



آموزش نابرابری

ویژه‌ی داوطلبان المپیاد ریاضی

مؤلفان

ستاره آقای

ممسن اسکندری

محمد جعفری

علیرضا فلاح



انتشارات خوشخون

بی‌تگفتار ناتر

مسابقه‌ها، کنکورها و المپیادهای علمی نقش عمده‌ای را در بارور کردن و شکفتن استعدادهای دانش‌آموزان ایفا می‌کنند و باید به جرأت ادعا کرد که این مسابقات توانسته‌اند اعتماد به نفس لازم در جوانان عزیز کشورمان برای رقابت علمی با جوانان سایر نقاط جهان را تا حد زیادی افزایش دهند. کتاب‌های موجود در دوره‌های تحصیلی به هیچ عنوان نمی‌توانند دانش‌آموزان را برای آماده شدن در این رقابت‌ها اغنا کنند، لذا لازم است در کنار کتاب‌های درسی، خلأ موجود مخصوصاً برای دانش‌آموزان مستعد و ممتاز شناسایی و پر شوند. در همین راستا انتشارات خوشخوان با استعانت از حضرت حق تعالی و به کمک تنی چند از اساتید و دبیران ممتاز ایران و نیز فارغ‌التحصیلان دانشگاه‌های مختلف که اغلب آنان در زمانی نه چندان دور، مدال‌آور المپیادهای علمی در سطح ایران و جهان بوده‌اند، کتاب‌هایی را تألیف و به دانش‌آموزان ارائه می‌نماید. امید است موردپسند و استفاده دانش‌آموزان و دبیران این مرز و بوم قرار گیرند.

مقدمه مؤلف

یزدان پاک را سپاس می‌گوییم که توفیق نوشتن این اثر را یافتیم. این اثر جهت بالا بردن سطح علمی دانش‌پژوهان در زمینه‌ی نامساوی‌ها و آشنایی آن‌ها با تکنیک‌ها و ایده‌های جدیدی که در چند سال اخیر در سطح جهانی به آن‌ها پرداخت شده است، به تحریر در آمده است.

در فصل‌های اولیه‌ی کتاب به آموزش نابرابری‌ها و ایده‌های معروف (حسابی، هندسی، کوشی، هلدر، شور و . . .) تا سطح پیشرفته پرداخته‌ایم. در این فصل‌ها ابتدا با آموزش، سپس با تمرینات مربوطه و در نهایت با راهنمایی تمرینات مربوطه روبه‌رو خواهید شد. پس از آن به فصل تکنیک‌های جذاب در حل نامساوی‌ها خواهید رسید که در آن با تکنیک‌های کاربردی، اتحادهای متداول و روش به کار بردن مناسب عبارتهای جبری در حل نامساوی، آشنا خواهید شد. در نهایت کتاب را با تعدادی مسئله‌ی حل شده به انتها می‌رسانیم.

ما سعی کردیم مطالب، مسائل و تکنیک‌های مفید به کار رفته در کتاب‌هایی که در سال‌های اخیر در عرصه‌ی جهانی به چاپ رسیده است را در این کتاب بگنجانیم.

در نهایت از تمامی عزیزانی که ما را در چاپ این اثر یاری نموده‌اند تشکر می‌کنیم.

مولفان

فهرست مطالب

۱	نامساوی حسابی - هندسی	فصل ۱	
۱		نامساوی حسابی - هندسی	۱-۱
۴		چگونه از نامساوی حسابی - هندسی استفاده کنیم	۲-۱
۵۹		راهنمایی تمرینات	۳-۱
۶۹	نامساوی کوشی - شوارتز	فصل ۲	
۹۱		راهنمایی تمرینات	۱-۲
۹۷	نامساوی هولدر	فصل ۳	
۱۰۸		راهنمایی تمرینات	۱-۳
۱۱۱	دو تغییر متغیر کاربردی برای نامساوی‌های سه متغیره	فصل ۴	
۱۱۱		روش ABC	۱-۴
۱۱۵		روش pqr	۲-۴
۱۲۲		راهنمایی تمرینات	۳-۴
۱۲۵	نامساوی شور	فصل ۵	
۱۳۱		تعمیم نامساوی شور	۱-۵
۱۳۴		راهنمایی تمرینات	۲-۵
۱۳۷	روش مخلوط کردن متغیرها	فصل ۶	
۱۳۸		نامساوی‌های ۳ متغیره	۱-۶

۱۴۹	استفاده از تابع جدید برای حل مسئله	۲-۶
۱۵۷	تلاش برای تبدیل یکی از متغیرها به مقدار مرزی دامنه	۳-۶
۱۶۲	قضیه‌ی مخلوط کردن متغیرها (صورت قوی)	۴-۶
۱۷۰	بررسی توابع محدب و مقعر	۵-۶
۱۷۳	صورتی کلی‌تر از قضیه‌ی مخلوط کردن متغیرها	۶-۶
۱۷۷	معادل‌های دیگری از محدب بودن تابع	۷-۶
۱۸۱	استفاده از استقرا در حل مسائل	۸-۶
۱۸۳	استفاده از تقاضای متغیرها برای تغییر دادن متغیرها	۹-۶
۱۹۳	برخی تکنیک‌های خاص در مخلوط کردن متغیرها	۱۰-۶
۱۹۸	راهنمایی تمرینات	۱۱-۶

۲۰۵ آنالیز مربعات کامل (S.O.S) **فصل ۷** 

۲۳۲	راهنمایی تمرینات	۱-۷
-----	------------------	-----

۲۳۳ تکنیک‌های جذاب در حل نامساوی‌ها **فصل ۸** 

۲۹۳ مسائل حل شده **فصل ۹** 



نامساوی حسابی - هندسی

احتمالاً شما با نامساوی $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ آشنا هستید. این نامساوی حالت خاصی از نامساوی حسابی - هندسی است. نامساوی حسابی - هندسی یکی از پرکاربردترین نامساوی‌ها در المپیاد است، به طوری که در بسیاری از مسائل، در اثبات‌مان به آن نیاز پیدا می‌کنیم. در این فصل اول از همه، مثال‌هایی را حل می‌کنیم که شما را با نحوه‌ی استفاده از این نامساوی آشنا کند. بعد از آن با نگاه بهتری به حل مسائل می‌پردازیم و نامساوی‌ها را بر مبنای حالت تساوی استفاده می‌کنیم. در ادامه نیز به شما استفاده از تکنیک‌های مختلف مانند استفاده از فرض‌های مسئله یا تغییر متغیر و یا استفاده از ضرایب نامعین و ... را آموزش می‌دهیم. حال به بیان صورت نامساوی حسابی - هندسی می‌پردازیم.

