بسم الله الرحمن الرحیم

# المپیاد های ریاضی کانادا

انتشارات خوشخوان

مترجمین :

محمد مهدی آذری

حسین رفیع پور

سرشناسه :آذری، محمدمهدی، ۱۳۶۳ -، گردآورنده
عنوان و نام پدیدآور :المپیادهای ریاضی کانادا/مترجمین و گردآورندگان محمدمهدی آذری، حسین رفیع‌پور
مشخصات نشر : تهران : خوشخوان، ۱۳۹۱.
مشخصات ظاهری :۲۵۲ص.: مصور.
شابک : ۴-۲۷-۵۶۹۵-۶۰۰-۹۷۸
وضعیت فهرست نویسی :فیپا
موضوع :المپیادها (ریاضیات)
موضوع :ریاضیات -- مسایل، تمرین‌ها و غیره
موضوع :ریاضیات -- مسابقه‌ها
شناسه افزوده :رفیع‌پور، حسین، ۱۳۶۹ - ، گردآورنده
رده بندی کنگره : ۱۳۹۱ ۷۵ الف ۳۶آ /LB ۳۰۶۰/۲۴
رده بندی دیویی :۳۷۳/۲۳۸
شماره کتابشناسی ملی :۲۷۳۵۱۸۷

ناشر : خوشخوان
مترجمین : محمد مهدی آذری ، حسین رفیع پور
حروف چینی و صفحه آرایی : خانم عبدالله پور
طراحی جلد : مهدی حسینی
چاپ اول : بهار ۱۳۹۱
تیراژ : ۲۰۰۰ نسخه
چاپ : دانش پژوه
قیمت : **۵۷۰۰** تومان
شابک : ۴-۲۷-۵۶۹۵-۶۰۰-۹۷۸

تهران ، خیابان انقلاب ، خیابان فخررازی ، کوچه انوری ، پلاک ۱۹ / نشر خوشخوان
تلفن : ۶۶۴۹۴۰۲۰ www.khoshkhan.ir | Email : info@khoshkhan.ir

## فهرست مندرجات

# پیش گفتار ناشر

مسابقه‌ها ،کنکورها و المپیادهای علمی نقش عمده ای را در بارور کردن و شکفتن استعدادهای دانش آموزان ایفا می کنند و باید به جرات ادعا کرد که این مسابقات توانسته‌اند اعتماد به نفس لازم در جوانان عزیز کشورمان برای رقابت علمی با جوانان سایر نقات جهان را تا حد زیادی افزایش دهند .

کتاب‌های موجود در دوره‌های تحصیلی به هیچ عنوان نمی‌توانند دانش‌آموزان را برای آماده شدن در این رقابت‌ها اغنا کنند . لذا لازم است در کنار کتاب‌های درسی خلا موجود مخصوصا برای دانش‌آموزان مستعد و ممتاز شناسایی و پر شود . در همین راستا انتشارات خوشخوان با استعانت از حضرت حق‌تعالی و به کمک تنی چند از اساتید و دبیران ممتاز ایران و نیز فارغ التحصیلان دانشگاه‌های مختلف که اغلب آن در زمانی نه چندان دور مدال آور المپیادهای علمی در سطح ایران و جهان بوده اند ، که کتاب‌هایی را تالیف و به دانش‌آموران ارائه می نماید . امید است مورد پسند و استفاده‌ی دانش‌آموزان این مرز و بوم قرار گیرد .

رسول حاجی‌زاده

مدیریت انتشارات خوشخوان

## مقدمه‌ی مترجمین

مسابقات المپیاد ریاضی از جمله رقابت‌های علمی است که اکنون در بسیاری از کشورها هر ساله برگزار می‌شود و علاقه‌مندان بسیاری دارد. شیوه‌ی برگزاری این مسابقات در هر کشوری متفاوت است و از جمله کشورهای برگزارکننده‌ی این رقابت‌ها، کانادا می‌باشد.

