بسم الله الرحمن الرحیم

برگی از درخت المپیاد فیزیک

المپیادهای فیزیک در ایران

(مرحله دوم)

از دوره ۱۲ تا کنون

مؤلف: علیرضا طهماسب زاده

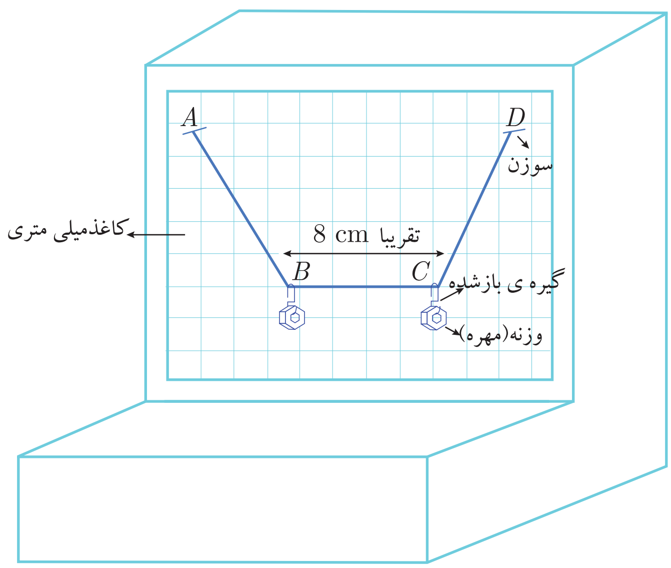
انتشارات خوشخوان

فهرست مطالب

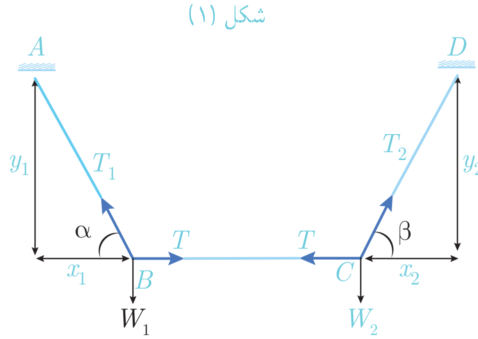
دورەی دوازدهم

آزمون عملی

به کمک مجموعه‌ای از ابزارهای ساده، می‌توان ترازویی مطابق شکل (۱) ساخت و به وسیله آن نسبت جرم مهره‌های آویخته شده را اندازه گرفت.



شکل (۱)



شکل (۲)

در شرایطی که مطابق شکل (۲) نخ در فاصله BC در راستای افقی قرارگرفته و تعادل مجموعه برقرار است، روابط زیر را می‌توان نوشت.

$$T_1 \cos\alpha = T = T_2 \cos\beta$$

$$T_1 \sin\alpha = m_1 g \ , \ T_2 \sin\beta = m_2 g$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{x_2}{y_2}$$

وسایل آزمایش:

پایه‌ی یونولیتی، کاغذ میلی‌متری، مقداری نخ، چهار سوزن، چهار گیره‌ی کاغذ، شش پونز، یک مهره‌ی چهارگوش و یک مهره‌ی شش‌گوش.

شرح آزمایش:

ابتدا کاغذ میلی‌متری را به کمک یکی از سوزن‌ها از یکی از گوشه‌های بالای آن به پایه‌ی یونولیتی متصل کنید.

یکی از مهره‌ها را به کمک نخ از این سوزن آویزان کنید. با این ابزار، به کمک پونز، کاغذ میلی‌متری را طوری روی یونولیت ثابت کنید که خط‌های افقی کاغذ موازی سطح افق باشد.

روش خود را برای انجام این کار توضیح دهید.

حال تکه نخی به طول تقریبی $20\mathrm{cm}$ بردارید. دو گیره‌ی کاغذ را چنان که در شکل (۱) می‌بینید باز کنید. نخ را از دو نقطه‌ی میانی (نقاط B و C) به گیره‌ها گره بزنید. هر سر نخ را به یک سوزن گره بزنید. از دو سوزن به عنوان تکیه‌گاه‌های A و D استفاده کنید. یکی از آنها را در یک گوشه‌ی کاغذ میلی‌متری (صفحه یونولیتی) در مکانی مناسب فرو کنید. این تکیه‌گاه (A) را تا آخر آزمایش ثابت نگه دارید. حال مکان تکیه‌گاه D را چنان تعیین کنید که نخ BC افقی قرار گیرد. در این حال سر سوزن دیگر (تکیه‌گاه D) را نیز در صفحه یونولیتی فرو کنید. توجه کنید که برای برقراری تعادل و افقی شدن BC، برای مکان D بیش از یک جواب پیدا می‌شود.

نکته ۱: هنگام فرو کردن سوزن دوم (تکیه‌گاه D)، مراقب باشید BC افقی مانده باشد.

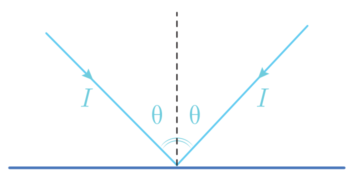
نکته ۲: نیازی نیست A و D روی یک خط افقی قرار گیرند.

مقادیر x_1، x_2، y_1 و y_2 را اندازه‌گیری کنید و در جدول (در پاسخ‌نامه) ثبت کنید. این آزمایش را سه بار دیگر (برای سه نقطه‌ی متفاوت D) تکرار کنید و خانه‌های خالی پاسخ‌نامه را پر کنید. m_1 جرم مهره شش‌گوش، و m_2 جرم مهره چهارگوش است. جرم مهره چهارگوش $3\mathrm{gr}$ است.

«۱۸ نمره»

آزمون نظری وقت آزمون: ۱۸۰ دقیقه

۱ انرژی نورانی‌ای که در واحد زمان به واحد سطح عمود بر جهت تابش می‌تابد، شدت نور نامیده می‌شود. در اثر بازتابش نور از آینه، فشاری بر آن وارد می‌شود که فشار تابش نام دارد. اگر مطابق شکل پرتو نوری به شدت I، با زاویه‌ی تابش θ، بر سطح آینه بتابد، فشاری معادل با $\frac{2I}{c}\cos^2\theta$ بر آینه وارد می‌شود. در این رابطه c سرعت نور در خلأ و برابر با $c = 3\times10^8\text{m/s}$ است.



یک بادبان خورشیدی یک آینه‌ی بسیار سبک است. نیروی محرک سفینه‌ی بادبانی، ناشی از تابش نور خورشید از بادبان آن است. توان خورشید (انرژی تابیده شده از خورشید بر واحد زمان، $L = 4\times10^{26}\text{W}$ است.

الف) فرض کنید یک سفینه‌ی بادبانی در فاصله‌ی $2\times10^{11}\text{m}$ از خورشید است. اگر نور خورشید عمود بر سطح بادبان بتابد، چه نیرویی بر یک مترمربع از بادبان وارد می‌شود؟

ب) در این فاصله، بادبان چه مساحتی داشته باشد تا فشار تابش، نیروی گرانشی خورشید را خنثی کند؟ جرم واحد سطح بادبان 0.5g/m^2، جرم سفینه 20kg، جرم خورشید $M_s = 2\times10^{30}\text{kg}$ و ثابت جهانی گرانشی $G = 7\times10^{-11}\text{Nm}^2/\text{kg}^2$ است.