نامساوی حسابی - هندسی ۱-۱

فرض کنید a_1, a_2, \dots, a_n عدد حقیقی و نامنفی باشند، در این صورت داریم:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

که صورت‌های مهم معادل آن عبارتند از:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \cdot \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^n \geq a_1 a_2 \dots a_n$$

حالت تساوی آن نیز زمانی رخ می‌دهد که: $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

نتایج مهم

۱. برای n عدد حقیقی و نامنفی مانند a_1, \dots, a_n با مجموع ثابت $(a_1 + a_2 + \dots + a_n = S)$

داریم:

حداکثر عبارت $a_1 a_2 \dots a_n$ برابر $(\frac{S}{n})^n$ است و این مقدار بیشینه زمانی اتفاق می‌افتد که

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{S}{n}$$

۲. برای n عدد حقیقی و نامنفی مانند a_1, \dots, a_n با حاصل ضرب ثابت $(a_1 a_2 \dots a_n = p)$ داریم:

حداقل عبارت $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ برابر $n \times \sqrt[n]{p}$ است و این مقدار کمینه زمانی اتفاق

$$\text{می‌افتد که } a_1 = a_2 = \dots = a_n = \sqrt[n]{p}$$

حالت‌های خاص

	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
فرض	$a, b \geq 0$	$a, b, c \geq 0$	$a, b, c, d \geq 0$
حالت اول	$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$	$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$	$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$
حالت دوم	$a+b \geq 2\sqrt{ab}$	$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$	$a+b+c+d \geq 4\sqrt[4]{abcd}$
حالت سوم	$(\frac{a+b}{2})^2 \geq ab$	$(\frac{a+b+c}{3})^3 \geq abc$	$(\frac{a+b+c+d}{4})^4 \geq abcd$
حالت تساوی	$a = b$	$a = b = c$	$a = b = c = d$

اثبات نامساوی حسابی - هندسی

این نامساوی اثبات‌های متعددی دارد. در اینجا یک اثبات با استفاده از استقرای ریاضی بیان می‌کنیم:

پایه استقرا:

$$\begin{aligned} n = 2 : \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} &\Leftrightarrow \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

که عبارت آخر با توجه به مربع کامل بودن، بدیهی است. در ضمن حالت تساوی زمانی است که

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0 \text{ یا به عبارتی } a = b \text{ باشد.}$$

گام استقرایی: فرض کنید برای هر n عدد حقیقی و نامنفی مانند a_1, \dots, a_n داشته باشیم

$$\begin{cases} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \\ \text{حالت تساوی} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n \end{cases}$$



قبل از اثبات گام استقرایی، لم زیر را ثابت می‌کنیم.

$$\frac{np^{n+1} + q^{n+1}}{n+1} \geq p^n q$$

لم:
اثبات لم:

$$\begin{aligned} \frac{np^{n+1} + q^{n+1}}{n+1} - p^n q &= \frac{1}{n+1} (np^n(p-q) - q(p^n - q^n)) \\ &= \frac{p-q}{n+1} (np^n - q(p^{n-1} + p^{n-2}q + \dots + q^{n-1})) \\ &= \frac{p-q}{n+1} ((p^n - p^{n-1} \times q) + (p^n - p^{n-2} \times q^2) + \dots + (p^n - q^n)) \\ &= \frac{(p-q)^2}{n+1} ((p^{n-1}) + (p^{n-2}(p+q)) + (p^{n-2} \times (p^2 + pq + q^2)) \\ &\quad + \dots + (p^n + p^{n-2} \times q + \dots + q^{n-1})) \end{aligned}$$

که به وضوح عبارت آخر نامنفی است و در ضمن حالت تساوی زمانی است که $p = q$ یا $p - q = 0$.

حال می‌خواهیم گام استقرایی را ثابت کنیم:

$$S_{n+1} = \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + a_{n+1}}{n+1} \geq \frac{n \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} + a_{n+1}}{n+1}$$

قرار دهید $a_1 a_2 \dots a_n = p^{n(n+1)}$ و $a_{n+1} = q^{n+1}$. در این صورت داریم:

$$S_{n+1} \geq \frac{np^{n+1} + a^{n+1}}{n+1} \geq p^n q = \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \dots a_{n+1}}$$

در ضمن حالت تساوی نیز زمانی است که:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \\ \text{فرض استقرا} \\ \Rightarrow (a_1 = a_2 = \dots = a_n) \Leftrightarrow \text{حالت تساوی} \\ \frac{np^{n+1} + q^{n+1}}{(n+1)} \geq p^n q \\ p = q \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a_1 = a_2 = \dots = a_n = a_{n+1}) \Leftrightarrow \text{حالت تساوی}$$

پس گام استقرایی ثابت شد و این نامساوی برای هر $n \in \mathbb{N}$ برقرار است.

چگونه از نامساوی حسابی - هندسی استفاده کنیم

۲-۱

برای عدد طبیعی n و عدد حقیقی و مثبت a نشان دهید:

$$na + 1 \geq (n + 1) \sqrt[n+1]{a^n}$$

مثال ۱-۱

حل:

$$\begin{aligned} na + 1 &= \underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ بار}} + 1 \geq (n + 1) \sqrt[n+1]{a \times a \times \dots \times a \times 1} \\ &= (n + 1) \sqrt[n+1]{a^n} \end{aligned}$$

برای اعداد حقیقی و مثبت x, y, z به طوری که $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$ ثابت کنید:

مثال ۲-۱

$$xyz \geq 27 \quad \text{(الف)} \quad xy + yz + zx \geq 27 \quad \text{(ب)} \quad x + y + z \geq 9 \quad \text{(ج)}$$

حل:

$$xyz = x^2 + y^2 + z^2 \geq 3\sqrt{x^2 y^2 z^2} \Rightarrow \sqrt{xyz} \geq 3 \Rightarrow xyz \geq 27 \quad \text{(الف)}$$

$$xy + yz + zx \geq 3\sqrt{(xy)(yz)(zx)} = \sqrt{x^2 y^2 z^2} \geq 3\sqrt{27} = 27 \quad \text{(ب)}$$

$$x + y + z \geq 3\sqrt{xyz} \geq 3\sqrt{27} = 9 \quad \text{(ج)}$$

فرض کنید a و b اعدادی طبیعی هستند. ثابت کنید:

مثال ۳-۱

$$\frac{ab(a^2 + b^2)}{a + b} \geq \sqrt[a+b]{a^3 b \cdot b^3 a}$$

حل:

$$\begin{aligned} ab(a^2 + b^2) &= b \times a^3 + a \times b^3 \\ &= \underbrace{a^3 + a^3 + \dots + a^3}_{b \text{ بار}} + \underbrace{b^3 + b^3 + \dots + b^3}_{a \text{ بار}} \\ &\geq (a + b) \sqrt[a+b]{a^3 \times a^3 \times \dots \times a^3 \times b^3 \times b^3 \times \dots \times b^3} \\ &= (a + b) \sqrt[a+b]{a^3 b \cdot b^3 a} \end{aligned}$$



برای اعداد حقیقی و طبیعی و مثبت a, b, c ثابت کنید:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

مثال ۴-۱

حل:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq (2\sqrt{ab})(2\sqrt{bc})(2\sqrt{ca}) = 8abc$$

برای اعداد حقیقی و مثبت a_1, a_2, \dots, a_n به طوری که $a_1 a_2 \dots a_n = 1$

مثال ۵-۱

ثابت کنید:

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq 2^n$$

حل:

$$\begin{aligned} (1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) &\geq (2\sqrt{a_1})(2\sqrt{a_2})\dots(2\sqrt{a_n}) \\ &= 2^n \sqrt{a_1 a_2 \dots a_n} = 2^n \end{aligned}$$

برای اعداد حقیقی و مثبت $x, y, z \geq 2$ ثابت کنید:

مثال ۶-۱

$$(y^3+x)(z^3+y)(x^3+z) \geq 125xyz$$

حل: چون $y \geq 2$ است پس $y^3 \geq 4y$ می‌باشد (عبارت‌های مشابه آن). از طرفی داریم:

$$4y+x = y+y+y+y+x \geq 5\sqrt[5]{y^4x}$$

و عبارت‌های مشابه آن نیز به همین شکل اثبات می‌شوند. حال داریم:

$$\begin{aligned} (y^3+x)(z^3+y)(x^3+z) &\geq (4y+x)(4z+y)(4x+z) \\ &\geq (5\sqrt[5]{y^4x})(5\sqrt[5]{z^4y})(5\sqrt[5]{x^4z}) \\ &= 125\sqrt[5]{x^5y^5z^5} = 125xyz \end{aligned}$$