در این کتاب مجموعه سوالات المپیادهای ریاضی کانادا به همراه پاسخ آنها از سال ۱۹۷۶ تا سال ۲۰۱۱ گردآوری و ترجمه شده است. هر دوره از این مجموعه شامل سوالاتی از مباحث مختلف المپیاد ریاضی است. سوالات دوره‌های مربوط به سال‌های دورتر کمی ساده‌تر می‌باشند اما هر چه که به دوره‌های اخیر نزدیک‌تر می‌شویم سوالات از زیبایی بیشتری برخوردار می‌شوند. این کتاب به جهت دارا بودن انواع سوالات ساده تا سخت و همچنین شباهت آنها به سوالات آزمون‌های داخلی کشورمان، می‌تواند برای همه‌ی شرکت‌کنندگان در مراحل مختلف المپیاد ریاضی و همچنین جهت استفاده‌ی دبیران محترم منبع مناسبی باشد.

در اینجا لازم است که از زحمات جناب آقای رسول حاجی زاده، مدیر محترم انتشارات، سرکار خانم زینب آذری، ویراستار محترم، جناب آقای عیسی محمدی، گروه فنی تایماز و جناب آقای محمد شریفی، که ما را در آماده‌سازی و چاپ این کتاب یاری کرده‌اند صمیمانه تشکر و قدردانی نماییم.

در پایان از خوانندگان محترم تقاضا می‌شود هر گونه نظر، پیشنهاد یا انتقاد خود را از این کتاب با آدرس ایمیل mm.azari@yahoo.com در میان گذارند.

محمدمهدی آذری

حسین رفیع‌پور

# فصل ۱

# سوالات

## ۱.۱ سال ۲۰۱۱

۱) اعداد ۷۰ رقمی $n$ را در نظر بگیرید. با این ویژگی که هر کدام از ارقام $۱, ۲, ۳, \ldots, ۷$ در بسط ده‌دهی $n$، ده بار ظاهر می‌شوند (۸، ۹ و ۰ ظاهر نمی‌شوند). نشان دهید که هیچ عددی از این دست نمی‌تواند عدد دیگری از این شکل را بشمارد.

۲) فرض کنید $ABCD$ یک چهار ضلعی محاطی است که در آن اضلاع مقابل هم، موازی نیستند و $X$ محل تقاطع $AB$ و $CD$ و همچنین $Y$ محل تقاطع $AD$ و $BC$ است. فرض کنید نیمساز زاویه $\widehat{AXD}$، $AD$ و $BC$ را به ترتیب در نقاط $E$ و $F$ و نیمساز زاویه $\widehat{AYB}$، $AB$ و $CD$ را به ترتیب در نقاط $G$ و $H$ قطع کند. ثابت کنید که $EGFH$ یک متوازی‌الاضلاع است.

۳) علی یک مربع را به تعداد زیاد، ولی متناهی، مستطیل سفید و قرمز تقسیم کرده است که اضلاع هر یک از آن‌ها با اضلاع مربع موازی است. او در داخل هر مستطیل سفید، حاصل تقسیم پهنا به ارتفاع آن را نوشته است و در داخل هر مستطیل قرمز، حاصل تقسیم ارتفاع بر پهنا را در نهایت او $x$ را که مجموع این اعداد است، محاسبه می‌کند. اگر مجموع مساحت مستطیل‌های سفید با مجموع مساحت مستطیل‌های قرمز برابر باشند، کوچکترین مقدار ممکن برای $x$ چند است؟

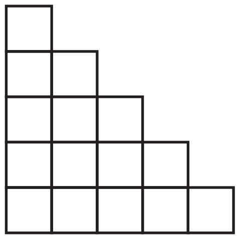
۴) نشان دهید که یک عدد صحیح مثبت $N$ وجود دارد به طوری که برای همه‌ی اعداد صحیح $a$ که $a > N$ است، یک زیر رشته پیوسته از بسط ده‌هی $a$ وجود دارد که بر ۲۰۱۱ بخش‌پذیر است. (به عنوان مثال اگر $a = ۱۵۳۲۰۴$، آن گاه ۱۵، ۵۳۲ و ۰ همگی زیر رشته‌های پیوسته $a$ هستند. به یاد داشته باشید که ۰ بر ۲۰۱۱ بخش‌پذیر است)

