قطر را بیابید.

ب) معادلهٔ قطری از این دایره که موازی خط $3x-2y=1$ باشد را بیابید.

۲۵ **وسط اضلاع مثلثی، نقاط $N(-1,1)$، $M(1,2)$ و $P(3,0)$ هستند.**

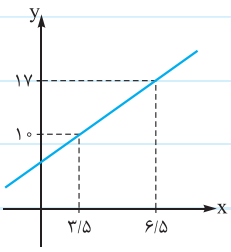
الف) مختصات مرکز ثقل را بیابید.

ب) با توجه به این‌که میانه‌ها در نقطهٔ مرکز ثقل به نسبت ۲ به ۱ متقاطع‌اند، مختصات رئوس را بیابید.

۲۶ قرینه و تصویر نقطهٔ $A(۳,-۱)$ را نسبت به خط $l: x-۲y=۱$ بیابید.

راهنمایی: ابتدا معادلهٔ خطی گذرنده از A و عمود بر را بنویسید، سپس نقطهٔ تلاقی آن خط و را بیابید.

۲۷ نمودار یک تابع خطی به صورت مقابل داده شده است.

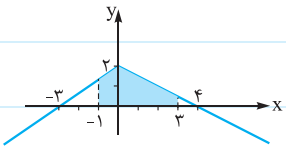


الف) عرض نقطه با طول ۵ چه‌قدر است؟

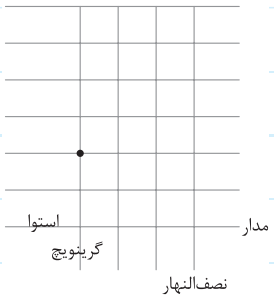
ب) میانگین مقادیر تابع در فاصلهٔ $[۵ / ۵,۶ / ۳]$ کدام است و در کدام طول رخ می‌دهد؟

پ) عرض نقطه با طول‌های ۵ ۲ و ۷ روی این خط را بیابید.

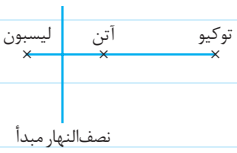
۲۸ مساحت رنگی در شکل مقابل کدام است؟



۲۹ با رسم مدارها و نصف‌النهارها، سطح کرهٔ زمین تقریباً مثل دستگاه مختصات می‌شود، مثلاً مرکز شهر تهران در طول جغرافیایی تقریبی ۵۱ و عرض جغرافیایی ۳۵ قرار دارد. اگر اختلاف یک واحدی طول یا عرض جغرافیایی ۱۱۲ کیلومتر باشد و مکه در طول و عرض جغرافیایی ۴۰ و ۲۱ باشد، فاصلهٔ طولی و عرضی و فاصلهٔ مستقیم تهران تا مکه را بیابید.



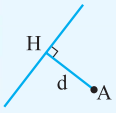
۳۰ عرض جغرافیایی شهرهای توکیو، آتن و لیسبون هر سه حدود ۳۶° است. طول جغرافیایی آن‌ها به ترتیب ۱۳۹° شرقی، ۲۱° شرقی و ۹° غربی است. فاصلهٔ این شهرها از هم چه‌قدر است؟



۳۱ دو پمپ بنزین در محله‌ای وجود دارد که مختصات قرارگیری آن‌ها به صورت (۴,۳) و (۸,۱) ثبت شده است. می‌خواهیم هر اتومبیل به مختصات مشخص به پمپ بنزین نزدیک‌تر برود. معادلهٔ خطی که مرز دو ناحیه برای انتخاب پمپ بنزین را نشان می‌دهد، کدام است؟

(فاصلهٔ نقطه از خط)

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0, y_0)$ از خط به معادلهٔ $ax + by + c = 0$ برابر است با:



$$d = AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

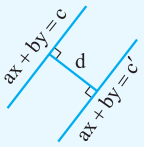
مثلاً فاصلهٔ نقطهٔ $(-1,1)$ از خط $3x - 4y - 2 = 0$ برابر است با:

$$\frac{|3(-1) - 4(1) - 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{9}{5} = 1/8$$

پس فاصلهٔ مبدأ مختصات از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$OH = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

برای محاسبهٔ فاصلهٔ دو خط موازی، باید اول معادلهٔ آن‌ها را به شکل $\begin{cases} ax + by = c \\ ax + by = c' \end{cases}$ (یعنی قسمت y و x دقیقاً یکسان و اعداد ثابت در یک طرف) درآوریم، پس فاصله برابر است با:



$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

بنابراین فاصلهٔ دو خط $2x - y = 6$ و $2x - y = -4$ از هم برابر است با $\frac{|6 - (-4)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$، یعنی $\frac{10}{\sqrt{5}}$ یا $2\sqrt{5}$.