برای اعداد حقیقی و مثبت a_1, a_2, \dots, a_n و b_1, b_2, \dots, b_n ثابت کنید:

مثال ۷-۱

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^n a_i} + \frac{1}{\prod_{i=1}^n b_i} \geq \frac{2^{n+1}}{\prod_{i=1}^n (a_i + b_i)}$$

حل: از آن جایی که $a_i + b_i \geq 2\sqrt{a_i b_i}$ داریم:

$$\prod_{i=1}^n (a_i + b_i) \geq 2^n \prod_{i=1}^n \sqrt{a_i b_i}$$

از طرفی طبق نامساوی حسابی - هندسی داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\prod_{i=1}^n a_i} + \frac{1}{\prod_{i=1}^n b_i} &\geq 2 \sqrt{\frac{1}{\prod_{i=1}^n a_i} \times \frac{1}{\prod_{i=1}^n b_i}} = 2 \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{1}{a_i b_i}} \\ \Rightarrow \left(\prod_{i=1}^n (a_i + b_i) \right) \left(\frac{1}{\prod_{i=1}^n a_i} + \frac{1}{\prod_{i=1}^n b_i} \right) &\geq \left(2^n \prod_{i=1}^n \sqrt{a_i b_i} \right) \left(2 \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{1}{a_i b_i}} \right) = 2^{n+1} \\ \Rightarrow \frac{1}{\prod_{i=1}^n a_i} + \frac{1}{\prod_{i=1}^n b_i} &\geq \frac{2^{n+1}}{\prod_{i=1}^n (a_i + b_i)} \end{aligned}$$

برای اعداد حقیقی و مثبت x, y و z به طوری که $x + y + z = 3$ ثابت کنید:

مثال ۸-۱

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq xy + yz + zx$$

حل:

$$\begin{aligned} 2(xy + yz + zx) &= (x + y + z)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 9 - x^2 - y^2 - z^2 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 2\sqrt{z} &\geq 2(xy + yz + zx) = 9 - x^2 - y^2 - z^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 2\sqrt{z} &\geq 9 \end{aligned}$$

از طرفی داریم: $x^2 + 2\sqrt{x} = x^2 + \sqrt{x} + \sqrt{x} \geq 3\sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = 3x$ (و عبارتهای مشابه آن). بنابراین داریم:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 2\sqrt{z} \geq 3x + 3y + 3z = 9$$

بنابراین مسئله ثابت می‌شود.

برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c ثابت کنید: a, b, c و a, b, c اضلاع مثلث هستند)

مثال ۹-۱

$$\frac{(b+c-a)^4}{a(a+b-c)} + \frac{(c+a-b)^4}{b(b+c-a)} + \frac{(a+b-c)^4}{c(c+a-b)} \geq ab + bc + ca$$



حل:

$$\begin{cases} \frac{(b+c-a)^4}{a(a+b-c)} + a(a+b-c) \geq 2\sqrt{\frac{(b+c-a)^4}{a(a+b-c)} \cdot a(a+b-c)} = 2(b+c-a)^2 \\ \frac{(c+a-b)^4}{b(b+c-a)} + b(b+c-a) \geq 2\sqrt{\frac{(c+a-b)^4}{b(b+c-a)} \cdot b(b+c-a)} = 2(c+a-b)^2 \\ \frac{(a+b-c)^4}{c(c+a-b)} + c(c+a-b) \geq 2\sqrt{\frac{(a+b-c)^4}{c(c+a-b)} \cdot c(c+a-b)} = 2(a+b-c)^2 \end{cases}$$

از جمع طرفین نامساوی بالا داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{(b+c-a)^4}{a(a+b-c)} + \frac{(c+a-b)^4}{b(b+c-a)} + \frac{(a+b-c)^4}{c(c+a-b)} + a^2 + b^2 + c^2 \\ & \geq 6(a^2 + b^2 + c^2) - 4(ab + bc + ca) \\ \Rightarrow & \frac{(b+c-a)^4}{a(a+b-c)} + \frac{(c+a-b)^4}{b(b+c-a)} + \frac{(a+b-c)^4}{c(c+a-b)} \\ & \geq 5(a^2 + b^2 + c^2) - 4(ab + bc + ca) \\ & \geq 5(ab + bc + ca) - 4(ab + bc + ca) = ab + bc + ca \end{aligned}$$

توجه کنید که نامساوی آخر، با توجه به نامساوی $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ به دست می‌آید. بنابراین مسئله حل می‌شود. یک نکته که احتمالاً در راه حل بالا از چشم شما دور مانده و خیلی مهم است، جلوگیری از ایجاد عبارت‌های منفی در نامساوی است. در اینجا ممکن بود $a + b - c$ منفی باشد، اما با توجه به شرط اضلاع مثلث بودن، این مشکل حل شده است.

مثال ۱۰-۱ a, b و c عددهایی طبیعی هستند، ثابت کنید:

$$3^{a+b+c} \geq \left(1 + \frac{b+c}{a}\right)^a \left(1 + \frac{c+a}{b}\right)^b \left(1 + \frac{a+b}{c}\right)^c$$

حل: با توجه به نامساوی حسابی هندسی داریم:

$$\begin{aligned} \frac{3}{a+b+c} &= \frac{\overbrace{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \dots + \frac{1}{a}\right)}^a + \overbrace{\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{b}\right)}^b + \overbrace{\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \dots + \frac{1}{c}\right)}^c}{a+b+c} \\ &\geq \sqrt[a+b+c]{\left(\frac{1}{a}\right)^a \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^b \cdot \left(\frac{1}{c}\right)^c} \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{a}{a+b+c}} \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{b}{a+b+c}} \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{c}{a+b+c}}$$

پس داریم:

$$\begin{aligned} 3^{a+b+c} &\geq (a+b+c)^{a+b+c} \left(\frac{1}{a}\right)^a \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^b \cdot \left(\frac{1}{c}\right)^c \\ &\geq \left(\frac{a+b+c}{a}\right)^a \cdot \left(\frac{a+b+c}{b}\right)^b \cdot \left(\frac{a+b+c}{c}\right)^c \\ &= \left(1 + \frac{b+c}{a}\right)^a \cdot \left(1 + \frac{c+a}{b}\right)^b \cdot \left(1 + \frac{a+b}{c}\right)^c \end{aligned}$$

برای اعداد طبیعی a, b, c و نشان دهید:

مثال ۱۱-۱

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c} \geq a^b \cdot b^c \cdot c^a$$

حل: بنابر نامساوی حسابی هندسی داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt[a+b+c]{a^b \cdot b^c \cdot c^a} &\leq \frac{\overbrace{(a+a+\dots+a)}^b + \overbrace{(b+b+\dots+b)}^c + \overbrace{(c+c+\dots+c)}^a}{a+b+c} \\ \Rightarrow a^b \cdot b^c \cdot c^a &\leq \left(\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}\right)^{a+b+c} \end{aligned}$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم:

$$\begin{aligned} \left(\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}\right)^{a+b+c} &\leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c} \\ \Leftrightarrow 3ab + 3bc + 3ca &\leq (a+b+c)^2 \\ \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

به ازای هر عدد طبیعی n به طوری که

مثال ۱۲-۱

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$(n-1)^{\frac{-1}{n-1}} < n - S_n$$

نشان دهید:



حل: بنابر نامساوی حسابی هندسی داریم:

$$\begin{aligned} \frac{n - S_n}{n - 1} &= \frac{(1 - 1) + (1 - \frac{1}{2}) + \dots + (1 - \frac{1}{n})}{n - 1} \\ &\geq n^{-1} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \dots (\frac{n-2}{n-1})(\frac{n-1}{n})} = (\frac{1}{n})^{\frac{1}{n-1}} \\ \Rightarrow n - S_n &\geq (n - 1)n^{-\frac{1}{n-1}} > (n - 1)^{-\frac{1}{n-1}} \\ \Rightarrow n - S_n &> (n - 1)^{\frac{-1}{n-1}} \end{aligned}$$

از آنجا که نامساوی حسابی هندسی را برای اعدادی به کار بردیم که با هم برابر نیستند، پس حالت تساوی نداریم.