ج) اگر فاصله‌ی سفینه از خورشید دو برابر شود، مساحت بادبان چه مقدار تغییر کند، تا شرایط قسمت (ب) برقرار بماند؟

د) فرض کنید وضعیت بادبان طوری تنظیم شود که در تمام مدت حرکت، نور خورشید عمود بر آن بتابد. اگر در قسمت (ب) سرعت اولیه‌ی سفینه V_0 باشد، مسیر حرکت آن چگونه است؟

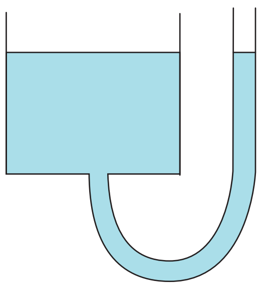
«۱۰ نمره»

۲ یک تار نوری مستقیم به طول $l = 80\text{m}$، از شیشه‌ای با ضریب شکست $n = 1.36$ ساخته شده است. در یک انتهای تار، چشمه‌ی نقطه‌ای S روی محور آن قرار دارد و علائم نوری را به فاصله زمانی Δt از یکدیگر می‌فرستد. هنگام ارسال هر علامت نوری، چشمه‌ی S در بازه‌ی زمانی بسیار کمتر از یک نانوثانیه (10^{-9}s) روشن است و سپس خاموش می‌شود. به دلیل اختلاف زمان رسیدن پرتوهایی که با زاویه‌های مختلف وارد تار می‌شوند، علامت نوری، پهن می‌شود، یعنی هنگام دریافت علامت از طرف

دیگر تار، عرض زمانی بیشتری نسبت به هنگام ارسال آن خواهد داشت. معین کنید بازه‌ی زمانی ارسال علائم، Δt، حداقل چقدر باشد، تا گیرنده بتواند علائم دریافت شده را به خوبی از هم تفکیک کند؟

«۶ نمره»

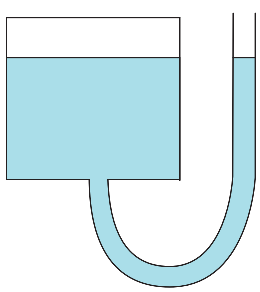
۳ یک لوله‌ی U شکل به قطر d، مطابق شکل



شکل (۱)

الف)

اکنون فرض کنید پیش از ریختن آب در لوله، بالای ظرف استوانه‌ای را مطابق شکل بسته‌ایم. با ریختن آب در لوله، سطح جیوه در ظرف، به اندازه‌ی x بالا می‌آید که x از L' بسیار کوچک‌تر است، یعنی $\frac{x}{L'} \ll 1$.



شکل (۲)

ب) برای $\epsilon \ll 1$ داریم:

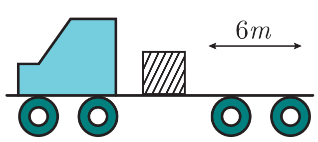
$$\frac{1}{1-\epsilon} \approx 1+\epsilon$$

با استفاده از این تقریب، فشار هوای بالای جیوه در ظرف را بر حسب x به‌دست آورید.

ج) ارتفاع آب در لوله را به‌دست آورید.

«۱۲ نمره»

۴ مطابق شکل جعبه‌ای روی کف یک تریلی

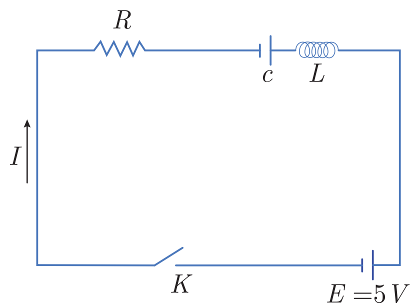


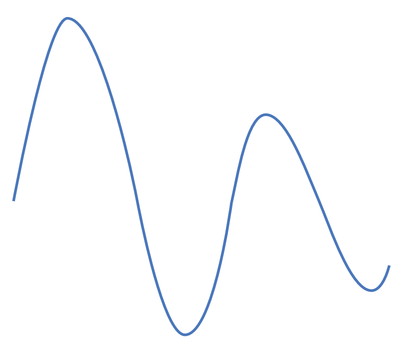
الف)

ب) اگر تریلی به مدت $2\mathrm{s}$ با شتاب تندکننده‌ی $4\mathrm{m/s^2}$ حرکت کند، و پس از آن سرعت تریلی ثابت بماند، جعبه با چه سرعتی نسبت به زمین، تریلی را ترک می‌کند؟

«۸ نمره»

۵ مداری مطابق شکل از یک مقاومت R،





الف)

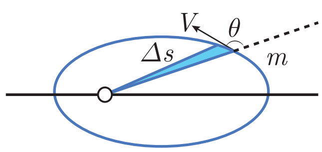
ب) با استفاده از اطلاعات نمودار در لحظه t_2، مقدار C را محاسبه کنید.

ج) با استفاده از اطلاعات نمودار در لحظه t_1، مقدار R را محاسبه کنید.

د) با استفاده از اطلاعات نمودار، اختلاف پتانسیل دو سر خازن را در لحظه t_3 حساب کنید.

«۱۲ نمره»

۶ یک ماهواره به جرم m در یک مدار بیضی



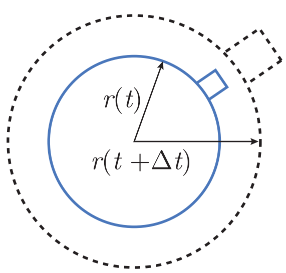
الف)

θ می‌سازد. آهنگ مساحت جاروب شده توسط شعاع حامل، یعنی $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ را بر حسب r، V و θ به‌دست آورید.

ب) کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین شعاع حامل را به ترتیب با r_1 و r_2 نشان می‌دهیم. با توجه به قانون دوم کپلر (مقدار ثابت $= \frac{\Delta S}{\Delta t}$)، سرعت ماهواره در این دو نقطه از مسیرش یعنی V_1 و V_2 را بر حسب r_1، r_2، M_e و G به‌دست آورید.

«۱۰ نمره»

۷ فرض کنید جهان از ماده‌ای با چگالی



الف)

فقط تابع زمان است و به شعاع اولیه‌ی کره بستگی ندارد. این نسبت را پارامتر هابل (H) می‌نامند.

ب) جرم کوچک m را بر سطح این کره در نظر بگیرید. این جرم، مطابق شکل، همراه ماده‌ی درون کره حرکت می‌کند. فرض کنید حرکت این جرم نسبت به مرکز کره، شعاعی است. همچنین فرض کنید جرم m فقط تحت تأثیر نیروی گرانشی کره (با جرم ثابت M) است. شتاب این جرم را بر حسب r، M و G (ثابت جهانی گرانش) بنویسید.