پرسش‌ها

۳۲ فاصلهٔ نقطهٔ $P(-1,2)$ از خط به معادلهٔ $x - 2y - 6 = 0$ کدام است؟

۳۳ نقطه به طول ۳ روی خط $2x - y = 5$ از خط گذرنده از نقاط (۶,۱) و (۴,۰) به کدام فاصله است؟

۳۴ شیب و عرض از مبدأ خطی به ترتیب $\sqrt{3}$ و -2 هستند. مبدأ مختصات از این خط چه‌قدر فاصله دارد؟

۳۵ مساحت مربعی را حساب کنید که:

الف) رأسش $A(1,2)$ و معادلهٔ یک ضلع آن $x - y = 2$ باشد.

ب) یک رأسش $A(-1,1)$ و معادلهٔ یک قطرش $y=\frac{1}{2}x-1$ باشد.

پ) نقطهٔ برخورد دو قطرش $O(1,3)$ و معادلهٔ یک ضلع آن $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$ باشد.

ت) دو ضلع آن روی خطوط $y=2x-1$ و $4x-2y+1=0$ باشند.

۳۶ معادلهٔ دو قطر از دایره‌ای $x-y=1$ و $y-2x=7$ هستند.

الف) مرکز آن، کدام نقطه است؟

ب) اگر این دایره بر خط $x+y=6$ مماس باشد، شعاع آن کدام است؟

پ) خطوط با شیب ۲ به معادلهٔ $y=2x+m$ بر این دایره مماس‌اند. m را بیابید.

۳۷ دو نقطه روی خط $y=x-2$ هستند که فاصلهٔ آن‌ها از خط $3x-4y=1$ برابر ۱/۲ است. این نقاط را پیدا کنید.

۳۸ دو خط به معادلات $x-y=1$ و $x-y=-3$ بر دایره‌ای مماس‌اند. مساحت این دایره چه‌قدر است؟

۳۹ فاصلهٔ نقطهٔ $A(۳,-۱)$ را از خطوط زیر بیابید:

الف) $y = ۳$

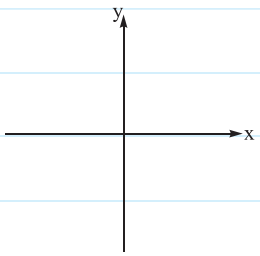
ب) $x = ۴$

پ) محورyها

ت) محورxها

در مورد فاصلهٔ نقطه از محورها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴۰ کدام نقاط در صفحهٔ مختصات وجود دارند که از دو محور به یک فاصله باشند؟



۴۱ دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۲ داریم. معادلهٔ خطوط مماس بر آن به صورت $x + by = c$ است. چه ارتباطی بین b و c وجود دارد؟

راهنمایی: فاصلهٔ مرکز از مماس برابر شعاع است.

۴۲ دو خط موازی $x - ۲y = ۱$ وجود دارند که از آن به فاصلهٔ $\sqrt{۵}$ باشند، معادلهٔ این دو خط را بیابید.

۴۳ نقطهٔ $M(x,y)$ طوری حرکت می‌کند که از دو خط $x - ۲y = ۱$ و $۲x + y = ۱$ به فاصلهٔ مساوی باشد. معادلهٔ مسیر حرکت M چگونه است؟

تعبیر هندسی این مسئله چیست؟

۴۴ طول از مبدأ و عرض از مبدأ خطی، مقادیر مثبت p و q هستند. فاصلهٔ مبدأ از این خط چه‌قدر است؟

۴۵ در مثلث با رئوس $A(1,-1)$، $B(3,2)$ و $C(-1,4)$، طول ارتفاع BH کدام است؟

۴۶ فاصلهٔ نقطهٔ $A(4,k)$ از خط $x-2y=1$ نصف فاصلهٔ آن از خط $x+y=3$ است. مقادیر k کدام‌اند؟

۴۷ معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $(3,-1)$ گذشته و فاصله‌اش از مبدأ مختصات $\sqrt{5}$ است. چرا مسئله دو جواب دارد؟

۴۸ دو خط $2x+y=1$ و $2y+x=3$ بر دایره‌ای مماس‌اند، اگر مرکز دایره روی نیمساز ربع اول باشد، شعاع آن را بیابید.