مثال ۱۳-۱ n و k عددهایی طبیعی اند. نشان دهید:

$$n^{kn} \geq (n^k + n^{k-1} + \dots + 1)^{n-1}$$

حل: بنابر نامساوی حسابی هندسی داریم:

$$\begin{aligned} n^k &= \frac{(n^{k+1} - 1) + 1}{n} = \frac{(n - 1)(n^k + n^{k-1} + \dots + 1) + 1}{n} \\ &\geq \sqrt[n]{(n^k + \dots + n + 1)^{n-1} \cdot 1} \\ \Rightarrow n^{kn} &\geq (n^k + \dots + 1)^{n-1} \end{aligned}$$

مثال ۱۴-۱ n عددی طبیعی است. نشان دهید:

$$(\sqrt{2} - 1)(\sqrt[3]{6} - \sqrt{2}) \dots ({}^{n+1}\sqrt{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}) < \frac{n!}{(n+1)^n}$$

حل: با استفاده از نامساوی حسابی هندسی داریم:

$$\begin{aligned} &{}^{n+1}\sqrt{1 \times (\sqrt{2} - 1)(\sqrt[3]{6} - \sqrt{2}) \dots ({}^{n+1}\sqrt{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!})} \\ &< \frac{1 + (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt[3]{6} - \sqrt{2}) + \dots + ({}^{n+1}\sqrt{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!})}{n + 1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt[n+1]{(\sqrt{2}-1)(\sqrt[3]{6}-\sqrt{2})\dots(n+\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!})} < \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2}-1)\dots(n+\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}) < \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n!}{(n+1)^n}$$

از آن جا که نامساوی حسابی هندسی را برای اعدادی به کار بردیم که با هم برابر نیستند، پس حالت تساوی نداریم.

اکنون می‌خواهیم به بررسی تکنیک‌های مورد استفاده در نامساوی حسابی - هندسی بپردازیم.

۱. تبدیل کردن یک عبارت از نوع حسابی به عبارتی از نوع هندسی

برای اعداد حقیقی و مثبت a و b ، کم‌ترین مقدار ممکن برای $S = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ را بیابید.

مثال ۱۵-۱

اثبات:

$$S = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2$$

و زمانی که $a = b > 0$ باشد، مقدار S برابر ۲ می‌شود. پس جواب مسئله همان ۲ است.
حال می‌خواهیم مثال بالا را با داشتن دامنه‌های متفاوت بررسی کنیم.

برای عدد حقیقی و مثبت a به طوری که $a \geq 3$ ، کم‌ترین مقدار ممکن برای

مثال ۱۶-۱

$$S = a + \frac{1}{a}$$

اثبات نادرست:

$$S = a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2 \Rightarrow \min S = 2$$

علت: طبق حالت تساوی در نامساوی حسابی هندسی، $S = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{a}$ که در نتیجه $a = 1$ باید باشد و چون در فرض ما $a \geq 3$ است پس حالت $S = 2$ رخ نخواهد داد.
تلاش برای حدس زدن کم‌ترین مقدار ممکن S :

a	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	...	۳۰
$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$...	$\frac{1}{30}$
S	$3 + \frac{1}{3}$	$4 + \frac{1}{4}$	$5 + \frac{1}{5}$	$6 + \frac{1}{6}$	$7 + \frac{1}{7}$	$8 + \frac{1}{8}$	$9 + \frac{1}{9}$	$10 + \frac{1}{10}$	$11 + \frac{1}{11}$...	$30 + \frac{1}{30}$

از مشاهده‌ی جدول حدس می‌زنیم، کم‌ترین مقدار ممکن برای S در حالتی است که $a = 3$ باشد و

$$\text{در نتیجه } \min S = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3} \text{ باشد.}$$

حال با توجه به این‌که در نامساوی حسابی - هندسی، حالت تساوی زمانی است که همه‌ی متغیرها برابر باشند، برای این‌که در $a = 3$ ، کم‌ترین مقدار S به دست بیاید، باید در نامساوی‌هایی که به کار می‌گیریم،



$a = 3$ حالت تساوی تمام این نامساوی‌ها باشد. بنابراین نمی‌توانیم، نامساوی حسابی - هندسی را برای a و $\frac{1}{a}$ به کار بگیریم زیرا $\frac{1}{3} \neq 3$. برای رفع این مشکل ضرایبی را به متغیرها نسبت می‌دهیم. در این جا باید ضریب a را طوری تعیین کنیم که بتوانیم برای $(\alpha a, \frac{1}{a})$ نامساوی حسابی هندسی بزنیم.

$$\alpha a = \frac{1}{a} \stackrel{a=3}{\Rightarrow} \alpha = \frac{1}{9}$$

حال S را با توجه به ضریبی که به دست آوردیم، بازنویسی می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} S &= a + \frac{1}{a} = \left(\frac{1}{9} \times a + \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{9} \times a \\ \frac{1}{9}a + \frac{1}{a} &\geq 2\sqrt{\frac{1}{9} \times a \times \frac{1}{a}} = \frac{2}{3} \\ a \geq 3 &\Rightarrow \frac{1}{9} \times a \geq \frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S \geq \frac{10}{3}$$

و برای $a = 3$ ، مقداری S برابر $\frac{10}{3}$ می‌شود. پس $\frac{10}{3}$ جواب مسئله می‌باشد.

برای اعداد حقیقی و مثبت a و b به طوری که $a + b \leq 1$ ، کم‌ترین مقدار ممکن

مثال ۱۷-۱

برای $S = ab + \frac{1}{ab}$ را بیاید.

حل: نادرست:

$$S = ab + \frac{1}{ab} \geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{1}{ab}} = 2 \Rightarrow \min S = 2$$

علت: زیرا حالت تساوی برای زمانی است که $ab = \frac{1}{ab} \Leftrightarrow ab = 1$ که در آن صورت

$1 = \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \frac{1}{2}$ که به وضوح تناقض است. پس حالت $S = 2$ رخ نخواهد داد.

تلاش برای ساده‌سازی مسئله: توجه داشته باشید که S از دو متغیر a و b ساخته شده است. ما با

تغییر متغیر $t = \frac{1}{ab}$ یا $t = ab$ ، مسئله را به مسئله‌ای تک متغیره تبدیل می‌کنیم. با تغییر متغیر $t = \frac{1}{ab}$

داریم: $S = t + \frac{1}{t}$. حال وقتی که تغییر متغیر انجام دهیم، باید دامنه‌ی متغیر جدید را بیابیم:

$$t = \frac{1}{ab} \geq \frac{1}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \geq \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4$$

حال با توجه به این‌که متغیر t می‌تواند تمام مقادیر $(4, +\infty)$ را تولید کند، پس مسئله‌ی اولیه دقیقاً

معادل مسئله زیر می‌شود.