ج) انرژی پتانسیل گرانشی جرم m، از رابطه $U=-G\frac{Mm}{r}$ به‌دست می‌آید. انرژی جنبشی و انرژی کل جرم m را حساب کنید.

د) انرژی کل در چه رابطه‌ای صدق کند تا جرم m بتواند تا بی‌نهایت (نسبت به مرکز کره) برود، این شرط را بر حسب چگالی و پارامتر هابل (هر دو در زمان t) بنویسید.

«۱۲ نمره»

پاسخ آزمون نظری

۱ الف) برای به‌دست آوردن شدت نور خورشید در فاصله r می‌دانیم کل انرژی خورشید بر واحد زمان به سطح کره‌ای به شعاع r می‌رسد (برای به‌دست آوردن شدت نور در هر فاصله‌ای این کره مجازی به شعاع r را می‌توان در نظر گرفت).

$$I = \frac{L}{4\pi r^2} = \frac{4 \times 10^{26}}{4\pi \times (2 \times 10^{11})^2} = 7.96 \times 10^2 \mathrm{W/m^2}$$

این نور عمود بر بادبان است پس فشار ناشی $P = \frac{2I}{c} = 5.3 \times 10^{-6} \mathrm{N/m^2}$. نیرو $F = PA$ و $A = 1\mathrm{m^2}$ پس

$$F = 5.3 \times 10^{-6} \mathrm{N}$$

ب) اگر مساحت سطح بادبان A باشد جرم کل سفینه $M = 20 + 0.5 \times 10^{-3} \mathrm{A}$ است. پس

$$\begin{aligned}
F_G &= \frac{GM_sM}{r^2} = \frac{7 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{30} \times (20 + 5 \times 10^{-4} \mathrm{A})}{(2 \times 10^{11})^2} \\
&= 0.07 + 1.75 \times 10^{-6} \mathrm{A} \\
F_P &= PA = 5.3 \times 10^{-6} \mathrm{A} \\
F_G &= F_P
\end{aligned}$$

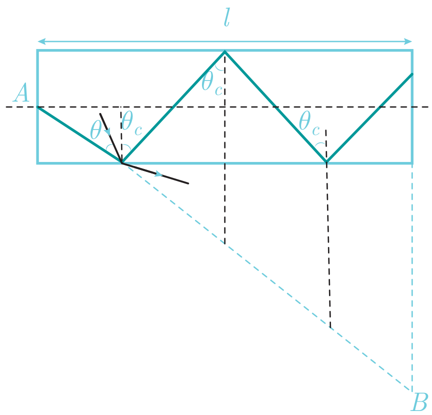
در نتیجه

$$A = 1.97 \times 10^4 \mathrm{m^2}$$

ج) توجه کنیم $F_G = \frac{GM_sM}{r^2}$ و $F_P = \frac{LA}{2\pi r^2 c}$ پس r^2 از دو طرف حذف می‌شود یعنی به فاصله مرتبط نیست و با A به‌دست آمده در قسمت (ب) همواره این اتفاق می‌افتد.

د) چون نیرویی بر سفینه وارد نمی‌شود پس با سرعت ثابت v_0 به حرکت در امتداد اولیه ادامه می‌دهد.

۲ پرتویی که در جهت محور حرکت می‌کند کمترین زمان را طی می‌کند $t_{\min} = \frac{nl}{c}$ (توجه کنیم سرعت نور داخل تار $\frac{c}{n}$ است). حال باید برای یافتن بیشترین زمان، پرتویی که بیشترین مسیر را طی می‌کند پیدا کنیم.



پرتوها با هر زاویه‌ای می‌توانند وارد شوند (چون از محیط با n کمتر آمده‌اند) اما برای این‌که داخل تار بمانند و بازتاب کلی شوند باید از θ_c کمتر نباشند که $\sin\theta_c = \dfrac{1}{n}$ پرتویی که زاویه‌اش از θ_c کمتر باشد می‌شکند و خارج می‌شود. همان پرتوهایی که با زاویه θ_c هستند بیشترین طول مسیر را طی می‌کنند. برای طول مسیر آنها می‌توان گفت اگر مقدار Δx در طول رفته باشند $\Delta l = \dfrac{\Delta x}{\sin\theta_c}$ پس $S = \dfrac{l}{\sin\theta_c}$ (S طول مسیر حرکت است). این را از شکل هم می‌توانستیم بفهمیم چون در مثلث، $S = AB$ و $AB = \dfrac{l}{\sin\theta_c}$ پس

$$t_{\max} = \frac{S}{\left(\frac{c}{n}\right)} = \frac{nl}{c\sin\theta_c} = \frac{n^2 l}{c}$$

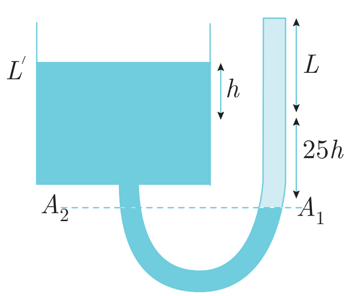
پس به اندازه‌ی $t_{\max} - t_{\min}$ پهن می‌شود یعنی اختلاف زمانی باید حداقل برابر این پهن شدگی باشد:

$$\Delta t = t_{\max} - t_{\min} = \frac{80 \times 1.36}{3 \times 10^8}(1.36 - 1)$$

در نتیجه

$$\boxed{\Delta t = 130 \times 10^{-9}\mathrm{s}}$$

۳ الف) فرض کنیم وقتی کل لوله با آب پر شد، سطح جیوه در ظرف به اندازه‌ی h بالا بیاید، به دلیل یکسان بودن حجم خارج شده از لوله و حجم وارد شده به ظرف، چون مساحت ظرف ۲۵ برابر لوله است پس در لوله به اندازه $25h$ جیوه پایین آمده یعنی ارتفاع آب برابر است با:



$$L + 25h = 65.2 + 25h$$

می‌دانیم فشار یک مایع در ارتفاع‌های یکسان، با هم برابر است یعنی

$$P_{A_1}=P_{A_2}$$
$$P_{A_1}=\rho_{\mathrm{w}}g(65.2+25h)+P_0\ ,\ P_{A_2}=\rho_{\mathrm{Hg}}g(25h+h)+P_0$$
$$\Rightarrow (65.2+25h)\times 1=(26h)\times 13.5\ \Rightarrow\ h=0.2\mathrm{cm}$$
$$H_{\text{آب}}=L+25h$$

در نتیجه

$$\boxed{H_{\text{آب}}=70.2\mathrm{cm}}$$

ب) می‌دانیم $P_0V_0=P'V'$ پس

$$P_0AL'=P'A(L'-x)$$
$$\Rightarrow P'=\frac{P_0L'}{L'-x}=P_0\left(1+\frac{x}{L'}\right)$$

در نتیجه

$$\boxed{P'=75\left(1+\frac{x}{20}\right)\mathrm{cmHg}\qquad (x \text{ بر حسب } \mathrm{cm})}$$