راهنمایی: فاصلهٔ مرکز دایره از ۲ خط مماس با هم مساوی است.

درس ۲

معادله درجه دوم و تابع درجه ۲

(روش تغییر متغیر برای حل معادله)

در سال‌های قبل، روش‌های دلتا، تجزیه، تبدیل به مربع کامل و ... را برای حل معادلهٔ درجه‌دوم دیدید. بعضی از معادله‌ها درجه‌دوم نیستند، اما قابل تبدیل به درجه‌دوم‌اند. یعنی اگر عبارتی را A بگیریم، قیافهٔ معادله شبیه درجه ۲ می‌شود.

معمولاً باید عبارتی که به توان ۲ می‌رسد را متغیر جدیدی بنامیم.

این معادله‌ها را ببینید:

$(\frac{x+1}{2x})^2-(\frac{x+1}{2x})-6=0$

$\frac{x+1}{2x}$ را بگیریم:

$\square^2-\square-6=0$

$\Rightarrow (u-3)(u+2)=0 \Rightarrow u=3$ یا -2

پس داریم:

$$\begin{cases} u=\frac{x+1}{2x}=3 \\ u=\frac{x+1}{2x}=-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=6x \Rightarrow x=\frac{1}{5} \\ x+1=-4x \Rightarrow x=-\frac{1}{5} \end{cases}$$

$(x^2-1)^2-11(x^2-1)+24=0$

x^2-1 را بگیریم:

$\square^2-11\square+24=0$

$\Rightarrow (u-3)(u-8)=0 \Rightarrow u=3$ یا 8

پس داریم:

$$\begin{cases} u=x^2-1=3 \\ u=x^2-1=8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \\ x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3 \end{cases}$$

$x^4-x^2-2=0$

x^2 را بنامیم:

$\square^2-\square-2=0$

$\Rightarrow (u+1)(u-2)=0 \Rightarrow u=-1$ یا 2

پس داریم:

$$\begin{cases} u=x^2=-1 \\ u=x^2=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{این امکان ندارد} \\ x=\pm\sqrt{2} \end{cases}$$

پرسش‌ها

۱ معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $x^4-3x^2+2=0$

ب) $x^4-3x^2-4=0$

پ) $x^{۴}+۳x^{۲}+۲=۰$

از مقایسهٔ این‌ها در مورد تعداد جواب‌های معادلهٔ $Ax^{۴}+Bx^{۲}+C=۰$ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۲ معادلهٔ درجه‌چهارمی بنویسید که ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ ریشهٔ متمایز داشته باشد. کدام امکان ندارد؟

۳ معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $x-۴\sqrt{x}+۳=۰$

ب) $x-۲\sqrt{x}-۳=۰$

پ) $x+۵\sqrt{x}+۴=۰$

از مقایسهٔ موارد بالا دربارهٔ تعداد جواب‌های معادلهٔ $Ax+B\sqrt{x}+C=۰$ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴ معادله‌های زیر را حل کنید و تعداد جواب هر کدام را مشخص نمایید.

الف) $x^{۴}-۶x^{۲}+۶=۰$

ب) $x^{\frac{۱}{۳}}+x^{\frac{۱}{۶}}-۶=۰$

پ) $x^{\frac{۲}{۳}} + x^{\frac{۱}{۳}} - ۶ = ۰$

ت) $۸x^{۶} + ۱ = ۷x^{۳}$

ث) $(x^{۲} - ۲x)^{۲} - ۶(x^{۲} - ۲x) - ۱۶ = ۰$

ج) $(x^{۲} - ۴x)^{۲} - ۲(x^{۲} - ۴x) - ۲۸ = ۰$

چ) $(۲x^{۲} - ۱)^{۲} = ۲x^{۲} - ۵$

ح) $۴^{x} + ۲^{x+۱} - ۸۰ = ۰$

(مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم)