مسئله‌ی جدید: برای عدد حقیقی و مثبت t به طوری که $t \geq 4$ ، حداقل مقدار ممکن برای $S = t + \frac{1}{t}$ را بیابید.

حل: اولاً حدس می‌زنیم که مقدار مورد نظر به ازای $t = 4$ به دست آید. پس حالت تساوی در همه‌ی نامساوی‌ها باید $t = 4$ باشد. حال با توجه به روش ضریب‌گذاری، اگر بخواهیم برای $(at, \frac{1}{t})$ نامساوی حسابی - هندسی بزنیم باید داشته باشیم:

$$at = \frac{1}{t} \stackrel{t=4}{\Rightarrow} a = \frac{1}{16}$$

با توجه به ضریب به دست آمده، S را بازنویسی می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} S = t + \frac{1}{t} &= \left(\frac{1}{16} \times t + \frac{1}{t} \right) + \frac{15}{16} \times t \\ \frac{1}{16}t + \frac{1}{t} &\geq 2\sqrt{\frac{1}{16} \times t \times \frac{1}{t}} = \frac{1}{2} \\ t \geq 4 &\Rightarrow \frac{15}{16} \times t \geq \frac{15}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S \geq \frac{17}{4}$$

در ضمن برای $t = 4$ مقدار S دقیقاً برابر $\frac{17}{4}$ می‌شود. پس جواب مسئله همان $\frac{17}{4}$ است. اثبات مسئله‌ی اصلی بدون تبدیل به مسئله‌ای دیگر:

$$S = ab + \frac{1}{ab} = \left(ab + \frac{1}{16ab} \right) + \frac{15}{16ab} \geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{1}{16ab}} + \frac{15}{16\left(\frac{a+b}{4}\right)^2} \geq \frac{17}{4}$$

و برای $a = b = \frac{1}{4}$ مقدار S دقیقاً برابر $\frac{17}{4}$ می‌شود.

مثال ۱۸-۱ برای اعداد حقیقی و مثبت a ، b و c به طوری که $a + b + c \leq \frac{3}{4}$ کم‌ترین مقدار ممکن برای $S = a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ را بیابید. حل نادرست:

$$S = a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 6\sqrt[6]{abc \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} = 6 \Rightarrow \min S = 6$$

علت:

$$a = b = c = \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \Rightarrow a = b = c = 1$$

$$\Rightarrow a + b + c > \frac{3}{4} \text{ تناقض}$$



حل: حدس می‌زنیم حالت مینیمم برای $a = b = c = \frac{1}{4}$ باشد.

$$\begin{cases} a = b = c = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{\alpha a} = \frac{1}{\alpha b} = \frac{1}{\alpha c} = \frac{1}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{\alpha} = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha = 4$$

$$\Rightarrow S = a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$= (a + b + c + \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c}) + \frac{3}{4}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})$$

$$\begin{cases} a + b + c + \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c} \geq 6 \sqrt[3]{abc \cdot \frac{1}{4a} \cdot \frac{1}{4b} \cdot \frac{1}{4c}} = 3 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3 \times \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} = \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{3}{\frac{a+b+c}{3}} \geq \frac{3}{\frac{3}{4}} = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S \geq 3 + \frac{3}{4} \times 6 = \frac{15}{2}$$

برای $a = b = c = \frac{1}{4}$ نیز مقدار S برابر $\frac{15}{2}$ خواهد شد. پس جواب مسئله $\frac{15}{2}$ است.

مثال ۱۹-۱ برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c و به طوری که $a + b + c \leq \frac{3}{2}$ کم‌ترین مقدار

ممکن برای $S = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}}$ را بیابید.
حل نادرست:

$$S \geq 3 \sqrt[3]{\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} \times \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} \times \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}}} = 3 \sqrt[3]{(a^2 + \frac{1}{b^2})(b^2 + \frac{1}{c^2})(c^2 + \frac{1}{a^2})}$$

$$\geq 3 \sqrt[3]{(2\sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{b^2}})(2\sqrt{b^2 \cdot \frac{1}{c^2}})(2\sqrt{c^2 \cdot \frac{1}{a^2}})} = 3\sqrt[3]{8} = 3\sqrt[3]{8} \Rightarrow \min S = 3\sqrt[3]{8}$$

علت: برای این‌که همه‌ی نامساوی‌ها به تساوی تبدیل شوند باید داشته باشیم:

$$a = b = c = \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \Rightarrow a = b = c = 1 \Rightarrow a + b + c > \frac{3}{2} \quad \text{تناقض}$$

حل: حدس می‌زنیم حالت مینیمم برای $a = b = c = \frac{1}{4}$ باشد.

$$\begin{cases} a^2 = b^2 = c^2 = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{\alpha a^2} = \frac{1}{\alpha b^2} = \frac{1}{\alpha c^2} = \frac{1}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{\alpha} = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha = 16$$

حال S ، را با توجه به ضریب به دست آمده بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 S &= \sqrt{a^2 + \underbrace{\frac{1}{16b^2} + \dots + \frac{1}{16b^2}}_{16 \text{ مرتبه}}} + \sqrt{b^2 + \underbrace{\frac{1}{16c^2} + \dots + \frac{1}{16c^2}}_{16 \text{ مرتبه}}} + \sqrt{c^2 + \underbrace{\frac{1}{16a^2} + \dots + \frac{1}{16a^2}}_{16 \text{ مرتبه}}} \\
 &\geq \sqrt{17 \cdot \sqrt[16]{\frac{a^2}{16^{16}b^{22}}}} + \sqrt{17 \cdot \sqrt[16]{\frac{b^2}{16^{16}c^{22}}}} + \sqrt{17 \cdot \sqrt[16]{\frac{c^2}{16^{16}a^{22}}}} \\
 &= \sqrt{17} \left(\sqrt[16]{\frac{a}{16^8b^{16}}} + \sqrt[16]{\frac{b}{16^8c^{16}}} + \sqrt[16]{\frac{c}{16^8a^{16}}} \right) \\
 &\geq \sqrt{17} \times \left[3 \times \sqrt[16]{\sqrt[16]{\frac{a}{16^8b^{16}}} \times \sqrt[16]{\frac{b}{16^8c^{16}}} \times \sqrt[16]{\frac{c}{16^8a^{16}}}} \right] \\
 &= 3\sqrt{17} \cdot \sqrt[16]{\frac{1}{16^8a^8b^8c^8}} \\
 &= \frac{3\sqrt{17}}{2 \sqrt[16]{(2a \cdot 2b \cdot 2c)^8}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2 \sqrt[16]{\left(\frac{2a+2b+2c}{3}\right)^{15}}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2}
 \end{aligned}$$

برای $a = b = c = \frac{1}{4}$ مقدار S برابر $\frac{3\sqrt{17}}{2}$ خواهد شد. پس جواب مسئله $\frac{3\sqrt{17}}{2}$ می‌باشد.

۲. تبدیل کردن یک عبارت از نوع هندسی به عبارتی از نوع حسابی

در این روش نیز توجه به حالت تساوی بسیار مهم است یعنی باید با ضریب‌گذاری برای اعداد سعی کنیم تمام متغیرها را برابر کنیم. این ضریب‌گذاری می‌تواند با استفاده از فرض‌های مسئله و یا گذاشتن اعداد حقیقی به عنوان ضریب باشد. معمولاً با گذاشتن اعداد حقیقی به عنوان ضریب متغیرها حالت تساوی را ایجاد می‌کنیم. در بعضی مواقع نیز با اضافه کردن چند عدد به عبارت داده شده، تعداد متغیرها را برای نامساوی زدن، متناسب می‌کنیم.