ج) دوباره معادله‌ی $P_{A_1}=P_{A_2}$ را می‌نویسیم:

$$P_{A_1}=P_0+\rho_{\mathrm{w}}g(L+25h)\quad ,\quad P_{A_2}=P'+\rho_{\mathrm{Hg}}g(h+25h)$$

در این قسمت $x=h$ است پس:

$$P_0+\rho_{\mathrm{w}}g(65.2+25h)=P_0+\frac{P_0h}{20}+\rho_{\mathrm{Hg}}g(h+25h)$$

توجه کنیم $P_0=75\mathrm{cmHg}$ بر حسب واحد سانتی‌مترجیوه است پس P_0 را تبدیل می‌کنیم

$$P_0=75\mathrm{cmHg}=75\mathrm{cm}\times 13.5\mathrm{g/cm^3}\times g=1012g\times\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm^2}}$$
$$1\times g\times(65.2+25h)=\frac{1012gh}{20}+13.5g(26h)$$

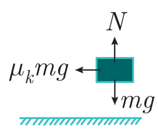
که g از طرفین حذف می‌شود، دقت کنیم اگر g حذف نمی‌شد در جایگذاری باید آن را بر حسب $\mathrm{cm/s^2}$ در می‌آوردیم و قرار می‌دادیم

$$h=0.17\mathrm{cm}$$
$$H_{\text{آب}}=L+25h$$

در نتیجه

$$\boxed{H_{\text{آب}} = 69.45\text{cm}}$$

۴ الف)



$$f_{s_{\max}} = \mu_s mg$$

$$f_{s_{\max}} = ma_{\max} \Rightarrow a_{\max} = 0.3 \times 10$$

$$\boxed{a_{\max} = 3\text{m/s}^2}$$

ب) چون شتاب تندشونده از $a_{\max}$ بیشتر است پس جعبه می‌لغزد. یعنی جعبه با شتاب $a_m = \mu_k g = 1.5\text{m/s}^2$ می‌رود و ماشین با شتاب $a_M = 4\text{m/s}^2$. پس به طور نسبی جرم با شتاب $a_{\text{rel}} = -2.5\text{m/s}^2$ عقب می‌رود. سرعت اولیه‌اش هم به طور نسبی صفر بوده است. پس

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2}a_{\text{rel}}t^2 = \frac{1}{2} \times (-2.5) \times (2)^2 = -5\text{m}$$

یعنی هنوز 1m از انتها فاصله دارد و سرعتش هم نسبت به تریلی

$$v_{\text{rel}} = v_{0_{\text{rel}}} + a_{\text{rel}}t = 0 - 2.5 \times 2 = -5\text{m/s}$$

چون سرعت جسم منفی است هنوز اصطکاک $\mu_k mg$ وارد می‌شود و چون تریلی شتاب ندارد این شتاب نسبت به زمین هم هست. سرعت تریلی در این لحظه

$$V = 3 + 4 \times 2 = 8\text{m/s}$$

است. سرعت جسم در لحظه ترک:

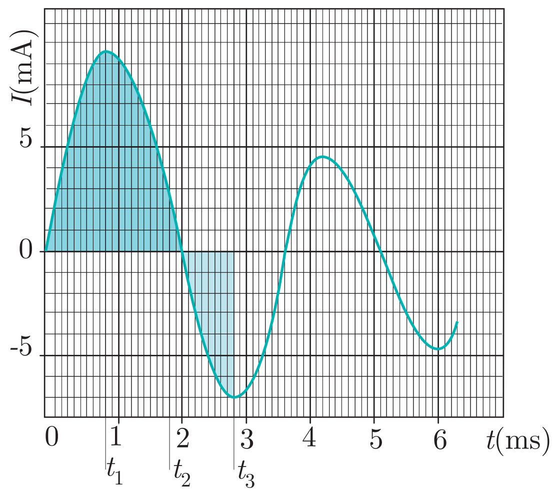
$$v_f^2 - v_{\text{rel}}^2 = 2 \times (-1.5) \times 1\text{m}$$
$$\Rightarrow v_f = \sqrt{22}$$
$$\Rightarrow V_{\text{ترک}} = V - V_f = 11\text{m/s} - \sqrt{22}\text{m/s}$$

در نتیجه

$$\boxed{V_{\text{ترک}} = 6.3\text{m/s}}$$

۵ الف) در $t = 0$، $I = 0$ و بار خازن صفر است پس:

$$E = L\frac{dI}{dt}$$



$\frac{dI}{dt}$ از روی نمودار داریم: $\frac{dI}{dt} = 20$. در نتیجه

$$L = 0.25H$$

ب) در t_2، $I = 0$:

$$E = \frac{q}{C} + 0.25\frac{dI}{dt}(t = t_2)$$

که q را از مساحت زیر نمودار $I - t$ می‌توان به‌دست آورد (چون $dq = Idt$) برای این مساحت داریم:

$$102 \text{ خانه} \times 0.1\text{ms} \times 1\text{mA} = 10.2 \times 10^{-6}\text{As}$$

و شیب نمودار در این لحظه $\frac{dI}{dt}(t = t_2) = -15\text{A/s}$ است پس:

$$5 = \frac{10.2 \times 10^{-6}}{C} - 0.25 \times 15$$

در نتیجه

$$C = 1.17\mu\text{F}$$

ج) در t_1، $\frac{dI}{dt} = 0$ است و بار خازن از مساحت زیر نمودار به‌دست می‌آید (که ۵۱ خانه است) و I هم 9.5mA است:

$$E = \frac{q}{C} + IR$$

$$5 = \frac{5.1 \times 10^{-6}}{1.17 \times 10^{-6}} + 9.5 \times 10^{-3} \times R$$

$$R = 67.5\Omega$$

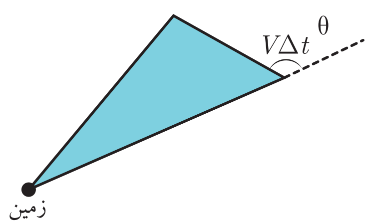
د) در t_3، $\frac{dI}{dt} = 0$ و $I = -7\text{mA}$ است پس

$$E = IR + V_C$$
$$\Rightarrow V_C = 5 + 7 \times 67.5 \times 10^{-3}$$

در نتیجه

$$\boxed{V_C = 5.47\text{V}}$$

۶ الف) می‌دانیم مساحت یک مثلث برابر است با:



$$\Delta S = \frac{1}{2} r V \Delta t \sin(\pi - \theta)$$
$$\Delta S = \frac{1}{2} r V \Delta t \sin\theta$$

$$\boxed{\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{rV \sin\theta}{2}}$$

ب) طبق قسمت (الف)، چون در شعاع‌های مینیمم و ماکزیمم، شعاع بر سرعت عمود است $\sin\theta = 1$ و

$$\frac{r_1 V_1}{2} = \frac{r_2 V_2}{2} \;\Rightarrow\; V_2 = \frac{r_1}{r_2} V_1$$