در روش دلتا داشتیم که ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم با شرط $\Delta > ۰$ به صورت $x_۱ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a}$ و $x_۲ = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a}$ هستند. پس داریم:

$$x_۱ + x_۲ = \text{مجموع دو ریشه} = -\frac{b}{a}$$
$$x_۱ \times x_۲ = \text{ضرب دو ریشه} = \frac{c}{a}$$

البته معمولاً جمع ریشه‌ها را با S و ضرب ریشه‌ها را با P نشان می‌دهیم، پس $S = -\frac{b}{a}$ و $P = \frac{c}{a}$.

مثلاً در معادلهٔ $x^{۲} - ۷x + ۴ = ۰$، مجموع ریشه‌ها $S = -\frac{b}{a} = -\frac{-۷}{۱} = ۷$ و $P = \frac{c}{a} = \frac{۴}{۱} = ۴$ است. حالا می‌توان گفت چون جمع و ضرب هر دو مثبت هستند، پس هر دو ریشه مثبت‌اند.

در حالت کلی علامت S و P، علامت ریشه‌ها را نشان می‌دهد:

$S > ۰, P > ۰ \Leftrightarrow x_۱ > ۰, x_۲ > ۰$

$S > ۰, P < ۰ \Leftrightarrow x_۱ > ۰, x_۲ < ۰$ (قدرمطلق ریشهٔ مثبت از قدرمطلق ریشهٔ منفی بزرگ‌تر است.)

$S < ۰, P > ۰ \Leftrightarrow x_۱ < ۰, x_۲ < ۰$

$S < ۰, P < ۰ \Leftrightarrow x_۱ < ۰, x_۲ > ۰$ (قدرمطلق ریشهٔ منفی از قدرمطلق ریشهٔ مثبت بزرگ‌تر است.)

با کمک و می‌توانیم عبارت‌هایی که برحسب دو ریشهٔ متقارن باشند، به دست آوریم. مثلاً: $x_1^2 + x_2^2$ و $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ و ...

بعضی از این روابط را حفظ می‌کنیم:

$x_1^2 + x_2^2 =$ مجموع مربعات ریشه‌ها $= S^2 - 2P$

$x_1^3 + x_2^3 =$ مجموع مکعبات ریشه‌ها $= S^3 - 3PS$

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} =$ مجموع معکوس ریشه‌ها $= \frac{S}{P}$

$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} =$ مجموع جذر ریشه‌های مثبت $= \sqrt{S + 2\sqrt{P}}$

$|x_1 - x_2| =$ اختلاف ریشه‌ها $= \sqrt{S^2 - 4P}$

پس در معادلهٔ $2x^2 - 8x + 5 = 0$ داریم:

$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-8}{2} = 4$

$P = \frac{c}{a} = \frac{5}{2}$

$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = 4^2 - 2(\frac{5}{2}) = 16 - 5 = 11$

$x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS = 4^3 - 3(\frac{5}{2})(4) = 64 - 30 = 34$

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{S}{P} = \frac{4}{\frac{5}{2}} = \frac{8}{5}$

$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}} = \sqrt{4 + 2\sqrt{\frac{5}{2}}} = \sqrt{4 + \sqrt{10}}$

$|x_1 - x_2| = \sqrt{S^2 - 4P} = \sqrt{4^2 - 4(\frac{5}{2})} = \sqrt{16 - 10} = \sqrt{6}$

پرسش‌ها

۵ **در معادلهٔ درجه‌دوم $x^2 - 8x + 4 = 0$**

الف) واسطهٔ حسابی دو ریشه کدام است؟

ب) واسطهٔ هندسی مثبت دو ریشه کدام است؟

پ) مجموع معکوس دو ریشه کدام است؟

ت) علامت ریشه‌ها چگونه است؟

ث) اگر ریشه‌ها α و β باشند، حاصل $\alpha\beta^3 + \alpha^3\beta$ و $\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2}$ را بیابید.

۶ m را تعیین کنید که:

الف) در معادلهٔ $2x^2-(m+2)x-1=0$ دو ریشه قرینهٔ هم باشند.

ب) در معادلهٔ $(m+2)x^2-x-(2m-1)=0$ دو ریشه عکس هم باشند.