مثال ۲۰-۱ برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c به طوری که $a + b + c = 1$ ، بیش‌ترین مقدار ممکن برای $S = \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}$ را بیابید.

حل نادرست:

$$\begin{cases}
 \sqrt{a+b} = \sqrt{(a+b) \times 1 \times 1} \leq \frac{(a+b) + 1 + 1}{3} \\
 \sqrt{b+c} = \sqrt{(b+c) \times 1 \times 1} \leq \frac{(b+c) + 1 + 1}{3} \\
 \sqrt{c+a} = \sqrt{(c+a) \times 1 \times 1} \leq \frac{(c+a) + 1 + 1}{3}
 \end{cases}$$



از جمع سه نامساوی بالا نتیجه می‌گیریم:

$$S = \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{b+c} + \sqrt[3]{c+a} \leq \frac{2(a+b+c) + 6}{3} = \frac{8}{3} \Rightarrow \max S = \frac{8}{3}$$

علت:

$$S = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ b+c=1 \\ c+a=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(a+b+c) = 3 \Rightarrow 1 = a+b+c = \frac{3}{2} \quad \text{تناقض}$$

پس S هیچ‌وقت نمی‌تواند مقدار $\frac{8}{3}$ را کسب کند، پس $\frac{8}{3}$ نمی‌تواند بیش‌ترین مقدار ممکن برای S باشد.

حل: حدس می‌زنیم حالت ماکزیمم برای $a=b=c=\frac{1}{3}$ باشد که در این صورت $a+b=b+c=c+a=\frac{2}{3}$ می‌کنیم:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{a+b} = \sqrt[3]{\frac{a}{\frac{1}{3}} \times \sqrt{(a+b) \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}}} \leq \sqrt[3]{\frac{a}{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{(a+b) + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{3} \right)} \\ \sqrt[3]{b+c} = \sqrt[3]{\frac{b}{\frac{1}{3}} \times \sqrt{(b+c) \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}}} \leq \sqrt[3]{\frac{b}{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{(b+c) + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{3} \right)} \\ \sqrt[3]{c+a} = \sqrt[3]{\frac{c}{\frac{1}{3}} \times \sqrt{(c+a) \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}}} \leq \sqrt[3]{\frac{c}{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{(c+a) + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{3} \right)} \end{cases}$$

از جمع طرفین سه نامساوی بالا داریم:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{b+c} + \sqrt[3]{c+a} \leq \sqrt[3]{\frac{a}{\frac{1}{3}}} \times \frac{2(a+b+c) + 4}{3} \\ &= \sqrt[3]{\frac{a}{\frac{1}{3}}} \times \frac{6}{3} = \sqrt[3]{18} \end{aligned}$$

برای $a=b=c=\frac{1}{3}$ نیز مقدار S برابر $\sqrt[3]{18}$ می‌شود. پس جواب مسئله $\sqrt[3]{18}$ می‌باشد.

مثال ۲۱-۱ برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c و به طوری که $a+b+c=3$ ، بیش‌ترین مقدار ممکن برای $S = \sqrt{a(b+2c)} + \sqrt{b(c+2a)} + \sqrt{c(a+2b)}$ را بیابید.

حل: حدس می‌زنیم حالت ماکزیمم برای $a=b=c=1$ برقرار باشد زیرا در عبارت‌هایی که نسبت به متغیرها متقارن هستند معمولاً (نه همیشه) حالت ماکزیمم (یا مینیمم) زمانی است که متغیرها برابر باشند.

با توجه به این که $a = b = c = 1$ داریم $a + 2b = 3 = c + 2a = b + 2c$. حال با توجه به حالت تساوی، نامساوی‌های زیر را استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{a(b+2c)} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \times \sqrt[3]{(3a)(b+2c) \times 3} \leq \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \times \left(\frac{(3a) + (b+2c) + 3}{3} \right) \\ \sqrt[3]{b(c+2a)} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \times \sqrt[3]{(3b)(c+2a) \times 3} \leq \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \times \left(\frac{(3b) + (c+2a) + 3}{3} \right) \\ \sqrt[3]{c(a+2b)} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \times \sqrt[3]{(3c)(a+2b) \times 3} \leq \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \times \left(\frac{(3c) + (a+2ab) + 3}{3} \right) \end{cases}$$

از جمع طرفین سه نامساوی بالا داریم:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt[3]{a(b+2c)} + \sqrt[3]{b(c+2a)} + \sqrt[3]{c(a+2b)} \leq \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \times \frac{6(a+b+c) + 9}{3} \\ &= \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \times 9 = 3\sqrt[3]{3} \end{aligned}$$

برای $a = b = c = 1$ نیز مقدار S برابر $3\sqrt[3]{3}$ خواهد شد.

مثال ۲۲-۱ برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c به طوری که $a \geq 2$ و $b \geq 6$ و $c \geq 12$,

بیشترین مقدار ممکن برای $S = \frac{bc\sqrt{a-2} + ca\sqrt{b-6} + ab\sqrt{c-12}}{abc}$ را بیابید.

$$\begin{cases} bc\sqrt{a-2} = \frac{bc}{\sqrt{4}} \sqrt{(a-2) \times 2} \leq \frac{bc}{\sqrt{4}} \times \frac{(a-2) + 2}{2} = \frac{abc}{2\sqrt{2}} \\ ca\sqrt{b-6} = \frac{ca}{\sqrt{9}} \sqrt{(b-6) \times 3 \times 3} \leq \frac{ca}{\sqrt{9}} \times \frac{(b-6) + 3 + 3}{3} = \frac{abc}{3\sqrt{3}} \\ ab\sqrt{c-12} = \frac{ab}{\sqrt{64}} \times \sqrt{(c-12) \times 4 \times 4 \times 4} \leq \frac{ab}{\sqrt{64}} \times \frac{(c-12) + 4 + 4 + 4}{4} \\ = \frac{abc}{8\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{حل:}$$

با توجه به نامساوی‌های بالا داریم:

$$S \leq \frac{1}{abc} \times \left(\frac{abc}{2\sqrt{2}} + \frac{abc}{3\sqrt{3}} + \frac{abc}{8\sqrt{2}} \right) = \frac{5}{8\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

حال برای این که در نامساوی‌های بالا حالت تساوی برقرار شود باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} a - 2 = 2 \\ b - 6 = 3 \\ c - 12 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 9 \\ c = 16 \end{cases}$$



برای اعداد $a = 4$, $b = 9$ و $c = 16$ نیز مقدار S برابر $\frac{1}{3\sqrt[3]{9}} + \frac{5}{8\sqrt[4]{2}}$ می‌شود.