از رابطه‌ی بقای انرژی استفاده می‌کنیم:

$$\frac{-GM_e m}{r_1} + \frac{1}{2} m V_1^2 = \frac{-GM_e m}{r_2} + \frac{1}{2} m V_2^2$$
$$\Rightarrow V_1^2 - V_2^2 = 2GM_e \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$
$$\Rightarrow V_1^2 \left(1 - \frac{r_2^2}{r_1^2}\right) = 2GM_e \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\boxed{V_1 = \sqrt{\frac{2GM_e r_2}{r_1(r_1 + r_2)}} \;,\; V_2 = \sqrt{\frac{2GM_e r_2}{r_1(r_1 + r_2)}}}$$

۷ الف) چون جرم کره ثابت است و $M = \rho V$ پس

$$M = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$
$$\frac{dM}{dt} = \frac{4}{3} \pi \left(3r^2 \rho \frac{dr}{dt} + r^3 \frac{d\rho}{dt}\right)$$

چون جرم کره ثابت است $\frac{dM}{dt} = 0$ پس

$$\frac{(\frac{dr}{dt})}{r} = -\frac{1}{3}\frac{(\frac{d\rho}{dt})}{\rho}$$

در نتیجه

$$\boxed{H = -\frac{1}{3}\frac{(\frac{d\rho}{dt})}{\rho}}$$

ب)

$$\boxed{a = \frac{-GM}{r^2}}$$

$$\frac{-GMm}{r^2} = ma$$

ج)

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\frac{dr}{dt})^2 = \frac{1}{2}mH^2r^2$$
$$E = U + K$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}mH^2r^2 - \frac{GMm}{r}}$$

د) می‌دانیم انرژی ثابت است و در بی‌نهایت $\frac{GMm}{r} = 0$ و $K \geq 0$ پس در بی‌نهایت $E \geq 0$ است:

$$\frac{1}{2}mH^2r^2 - \frac{GMm}{r} \geq 0 \ \Rightarrow \ \frac{1}{2}H^2r^2 \geq G\left(\frac{4}{3}\pi r^3\rho\right)$$

در نتیجه

$$\boxed{H^2_{(t)} \geq \frac{8}{3}\pi G\rho_{(t)}}$$

دورەی سیزدهم

آزمون عملی

وسایل موجود:

۱. کاغذ میلی‌متری با جرم مجهول (m_1)
۲. سیم با جرم مجهول (m_2)
۳. چوب کبریت

شرح آزمایش:

کاغذ میلی‌متری را چند بار تا بزنید و به شکل یک خط‌کش باریک درآورید. از این کاغذ تا شده به عنوان اهرم استفاده کنید.

الف) نسبت m_1 به m_2 را به‌دست آورید.

ب) روش انجام آزمایش را بنویسید.

ج) عوامل مؤثر بر خطای آزمایش را بنویسید.

«۱۲ نمره»

آزمون نظری وقت آزمون: ۱۸۰ دقیقه

۱ اتومبیلی در یک جاده‌ی افقی بدون پیچ با سرعت ثابت v حرکت می‌کند. هوا ساکن است و باران

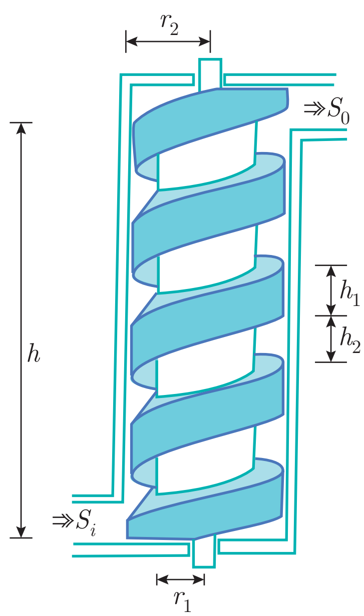
الف)

به سطح افقی را حساب کنید.)

ب) فرض کنید زاویه‌ی شیشه‌ی جلوی اتومبیل با راستای قائم α باشد. چه شرطی بین α، u و v برقرار باشد تا بارانی که به شیشه‌ی جلوی اتومبیل می‌خورد، روی شیشه شروع به بالا رفتن کند؟

«۶ نمره»

۲ وسیله‌ای که در شکل نشان داده شده،



الف)

حجم آبی که از تلمبه بیرون می‌آید، چقدر است؟

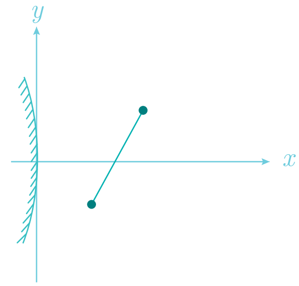
ب) اگر قسمت میانی N دور بر ثانیه بگردد، سرعت آب خروجی از تلمبه چقدر است؟

ج) چه توانی لازم است تا تلمبه را N دور بر ثانیه بگرداند؟ چگالی آب را ρ و شتاب گرانش را g بگیرید.

د) اکنون با فرض مقدارهای $h = 180\text{cm}$، $h_1 = 20\text{cm}$، $h_2 = 25\text{cm}$، $r_1 = 16\text{cm}$، $r_2 = 20\text{cm}$، $S_0 = 100\text{cm}^2$، $N = 0.3$ دور بر ثانیه و $\rho = 1000\text{kg/m}^3$. مقدار عددی کمیت‌های محاسبه شده در الف، ب و ج را به‌دست آورید.

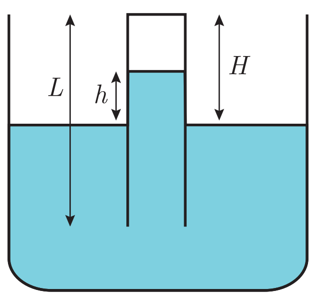
«۱۰ نمره»

۳ مطابق شکل، میله نازکی که قسمتی از



«۸ نمره»

۴ وقتی یک لوله نازک را به طور عمودی در



«۱۰ نمره»

۵

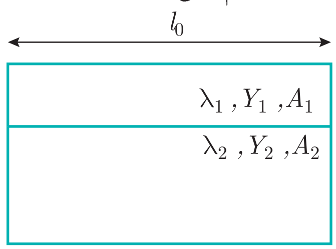
الف)

ب) دو فنر یکسان با ثابت فنر k را موازی با هم می‌بندیم. ثابت فنر حاصل چقدر است؟

ج) هر میله را می‌توان شبیه فنری در نظر گرفت که طول آن تحت کشش و فشار عوض می‌شود. فرض کنید ثابت فنر میله‌ای از یک جنس معین، به طول واحد و مساحت مقطع واحد Y باشد. به Y مدول یانگ می‌گویند.