پ) در معادلهٔ $x^2-6x+m=0$ یک ریشه دو برابر دیگری باشد.

ت) در معادلهٔ $x^2-mx+4=0$ یک ریشه ۳ واحد بیشتر از ریشهٔ دیگر باشد.

ث) در معادلهٔ $2x^2-5x+m=0$ یک ریشه از ۳ برابر دیگری ۱ واحد بیشتر باشد.

نوشتن معادلهٔ درجه‌دوم

اگر ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$، مقادیر x_1 و x_2 باشند، تجزیه‌شدهٔ این معادله به صورت $a(x-x_1)(x-x_2)=0$ است. با کمی محاسبه داریم: $x^2-Sx+P=0$

پس اگر مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله را داشته باشیم، می‌توان معادله را نوشت؛ مثلاً اگر ریشه‌های معادله‌ای $1-\sqrt{7}$ و $1+\sqrt{7}$ باشند، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} S=1+\sqrt{7}+1-\sqrt{7}=2 \\ P=(1+\sqrt{7})\times(1-\sqrt{7})=1-7=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-\underset{\downarrow}{S}x+\underset{\downarrow}{P}=0$$

یعنی این معادله به صورت $x^2-2x-6=0$ بوده است.

البته در برخی مسائل، ریشه‌های معادله برحسب ریشه‌های معادلهٔ دیگر داده می‌شوند. مثلاً فرض کنید ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+4x+1=0$ مقادیر α و β باشند و ما بخواهیم معادله‌ای با ریشه‌های $2\alpha-1$ و $2\beta-1$ بسازیم. جمع ریشه‌های جدید برابر است با:

$$S=2\alpha-1+2\beta-1=\underbrace{2(\alpha+\beta)}_{S\text{ معادلهٔ اول}}-2=2\times(-\frac{4}{2})-2=-6$$

$$P=(2\alpha-1)\times(2\beta-1)=4\underbrace{\alpha\beta}_{P\text{ معادلهٔ اول}}-2\overbrace{(\alpha+\beta)}^{S\text{ معادلهٔ اول}}+1=4(\frac{1}{2})-2(-\frac{4}{2})+1=2+4+1=7$$

پس معادلهٔ موردنظر $x^2-Sx+P=x^2+6x+7=0$ است.

پرسش‌ها

۷ معادلهٔ درجه‌دومی با ریشه‌های زیر بسازید.

الف) $\frac{۲-\sqrt{۷}}{۴}$ $\frac{۲+\sqrt{۷}}{۴}$

ب) $-۲+\sqrt{۱۱}$ $-۲-\sqrt{۱۱}$

پ) یک ریشه‌اش $-۳+\sqrt{۵}$ باشد.

۸ دو عدد حقیقی با مجموع $-۲/۵$ و ضرب $۱/۵$ بیابید.

۹ مجموع دو عدد ۶ و ضرب آن‌ها ۷ است. این اعداد را بیابید.

۱۰ α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۳x+۱=۰$ هستند.

الف) معادله‌ای با ریشه‌های $\alpha-۱$ و $\beta-۱$ بسازید.

ب) معادله‌ای بسازید که ریشه‌هایش ۲ واحد بیشتر از ریشه‌های معادلهٔ اولیه باشند.

پ) معادله‌ای با ریشه‌های ۲α و ۲β بسازید.

ت) معادله‌ای بسازید که ریشه‌هایش یک واحد بیشتر از نصف هر ریشهٔ معادلهٔ اول باشند.

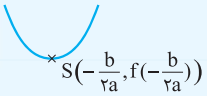
ث) معادله‌ای با ریشه‌های $\frac{۱}{\beta}-۱$ و $\frac{۱}{\alpha}-۱$ بسازید.

(ماکسیمم یا مینیمم سهمی)

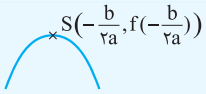
نمودار تابع درجه‌دوم $y = ax^۲ + bx + c$ به شکل یک سهمی است.

طول رأس این سهمی $x_S = -\frac{b}{۲a}$ (معادلهٔ دو ریشه) است.

برای به دست آوردن عرض رأس سهمی، x_S را در تابع قرار می‌دهیم.