مثال ۲۳-۱ ثابت کنید $1 + \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3+1}{3}} + \dots + \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} < n + 1$

حل:

$$\begin{aligned} \sqrt[k]{\frac{k+1}{k}} &= \sqrt[k]{\frac{k+1}{k} \times \underbrace{1 \times 1 \times \dots \times 1}_{\text{مرتبۀ } k-1}} \leq \frac{\frac{k+1}{k} + 1 + 1 + \dots + 1}{k} \\ &= \frac{\frac{k+1}{k} + (k-1)}{k} = 1 + \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} S &\leq 1 + \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \\ &= n + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \\ &< n + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \times n} \\ &= n + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= n + 1 - \frac{1}{n} < n + 1 \end{aligned}$$

مثال ۲۴-۱ ثابت کنید $2 < \sqrt[n]{1 + \frac{\sqrt[n]{n}}{n}} + \sqrt[n]{1 - \frac{\sqrt[n]{n}}{n}}$

حل:

$$\left\{ \begin{aligned} \sqrt[n]{1 + \frac{\sqrt[n]{n}}{n}} &= \sqrt[n]{\left(1 + \frac{\sqrt[n]{n}}{n}\right) \times \underbrace{1 \times 1 \times \dots \times 1}_{\text{بار } n-1}} \stackrel{*}{\leq} \frac{\left(1 + \frac{\sqrt[n]{n}}{n}\right) + (n-1)}{n} \\ &= 1 + \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2} \\ \sqrt[n]{1 - \frac{\sqrt[n]{n}}{n}} &= \sqrt[n]{\left(1 - \frac{\sqrt[n]{n}}{n}\right) \times \underbrace{1 \times 1 \times \dots \times 1}_{\text{بار } n-1}} < \frac{\left(1 - \frac{\sqrt[n]{n}}{n}\right) + (n-1)}{n} \\ &= 1 - \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2} \end{aligned} \right.$$

* نامساوی به صورت اکید می‌باشد زیرا حالت تساوی به وضوح برقرار نیست زیرا $1 + \frac{\sqrt[n]{n}}{n} \neq 1$. حال با توجه به نامساوی‌های بالا داریم:

$$\sqrt[n]{1 + \frac{\sqrt[n]{n}}{n}} + \sqrt[n]{1 - \frac{\sqrt[n]{n}}{n}} < \left(1 + \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}\right) + \left(1 - \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}\right) = 2$$

۳. نکاتی در مورد عبارت‌های دارای درجه‌ی یکسان

درجه‌ی یک عبارت: درجه‌ی عبارت $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ برابر است با $(\alpha + \beta + \gamma)$. حال از روی این تعریف مثال‌هایی برای عبارت‌های درجه ۳ بیان می‌کنیم:

$$a^3, b^3, c^3, a^2b, b^2c, c^2a, \frac{a^4}{b}, \frac{a^4}{c}, \frac{c^4}{a}, \frac{a^4}{a+b}, \frac{a^5}{(a+b)(a+c)}, \frac{a^6}{(a^2+bc)(b+c)}, \dots$$

درجه‌ی یک چندجمله‌ای: بزرگ‌ترین درجه در میان درجات جملات چندجمله‌ای، همان درجه‌ی چندجمله‌ای است. برای روشن شدن موضوع به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$F(a, b, c) = ab + bc + ac \Rightarrow 2 = F \text{ درجه‌ی}$$

$$G(a, b, c) = a^2b^2 + ab + bc + ac \Rightarrow 4 = F \text{ درجه‌ی}$$

$$H(a, b, c) = ab + a^2b + a^4bc + c^2a \Rightarrow 6 = F \text{ درجه‌ی}$$

چندجمله‌ای همگن: چندجمله‌ای است که درجه‌ی همه‌ی عبارت‌های آن برابر باشد مانند $F(a, b, c) = a^2b + a^3 + abc$.

بررسی یک مشکل: اگر $F(a, b, c)$ و $G(a, b, c)$ چندجمله‌ای‌های همگن و به ترتیب دارای درجات k و $k' \neq k$ باشد به طوری که آن وقت اگر دامنه‌ی ما R^+ باشد، نمی‌توان به طور قطع عبارت‌های $F(a, b, c) \geq G(a, b, c)$ و یا برعکس را بیان کرد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۲۵-۱ برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c ثابت کنید $a^{2000} + b^{2000} + c^{2000} \geq a + b + c$.

بررسی: فرض کنید مثال بالا برای هر $a, b, c > 0$ درست باشد. قرار دهید $a = b = c > 0$.

وقت باید داشته باشیم

$$3a^{2000} \geq 3a \Leftrightarrow a^{2000} \geq a \quad (\forall a > 0)$$

اما این رابطه فقط برای $a \in [1, +\infty)$ برقرار است و برای $a \in (0, 1)$ غلط می‌باشد. پس نتایج

زیر به دست می‌آیند.

۱. حکم بالا برای هر $a, b, c > 0$ غلط می‌باشد.
۲. اگر دامنه را به جای $a, b, c > 0$ قرار دهیم $a, b, c \geq 1$ آن وقت چون $a^{2000} \geq b$ و $b^{2000} \geq c$ نتیجه می‌شود $a^{2000} + b^{2000} + c^{2000} \geq a + b + c$.
۳. اگر دامنه را به جای $a, b, c > 0$ قرار دهیم $a, b, c \in (0, 1)$ آن وقت چون $a^{2000} < a$ و $b^{2000} < b$ و $c^{2000} < c$ نتیجه می‌شود $a^{2000} + b^{2000} + c^{2000} < a + b + c$.

نتیجه‌ای که از این بحث می‌گیریم این است که اگر $F(a, b, c)$ و $G(a, b, c)$ چند جمله‌ای‌های همگن با درجه‌ی متفاوت باشند برای این که بتوانیم رابطه‌ای بین آن‌ها بنویسیم باید دامنه‌ای به غیر از \mathbb{R}^+ داشته باشیم. توجه کنید مشکل بالا زمانی اتفاق می‌افتد که دو طرف همگن با درجه‌ی غیر یکسان باشند و دامنه نیز \mathbb{R}^+ باشد.

حال در ادامه مسائلی را مطرح می‌کنیم که درجه‌ی هر دو طرف نامساوی برابر باشد. ایده‌ی رایجی که در این مسائل استفاده می‌کنیم این است که نامساوی حسابی هندسی را با کمک طرفین نامساوی استفاده می‌کنیم. به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱-۲۶ برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c ثابت کنید $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$.

حل: توجه کنید درجه‌ی دو طرف نامساوی با هم برابر است. حال با استفاده از نامساوی حسابی - هندسی داریم:

$$\begin{cases} \frac{a^2}{b} + b \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b} \cdot b} = 2a \\ \frac{b^2}{c} + c \geq 2\sqrt{\frac{b^2}{c} \cdot c} = 2b \\ \frac{c^2}{a} + a \geq 2\sqrt{\frac{c^2}{a} \cdot a} = 2c \end{cases}$$

از جمع سه نابرابری بالا داریم:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + (a + b + c) &\geq 2(a + b + c) \\ \Rightarrow \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} &\geq a + b + c \end{aligned}$$

و با توجه به حالت تساوی نامساوی‌ها به وضوح داریم:
حالت تساوی $\Leftrightarrow a = b = c$

مثال ۲۷-۱ برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c ثابت کنید $\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq a + b + c$

حل: با استفاده از نامساوی حسابی - هندسی داریم:

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b^2} + b + b \geq 3\sqrt{\frac{a^3}{b^2} \cdot b \cdot b} = 3a \\ \frac{b^3}{c^2} + c + c \geq 3\sqrt{\frac{b^3}{c^2} \cdot c \cdot c} = 3b \\ \frac{c^3}{a^2} + a + a \geq 3\sqrt{\frac{c^3}{a^2} \cdot a \cdot a} = 3c \end{cases}$$

از جمع طرفین نامساوی‌های بالا داریم:

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} + 2(a + b + c) &\geq 3(a + b + c) \\ \Rightarrow \frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} &\geq a + b + c \end{aligned}$$