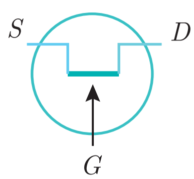
ثابت فنر میله‌ای از همین جنس به طول l و مساحت A چقدر است؟

د) دو میله از دو جنس مختلف در نظر بگیرید. در دمای T_0، طول هر میله l_0 است. مطابق شکل، این دو میله را به هم جوش داده‌اند. ضریب انبساط طولی میله‌ها λ_1 و λ_2، مساحت مقطع میله‌ها A_1 و A_2 و مدول یانگ میله‌ها Y_1 و Y_2 است. میله‌ها را گرم می‌کنیم. چون ضریب انبساط میله‌ها با هم فرق می‌کند، افزایش طول ناشی از گرم شدن میله‌ها یکسان نیست. اما میله‌ها به هم جوش خورده‌اند، و اگر مساحت مقطع‌شان به حد کافی زیاد باشد، تقریباً خم نمی‌شوند. بنابراین در یکی کشش و در دیگری فشار به وجود می‌آید، به طوری که طول دو میله در دمای T یکسان می‌شود. ثابت فنر این دو میله را همان ثابت فنرشان در دمای T_0 بگیرید. این طول چقدر است؟

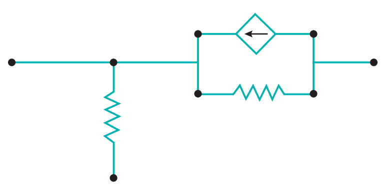


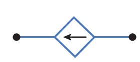
«۱۲ نمره»

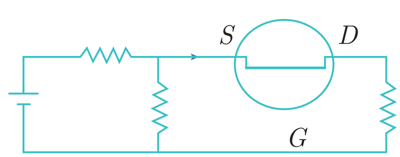
۶ ترانزیستور اثر میدان (FET) یک عنصر



شکل (۱)







الف) r_g را بی‌نهایت بگیرید و مدار این تقویت کننده را، با استفاده از مدار معادل ترانزیستور، بکشید. در همه قسمت‌های دیگر مسئله از این مدار استفاده کنید.

ب) $A_V = \dfrac{V_{DG}}{V_{SG}}$ را به‌دست آورید.

ج) جریان I در شکل (۳) را بر حسب A_v، مقاومت‌های داده شده در مدار و V_{SG} به‌دست آورید.

د) $\dfrac{V_{SG}}{V_i}$ را بر حسب A_v و مقاومت‌های داده شده در مدار به‌دست آورید.

ه) معمولاً r_d بسیار بزرگ است. در حد $r_d \to \infty$، نسبت $A'_v = \dfrac{V_{DG}}{V_i}$ را به‌دست آورید.

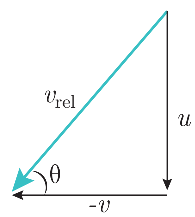
«۱۱ نمره»

پاسخ آزمون نظری

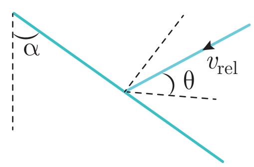
۱ الف)

$$\vec{V}_{\text{rel}} = \vec{V}_{\text{rain}} - \vec{V}_{\text{car}}$$

$$|V_{\text{rel}}| = \sqrt{u^2 + v^2} \quad , \quad \theta = \text{Arctan}(\frac{u}{v})$$



ب) برای این‌که باران از شیشه بالا رود باید سرعت نسبی آن نسبت به ماشین به گونه‌ای باشد که از عمود به شیشه زاویه‌اش کمتر باشد یعنی $\theta < \alpha$ (به شکل توجه کنید):



$$\text{Arctan}(\frac{u}{v}) < \alpha$$

در نتیجه

$$\frac{u}{v} < \tan\alpha$$

۲ الف) حجم آب موجود در هر پای پیچ را می‌توان به یک استوانه توخالی مشابهت داد. توجه کنیم آن حجم دقیقاً حجمی برابر استوانه دارد چون فاصله‌ی بین هر دو ردیف همه جا h_2 و شعاع‌ها همه جا r_1 و r_2اند، پس

$$V = \pi(r_2^2 - r_1^2)h_2$$

ب) حجمی که در واحد زمان خارج می‌شود $N\pi(r_2^2 - r_1^2)h_2$ است که این باید از مساحت S_0 خارج شود و می‌دانیم اگر شاره‌ای با سرعت u از مساحت S_0 رد شود، دبی آن $S_0 u$ است:

$$N\pi(r_2^2 - r_1^2)h_2 = S_0 u$$

$$u = \frac{N\pi(r_2^2 - r_1^2)h_2}{S_0}$$

ج) توان برابر کار انجام شده بر واحد زمان است، کاری که باعث چرخیدن تلمبه می‌شود در نهایت باعث بالا رفتن آب‌ها به مقداری مشخص و خروج آب با یک سرعت مشخص است. بازه‌ی زمانی $\Delta t = \frac{1}{N}\text{s}$

را در نظر می‌گیریم. در این بازه تلمبه ۱ دور چرخیده است. طول کل استوانه h است و ارتفاع هرگام پیچ $h_1 + h_2$ است پس مجموعاً $n = \dfrac{h}{h_1 + h_2}$ حجم V داخل استوانه داریم. با هر دور چرخاندن پیچ، همه‌ی این n حجم V به میزان $h_1 + h_2$ بالا می‌روند پس:

$$\Delta U = n \times (\rho V) g (h_1 + h_2) = \rho g V h$$
$$\Delta U = \rho g \pi (r_2^2 - r_1^2) h_2$$

همچنین برای انرژی جنبشی با هر دور چرخاندن به حجم V خروجی سرعت u داده می‌شود:

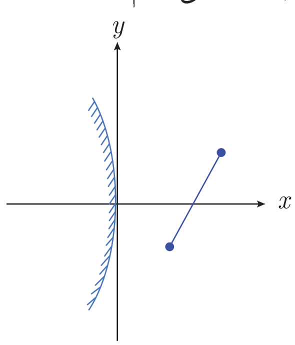
$$\Delta K = \frac{1}{2}(\rho V) u^2$$
$$\Delta K = \frac{1}{2}\rho \pi (r_2^2 - r_1^2) \frac{N^2 \pi^2 (r_2^2 - r_1^2)^2 h_2^2}{S_0^2}$$

شاید تصور شود که این تغییر انرژی جنبشی صرفاً به دلیل تغییر مساحت است و ما کار آن را انجام نمی‌دهیم در حالی که به دلیل این کوچک شدن مساحت نیروی بیشتری برای چرخاندن تلمبه لازم است.