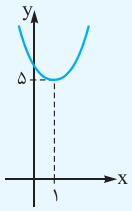


الف| اگر $a > ۰$ باشد، سهمی رو به بالا است و رأس آن مینیمم سهمی (کم‌ترین مقدار) است.



ب| اگر $a < ۰$ باشد، سهمی رو به پایین و رأس آن نقطهٔ ماکسیمم (بیشترین مقدار) است.

توجه با داشتن نقطهٔ رأس، معادلهٔ سهمی به صورت $y = a(x - x_S)^۲ + y_S$ نوشته می‌شود. برعکس اگر معادلهٔ سهمی به صورت $y = a(x - \alpha)^۲ + \beta$ باشد، رأس سهمی (α, β) است. مثلاً در سهمی $f(x) = x^۲ - ۲x + ۶$، طول نقطهٔ رأس $x_S = -\frac{(-۲)}{۲ \times ۱} = ۱$ و عرض آن $f(۱) = ۱ - ۲ + ۶ = ۵$ است و چون $a > ۰$ است، این عدد ۵ مینیمم سهمی است. نمودار سهمی هم به شکل روبه‌رو است:



پرسش‌ها

۱۱ **ماکسیمم یا مینیمم سهمی‌های زیر را بیابید.**

الف) $g(x) = -۲(x - ۱)^۲ + ۴$

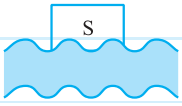
ب) $h(x) = (۲x - ۶)(x + ۱)$

پ) $k(x) = (۲x - ۱)^۲ + ۵$

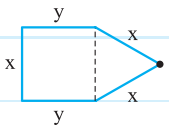
ت) $f(x) = -x^۲ + x + ۱$

۱۲ **بیشترین مقدار تابع $f(x) = ax^۲ + ۲۰x - ۱۲۰$ برابر ۱۸۰ است. مقدار a را بیابید (به علامت a دقت کنید).**

۱۳ **بیشترین مساحت به شکل مستطیل که با طنابی به طول ۷۲ متر در حاشیهٔ رودخانه محصور می‌شود، چه‌قدر است؟ (به ضلع چهارم مستطیل دسترسی نیست.)**



۱۴ **با یک سیم فلزی به طول ۶۰ سانتی‌متر، شکل روبه‌رو ساخته می‌شود. x را طوری انتخاب کنید که مساحت شکل، ماکسیمم باشد.**



۱۵ **توپی از زمین به بالا پرتاب می‌شود. ارتفاع آن t ثانیه بعد از پرتاب $h(t) = ۴۰t - ۵t^۲$ است.**

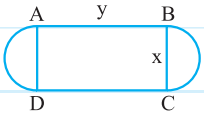
الف) چند ثانیه طول می‌کشد تا توپ به بالاترین نقطه برسد؟

ب) ارتفاع بالاترین نقطه کدام است؟

پ) در چه زمان‌هایی توپ تا زمین ۳۵ متر فاصله دارد؟

ت) چند ثانیه پس از پرتاب به زمین می‌رسد؟

۱۶ **محیط مستطیل $ABCD$ ثابت و برابر ۱۲۰ است. اگر دو نیم‌دایره به قطر AD و BD رسم شده باشند:**

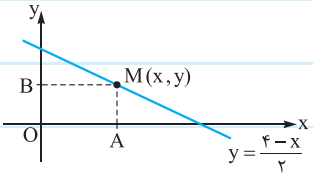


الف) محیط و مساحت کل شکل را به صورت تابعی از x بنویسید.

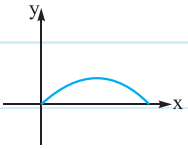
ب) x چه‌قدر باشد تا مساحت مستطیل حداکثر شود؟

پ) x چه‌قدر باشد تا مساحت کل شکل حداکثر شود؟

۱۷ **نقطهٔ $M(x,y)$ روی خط $y = \frac{۴-x}{۲}$ قرار دارد. اگر از M بر محورهای مختصات عمود کنیم، حداکثر مساحت مستطیل $OBMA$ کدام است؟**



۱۸ **مسیر حرکت یک توپ در صفحه با معادلهٔ $y = -\frac{۱}{۸}x^۲ + ۳۰x$ نشان داده شده است.**



الف) ارتفاع اوج توپ چه‌قدر است؟

ب) حداکثر برد توپ (فاصلهٔ برخورد با زمین از محل پرتاب) چه‌قدر است؟

۱۹ در توابع زیر، بیشترین یا کم‌ترین مقدار را بیابید.