در ضمن با توجه به حالت تساوی نامساوی‌ها داریم:

$$\Leftrightarrow a = b = c$$

مثال ۲۸-۱ برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c ثابت کنید: $\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}$

حل: روش اول. لم: با توجه به دو مثال قبل داریم $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$

حال به نامساوی‌های حسابی - هندسی زیر که ما را سمت چپ نابرابری به سمت راست نابرابری

می‌رساند، توجه کنید:

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b^2} + a \geq 2\sqrt{\frac{a^3}{b^2} \cdot a} = 2\frac{a^2}{b} \\ \frac{b^3}{c^2} + b \geq 2\sqrt{\frac{b^3}{c^2} \cdot b} = 2\frac{b^2}{c} \\ \frac{c^3}{a^2} + c \geq 2\sqrt{\frac{c^3}{a^2} \cdot c} = 2\frac{c^2}{a} \end{cases}$$



از جمع طرفین نامساوی‌های بالا داریم:

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} + (a + b + c) \geq 2\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}$$

در ضمن با توجه به حالت تساوی نامساوی‌های بالا داریم:

$$\text{حالت تساوی} \Leftrightarrow a = b = c$$

$$x^3 + y^3 \geq xy(x + y) \quad (\forall x, y > 0) \quad \text{روش دوم. لم:}$$

اثبات اول لم:

$$\begin{cases} x^3 + x^3 + y^3 \geq 3\sqrt[3]{x^3 \cdot x^3 \cdot y^3} = 3x^2y \\ y^3 + y^3 + x^3 \geq 3\sqrt[3]{y^3 \cdot y^3 \cdot x^3} = 3y^2x \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3(x^3 + y^3) \geq 3(x^2y + xy^2) \Rightarrow x^3 + y^3 \geq xy(x + y)$$

اثبات دوم لم:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 + y^2 - xy) \geq (x + y)(2xy - xy) = xy(x + y)$$

حال به اثبات سؤال می‌پردازیم:

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b} + b = \frac{a^3 + b^3}{b^2} \geq \frac{ab(a + b)}{b^2} = \frac{a^2}{b} + a \\ \frac{b^3}{c} + c = \frac{b^3 + c^3}{c^2} \geq \frac{bc(b + c)}{c^2} = \frac{b^2}{c} + b \\ \frac{c^3}{a} + a = \frac{c^3 + a^3}{a^2} \geq \frac{ca(c + a)}{a^2} = \frac{c^2}{a} + c \end{cases}$$

از جمع طرفین سه نامساوی بالا داریم:

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} + (a + b + c) \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + (a + b + c)$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}$$

برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c ثابت کنید: $\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c$

مثال ۲۹-۱

حل: توجه کنید که درجه‌ی هر دو طرف نامساوی برابر ۱ می‌باشد.
 حال با استفاده از نامساوی حسابی - هندسی سعی می‌کنیم از سمت چپ نامساوی به سمت راست آن برسیم:

$$\begin{cases} \frac{a^3}{bc} + b + c \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{bc} \cdot b \cdot c} = 3a \\ \frac{b^3}{ca} + c + a \geq 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{ca} \cdot c \cdot a} = 3b \\ \frac{c^3}{ab} + a + b \geq 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{ab} \cdot a \cdot b} = 3c \end{cases}$$

با جمع طرفین نامساوی‌های بالا داریم:

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} + 2(a+b+c) &\geq 3(a+b+c) \\ \Rightarrow \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} &\geq a+b+c \end{aligned}$$

با توجه به حالت تساوی نامساوی‌های بالا داریم:

$$\Leftrightarrow \text{حالت تساوی} \quad a = b = c$$

مثال ۳۰-۱ برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c ثابت کنید: $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca$

حل: در این اثبات به نحوه استفاده از طرفین نامساوی دقت کنید:

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + bc \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b} \cdot \frac{b^3}{c} \cdot bc} = 3ab \\ \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} + ca \geq 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{c} \cdot \frac{c^3}{a} \cdot ca} = 3bc \\ \frac{c^3}{a} + \frac{a^3}{b} + ab \geq 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{a} \cdot \frac{a^3}{b} \cdot ab} = 3ca \end{cases}$$

با جمع طرفین نامساوی‌های بالا داریم:

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a}\right) + (ab + bc + ca) &\geq 3(ab + bc + ca) \\ \Rightarrow \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} &\geq ab + bc + ca \end{aligned}$$

در ضمن با توجه به حالت تساوی نامساوی‌های بالا داریم:

$$\Leftrightarrow a = b = c \text{ حالت تساوی}$$

مثال ۳۱-۱

برای اعداد حقیقی و مثبت a, b, c ثابت کنید: $\frac{a^5}{b^3} + \frac{b^5}{c^3} + \frac{c^5}{a^3} \geq \frac{a^4}{b^2} + \frac{b^4}{c^2} + \frac{c^4}{a^2}$

حل: با توجه به اینکه عبارت‌های هر دو طرف از درجه ۲ هستند، می‌توانیم برای نامساوی حسابی - هندسی از عبارت‌های درجه‌ی ۲ دیگر نیز استفاده کنیم زیرا خروجی نامساوی همچنان عبارتی از نوع درجه ۲ باقی خواهد ماند.

$$\begin{cases} \frac{a^5}{b^3} + \frac{a^5}{b^3} + \frac{a^5}{b^3} + \frac{a^5}{b^3} + b^2 \geq 5 \sqrt[5]{\left(\frac{a^5}{b^3}\right)^4 \cdot b^2} = 5 \frac{a^4}{b^2} \\ \frac{b^5}{c^3} + \frac{b^5}{c^3} + \frac{b^5}{c^3} + \frac{b^5}{c^3} + c^2 \geq 5 \sqrt[5]{\left(\frac{b^5}{c^3}\right)^4 \cdot c^2} = 5 \frac{b^4}{c^2} \\ \frac{c^5}{a^3} + \frac{c^5}{a^3} + \frac{c^5}{a^3} + \frac{c^5}{a^3} + a^2 \geq 5 \sqrt[5]{\left(\frac{c^5}{a^3}\right)^4 \cdot a^2} = 5 \frac{c^4}{a^2} \end{cases}$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{a^4}{b^2} + \frac{b^4}{c^2} + \frac{c^4}{a^2} &\geq a^2 + b^2 + c^2 \\ \begin{cases} \frac{a^4}{b^2} + b^2 &\geq 2 \sqrt{\frac{a^4}{b^2} \cdot b^2} = 2a^2 \\ \frac{b^4}{c^2} + c^2 &\geq 2 \sqrt{\frac{b^4}{c^2} \cdot c^2} = 2b^2 \\ \frac{c^4}{a^2} + a^2 &\geq 2 \sqrt{\frac{c^4}{a^2} \cdot a^2} = 2c^2 \end{cases} \\ \Rightarrow \frac{a^4}{b^2} + \frac{b^4}{c^2} + \frac{c^4}{a^2} + (a^2 + b^2 + c^2) &\geq 2(a^2 + b^2 + c^2) \\ \Rightarrow \frac{a^4}{b^2} + \frac{b^4}{c^2} + \frac{c^4}{a^2} &\geq a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned}$$

حال با توجه به حالات تساوی نامساوی‌های بالا نتیجه می‌گیریم برای حالت تساوی باید $a = b = c$

شود در ضمن اگر $a = b = c$ شود، حالت تساوی نیز برقرار خواهد شد. بنابراین

$$\Leftrightarrow a = b = c \text{ حالت تساوی}$$