$$P = \frac{\Delta U + \Delta K}{\frac{1}{N}} \xrightarrow{\text{جایگذاری عددی}}$$

$$\boxed{P = 61.2\text{W}}$$

۳ مختصات تصویر را با (X, Y) و مختصات خط را با (x, y) نشان می‌دهیم:



$$-\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{X} \Rightarrow X = \frac{-fx}{f + x} \qquad (1)$$
$$m = |\frac{q}{p}| = |\frac{Y}{y}| \Rightarrow \frac{X}{x} = \frac{Y}{y}$$
$$\Rightarrow \frac{f}{f + x} = \frac{Y}{mx + b}$$

$$\Rightarrow Y = (mx + b) \times \frac{f}{f + x} \xrightarrow{(1)} x = \frac{-Xf}{X + f}$$
$$\Rightarrow Y = \left(\frac{-mXf}{f + X} + b\right) \times \left(\frac{f(f + X)}{f^2}\right) = \left(\frac{-Xmf + bf + bX}{f}\right)$$

$$\boxed{Y = (-m + \frac{b}{f})X + b}$$

۴ ابتدا فشار هوای محصور را به‌دست می‌آوریم:

$$P_0L = P(H-h) \;\Rightarrow\; P = \frac{P_0L}{H-h}$$

برای آب معادله‌ی نیرو را می‌نویسیم:

$$P_0S + \gamma\pi D = \rho Shg + PS$$

$$\Rightarrow P_0 + \frac{\gamma\pi D}{S} = \frac{\rho gh(H-h) + P_0L}{(H-h)}$$

$$S = \frac{\pi D^2}{4} \;\Rightarrow\; \left(\frac{4\gamma}{D} + P_0\right)(H-h) = \rho gh(H-h) + P_0L$$

$$\Rightarrow (\rho g)h^2 + h\left(\frac{-4\gamma}{D} - P_0 - \rho gH\right) + \left(H\left(\frac{4\gamma}{D} + P_0\right) - P_0L\right) = 0$$

$$\Delta = \frac{16\gamma^2}{D^2} + P_0^2 + (\rho gH)^2 + \frac{8\gamma P_0}{D} + \frac{8\gamma\rho gH}{D}$$
$$+\,2P_0\rho gH - 4\rho g\left(\frac{4\gamma H}{D} + P_0H - P_)L\right)$$

$$h = \frac{\left(\frac{4\gamma}{D} + P_0 + \rho gH\right) \pm \sqrt{\left(\frac{4\gamma}{D} + P_0 - \rho gH\right)^2 + 4\rho gP_0L}}{2\rho g}$$

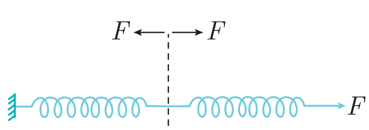
برای حالت خاص، اگر $H = L$ باشد یعنی لوله داخل آب نرود و $\gamma = 0$ باشد باید $h = 0$ شود چون نیروی بالا برنده‌ای نداریم

$$0 = \frac{P_0 + \rho gL \pm \sqrt{(P_0 - \rho gH)^2 + 4\rho gP_0L}}{2\rho g}$$

پس جواب منفی قابل قبول است.

$$\boxed{h = \frac{\left(\frac{4\gamma}{D} + P_0 + \rho gH\right) - \sqrt{\left(\frac{4\gamma}{D} + P_0 - \rho gH\right)^2 + 4\rho gP_0L}}{2\rho g}}$$

۵ الف) نقطه‌ی اتصال دو فنر را در نظر می‌گیریم. چون فنرها شتاب ندارند (هنگامی که فنرها کشیده شده‌اند و در تعادل‌اند) پس در آن محل هم نیروی F به سمت چپ به فنر راستی و نیروی F به سمت راست به فنر چپی وارد می‌شود.



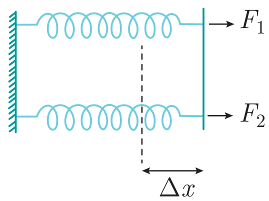
$$\Delta x_1 = \frac{F}{k} \;\; , \;\; \Delta x_2 = \frac{F}{k} \;\Rightarrow\; \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \frac{2F}{k}$$

$$F = k_T \Delta x$$

در نتیجه

$$k_T = \frac{k}{2}$$

ب) برای دو فنر موازی هم می‌توان نوشت:



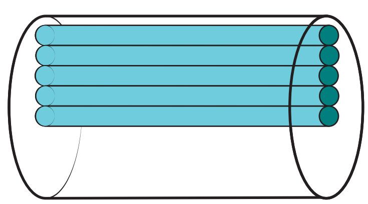
$$F_1 = k\Delta x \;,\; F_2 = k\Delta x$$

$$F_T = F_1 + F_2 = 2k\Delta x \;,\; F_T = k_T \Delta x$$

در نتیجه

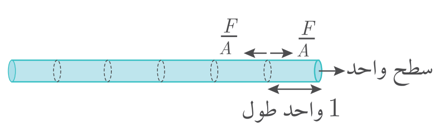
$$k_T = 2k$$

ج) می‌توان مساحت مقطع A را به المان‌هایی به مساحت واحد تقسیم کرد (توجه کنیم منظور از مساحت واحد تنها $1\mathrm{m}^2$ نیست بلکه هر مساحتی را می‌توان واحد گرفت). حال تعدادی میله با طول l و مساحت مقطع واحد داریم که این میله‌ها مانند فنرهایی موازی با هم هستند زیرا به یک میزان تغییر طول می‌دهند.



اگر نیروی کل F به میله وارد شود به هرکدام از میله‌ها نیروی $\frac{F}{A} = \frac{F}{(\frac{A}{1})}$ وارد می‌شود (چون تعداد این میله‌ها $\frac{A}{1}$ است و نیرو وارده به آنها با هم یکسان است).

در طول این میله، ۱ واحد، ۱ واحد جدا می‌کنیم (دوباره توجه کنیم، هر طولی را می‌توان واحد گرفت مانند قسمت (الف)، به همه‌ی این فنرها نیروی $\frac{F}{A}$ وارد می‌شود پس $\Delta x = \frac{\frac{F}{A}}{Y} = \frac{F}{AY}$ و چون تعداد کل فنرها در طول $n = \frac{l}{1}$ است داریم:



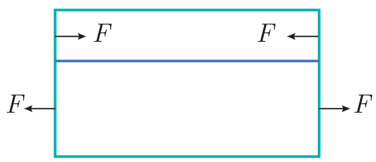
$$\Delta x_T = \Delta x \times l = \frac{Fl}{AY}$$

$$F = k_T \Delta x_T$$

در نتیجه

$$k_T = \frac{AY}{l}$$

د) بدون این‌که به کلیت مسئله لطمه‌ای بخورد فرض می‌کنیم $\lambda_1 > \lambda_2$، یعنی اگر جوش نمی‌خوردند طول ۱ بیشتر می‌شد، پس حالاکه جوش خورده‌اند از طرف میله‌ی ۲، یک نیروی فشاری F به آن وارد می‌شود، و طبق قانون سوم نیوتن از طرف میله‌ی ۱ هم نیروی کششی به میله‌ی ۲ وارد می‌شود:



$$L_1 = l_0\big(1+\lambda_1(T-T_0)\big) - \frac{F}{k_1} \quad , \quad k_1 = \frac{A_1Y_1}{l_0}$$

$$L_2 = l_0\big(1+\lambda_2(T-T_0)\big) + \frac{F}{k_2} \quad , \quad k_2 = \frac{A_2Y_2}{l_0}$$