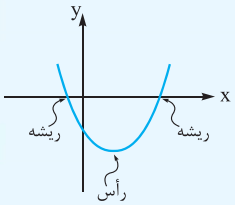
الف) $y=\sqrt{x^{۲}+۲x+۱۰}$

ب) $y=\frac{۲}{x^{۲}+۴x+۱۰}$

۲۰ نقطهٔ $A(x,y)$ روی نمودار تابع $y=x^{۳}-x^{۲}$ قرار دارد. شیب خطی که را به مبدأ مختصات وصل می‌کند، چه‌قدر است؟ در کدام نقطه مقدار این شیب مینیمم می‌شود؟ مینیمم مقدار شیب چه‌قدر است؟

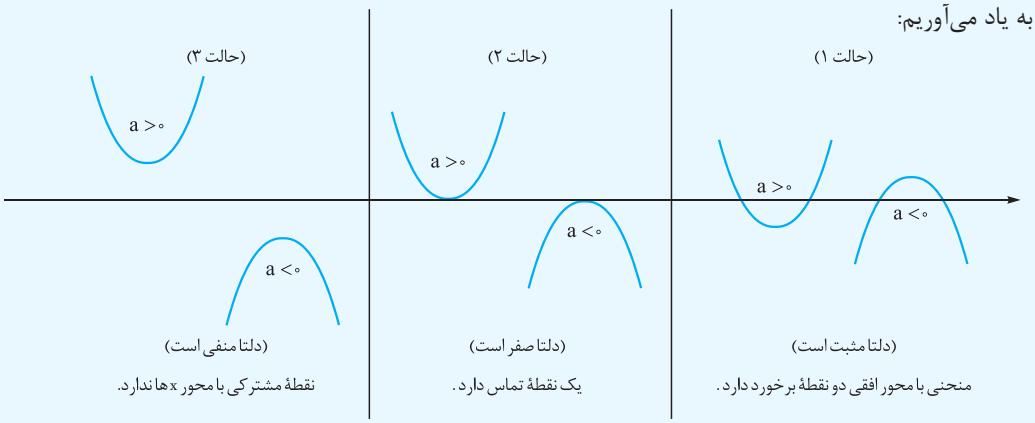
(صفرهای تابع درجه‌دوم)

نقاط برخورد تابع با محور xها را صفرهای تابع می‌نامیم. برای پیداکردن صفرهای تابع کافی است y را مساوی صفر قرار دهیم و طول نقاط برخورد نمودار با محورxها را پیدا کنیم. پس صفرهای تابع درجهٔ دوم، نقاطی هستند که $ax^{۲}+bx+c=۰$ می‌شود. پس با کمک Δ، و می‌توانیم در مورد صفرهای تابع درجه ۲ (یعنی محل برخورد آن با محور xها) نظر بدهیم.

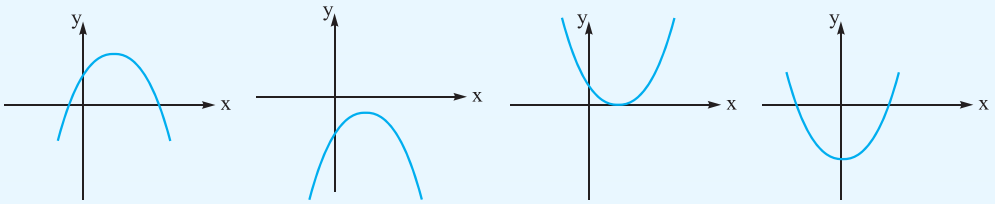


مثلاً در سهمی $y=x^{۲}-۶x-۲$ چون $\Delta>۰$ است دوتا نقطهٔ برخورد داریم و با توجه به $۶=$ و $-۲=$ ، یکی در طول‌های مثبت و دیگری در طول‌های منفی قرار دارد (و مقدار ریشهٔ مثبت، بزرگ‌تر است) راستی با توجه به >۰ این سهمی رو به بالا است و مینیمم دارد. پس تقریباً چنین شکلی دارد:

اثر دلتا و را در محور زیر به یاد می‌آوریم:



پس وقتی سهمی رو به بالا باشد، >۰ است و در سهمی رو به پایین <۰ است. برای ضرایب و هم می‌شود بررسی کرد. علامت ضریب دقیقاً از روی عرض نقطهٔ برخورد با محور yها معلوم می‌شود. اگر منحنی، محور yها را بالای مبدأ قطع کند >۰ است و اگر زیر مبدأ قطع کند <۰ است. اگر از مبدأ عبور کند هم $=۰$. مقدار از روی شیب مماس در محل برخورد با محورyها یا از روی x_S یا جمع ریشه‌ها معلوم می‌شود. این سهمی‌ها را ببینید:

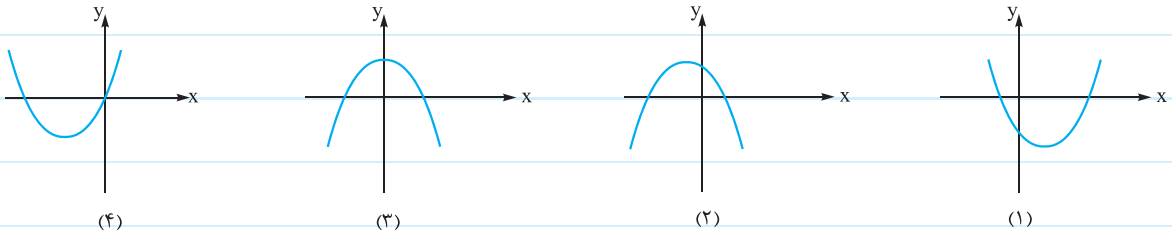


رو به بالا یا پایین	$\Leftarrow$	>0	>0	<0
وضعیت ریشه‌ها	$\Leftarrow$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
محل برخورد با محور y	$\Leftarrow$	<0	>0	<0
شیب مماس در $x=0$	$\Leftarrow$	$=0$	<0	>0

البته با داشتن نمودار دقیق سهمی می‌توانیم معادلهٔ دقیق آن را بنویسیم. معادله سهمی با ریشه‌های x_1 و x_2 به صورت $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ و با رأس (α,β) به صورت $y=a(x-\alpha)^2+\beta$ می‌باشد.

پرسش‌ها

۲۱ علامت a, b, c و Δ را در سهمی‌های زیر مشخص کنید.



۲۲ سهمی رسم کنید که در آن همهٔ مقادیر a, b, c و Δ منفی باشند.

۲۳ تابع با ضابطهٔ $y=ax^2+bx+c$ ریشه ندارد و $4a+c+2b<0$، ثابت کنید c منفی است.

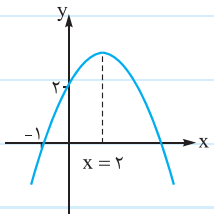
۲۴ چه شرط‌هایی لازم و کافی‌اند تا نمودار یک سهمی فقط از ناحیهٔ سوم نگذرد؟

۲۵ در چه صورت نمودار سهمی از ۴ ناحیه می‌گذرد؟

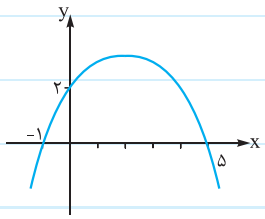
مثلاً m چه مقادیری داشته باشد تا نمودار $y=(m-۲)x^۲+\frac{x}{۲}+(۳+m)$ از ۴ ناحیه بگذرد؟

۲۶ معادلهٔ سهمی‌ها را بنویسید.

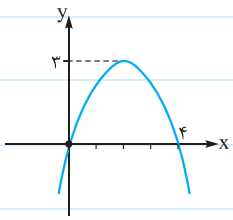
الف)



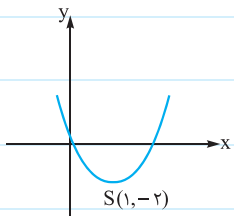
ب)



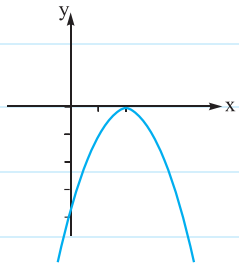
پ)



ت)



ث)



ج)