$$L_1 = L_2$$

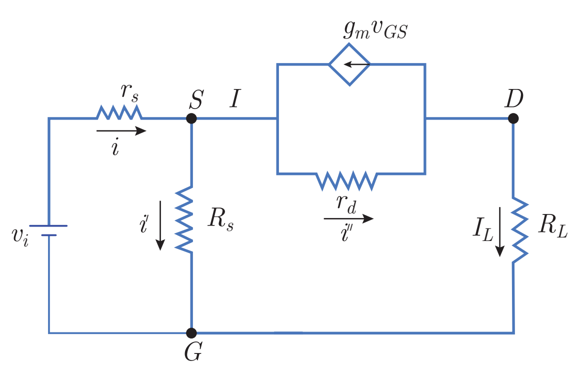
$$\Rightarrow 1+\lambda_1(T-T_0) - \frac{F}{A_1Y_1} = 1+\lambda_2(T-T_0) + \frac{F}{A_2Y_2}$$

$$\Rightarrow F = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(T-T_0)A_1A_2Y_1Y_2}{(A_1Y_1+A_2Y_2)}$$

$$L = l_0 + l_0\lambda_1(T-T_0) - \frac{l_0(\lambda_1-\lambda_2)(T-T_0)A_2Y_2}{A_1Y_1+A_2Y_2}$$

$$\boxed{L = l_0\left[1+\frac{A_1Y_1\lambda_1 + A_2Y_2\lambda_2}{A_1Y_1+A_2Y_2}(T-T_0)\right]}$$

۶ الف) اگر $r_g \to \infty$، انگار از آن شاخه جریانی رد نمی‌شود و می‌توان آن را حذف کرد. همچنین چون این شاخه با شاخه‌ی شامل R_S موازی است، پتانسیل G را می‌توان همان پتانسیل در پایین شاخه‌ی شامل R_s گرفت.



ب) می‌دانیم $V_{GS} = V_G - V_S$.

$$V_D - I_LR_L = V_G \quad , \quad V_S - i''r_d = V_D$$

$$\Rightarrow I_L = \frac{V_{DG}}{R_L} \quad , \quad i'' = \frac{V_{SD}}{r_d}$$

$$i'' = g_m V_{GS} + I_L \;\Rightarrow\; \frac{V_{SD}}{r_d} = g_m V_{GS} + \frac{V_{DG}}{R_L}$$

$$V_{SD} = V_S - V_D = V_S - V_G + V_G - V_D = V_{SG} + V_{GD} = V_{SG} - V_{DG}$$

$$\frac{V_{SG} - V_{DG}}{r_d} = -g_m V_{SG} + \frac{V_{DG}}{R_L}$$

$$V_{SG}\left(\frac{1}{r_d} + g_m\right) = V_{DG}\left(\frac{1}{R_L} + \frac{1}{r_d}\right)$$

$$\Rightarrow A_v = \frac{V_{DG}}{V_{SG}} = \frac{\frac{1}{r_d} + g_m}{\frac{1}{R_L} + \frac{1}{r_d}}$$

در نتیجه

$$A_v = \frac{R_L + r_d R_L g_m}{R_L + r_d}$$

ج) مطابق شکل مدار $I = I_L$ است پس $I = \frac{V_{DG}}{R_L}$، در نتیجه

$$\frac{A_V V_{SG}}{R_L} = I$$

د)

$$i = I + i' = \frac{A_V V_{SG}}{R_L} + \frac{V_{SG}}{R_s} = V_{SG}\left(\frac{A_v}{R_L} + \frac{1}{R_S}\right)$$

$$V_G + V_i - i r_s = V_S \;\Rightarrow\; V_i - i r_s = V_{SG}$$

$$V_i = V_{SG} r_s \left(\frac{A_v}{R_L} + \frac{1}{R_s}\right) + V_{SG}$$

$$\frac{V_{SG}}{V_i} = \frac{1}{1 + \frac{r_s A_V}{R_L} + \frac{r_s}{R_s}}$$

هـ)

$$A'_v = \frac{V_{DG}}{V_i} = \frac{V_{DG}}{V_{SG}} \times \frac{V_{SG}}{V_i} = \frac{A_V}{1 + \frac{r_s A_V}{R_L} + \frac{r_s}{R_s}}$$

$$\lim_{r_d \to \infty} A_V = \lim_{r_d \to \infty} \frac{R_L + r_d R_L g_m}{R_L + r_d} = R_L g_m$$

$$A'_V = \frac{R_L g_m}{1 + r_s g_m + \frac{r_s}{R_s}}$$

چهاردهمین المپیاد فیزیک

آزمون نظری وقت آزمون: ۱۹۵ دقیقه

۱

الف)

دارد. چشمه از جایی که آینه قرار دارد با زاویه‌ی (قطر ظاهری) خیلی کوچک α دیده می‌شود. اگر فاصله‌ی چشمه از آینه خیلی زیاد باشد، شعاع تصاویر چقدر است؟

ب) برای آتش زدن یک تکه چوب لازم است حداقل توان تابشی بر واحد سطح $60\mathrm{kW/m^2}$ بر آن بتابد. یک تکه چوب را در کانون یک آینه‌ی مقعر با مساحت A و فاصله‌ی کانونی $50\mathrm{m}$ قرار می‌دهیم. A چند مترمربع باشد تا تکه چوب را بشود با نور خورشید که به وسیله‌ی آینه روی آن تابانده می‌شود، آتش زد؟ در سطح زمین توان تابشی خورشید بر واحد سطح $1\mathrm{kW/m^2}$ و قطر ظاهری خورشید از زمین 0.5° است.

«۱۰ نمره»

۲ یک نوع ارتفاع‌سنج بر اساس سنجش فشار هوا کار می‌کند. فشار هوا در ارتفاع‌های h_0، h_1 و h_2

الف)

$\dfrac{P_i+P_{i+1}}{2}$، و دمای مطلق هوا در این فاصله را $\dfrac{T_i+T_{i+1}}{2}$ بگیرید. چگالی هوا در این فاصله را به‌دست آورید.

راهنمایی: هوا مثل یک گاز کامل است و معادله‌ی حالت آن $PV=nRT$ است، که در آن V حجم گاز، n تعداد مول‌ها و R ثابت عمومی گاز است. جرم هر مول هوا M است.

ب) با استفاده از این چگالی، $h_{i+1}-h_i$ را به‌دست آورید و از آنجا h_1-h_0 و h_2-h_0 را بنویسید.

ج) با فرض $P_0=103\times10^3\mathrm{Pa}$، $P_1=97\times10^3\mathrm{Pa}$، $t_0=20\ ^\circ\mathrm{C}$، $t_1=14\ ^\circ\mathrm{C}$، $M=29\mathrm{g/mol}$، $g=10\mathrm{m/s^2}$ و $R=8.3\mathrm{J/mol\cdot K}$، مقدار عددی h_1-h_0 را به‌دست آورید.

«۱۰ نمره»

۳ یک جسم به جرم m از ارتفاع h بالای سر آزاد یک فنر سبک عمودی روی فنر می‌افتد. سر دیگر