۵) فرض کنید $d$ یک عدد صحیح مثبت باشد. نشان دهید برای هر عدد صحیح $s$، یک عدد صحیح $n$ که $n > ۰$ است و یک دنباله $\varepsilon_۱, \varepsilon_۲, \ldots, \varepsilon_n$ که برای هر $k$، $\varepsilon_k = ۱$ یا $\varepsilon_k = -۱$ است، وجود دارد. به طوری که

$$s = \varepsilon_۱(۱ + d)^۲ + \varepsilon_۲(۱ + ۲d)^۲ + \varepsilon_۳(۱ + ۳d)^۲ + \cdots + \varepsilon_n(۱ + nd)^۲$$

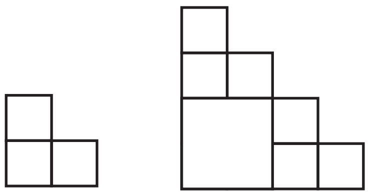
## ۲.۱ سال ۲۰۱۰

۱) برای یک عدد صحیح مثبت $n$، $n-$ پله‌کان شکلی است که از مربع‌های واحد تشکیل شده است به طوری که یک مربع در ردیف اول، دو مربع در ردیف دوم و به همین ترتیب تا $n$ مربع در ردیف $n$ ام قرار دارد و تمامی مربع‌های سمت چپ در هر ردیف به صورت عمودی هم‌تراز شده‌اند. به طور مثال ۵ — پله‌کان در شکل (۱.۱) نشان داده شده است.



شکل ۱.۱

$f(n)$ کمترین تعداد کاشی‌های مربع شکل مورد نیاز برای پوشاندن $n-$ پله‌کان مشخص می‌کند. طول ضلع این کاشی‌ها می‌تواند هر عدد صحیح مثبتی باشد. به عنوان مثال $f(۲) = ۳$ و $f(۴) = ۷$ (شکل (۲.۱))



شکل ۲.۱

الف) کلیه $n$ هایی را که به ازای آن‌ها $f(n) = n$ است را بیابید.

ب) کلیه $n$ هایی را که به ازای آن‌ها $f(n) = n + ۱$ است را بیابید.

۲) فرض کنید که $A$، $B$ و $P$ سه نقطه روی یک دایره باشند. ثابت کنید که اگر $a$ و $b$ فاصله $P$ تا مماس‌های دایره در نقاط $A$ و $B$ و همچنین $c$ فاصله $P$ تا وتر $AB$ باشد، آن گاه $c^۲ = ab$.

۳) سه اسکیت‌باز سرعتی یک مسابقه دوستانه در یک زمین بیضی شکل اسکیت را ترتیب دادند. همگی آن‌ها از یک نقطه مشترک شروع کرده و در یک مسیر مشترک

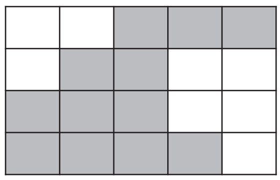
اما با سرعت‌های متفاوت که در سرتاسر مسابقه آن را حفظ نمودند اسکیت کردند. کندترین اسکیت‌باز ۱ دور در دقیقه، سریع‌ترین ۳/۱۴ دور در دقیقه و فرد متوسط $L$ دور در دقیقه برای مقادیر $۱ < L < ۳/۱۴$ سرعت داشتند. مسابقه زمانی به پایان می‌رسد که هر سه اسکیت‌باز دوباره در یک نقطه مشترک روی زمین اسکیت به هم برسند (که ممکن است این نقطه با نقطه شروع متفاوت باشد). تعداد مقادیر مختلف ممکن برای $L$ به طوری که قبل از پایان مسابقه ۱۱۷ عبور اتفاق بیفتد، را بیابید (یک عبور به معنی زمانی است که یک اسکیت‌باز از اسکیت‌باز دیگر عبور می‌کند. آغاز و پایان مسابقه وقتی که هر سه اسکیت باز با هم هستند به عنوان یک عبور شمرده نمی‌شود)

۴) هر رأس یک گراف محدود می‌تواند به رنگ سیاه یا سفید درآید. در ابتدا کلیه رئوس سیاه هستند. ما اجازه داریم یک رأس $P$ را در نظر گرفته و رنگ آن را همراه با تمامی همسایه‌هایش تغییر دهیم. آیا ممکن است با عملیاتی از این نوع، رنگ همه رئوس را از سیاه به سفید مبدل کنیم؟

۵) فرض کنید $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب صحیح باشند و فرض کنید $a_n = n! + n$. نشان دهید که اگر $\dfrac{P(a_n)}{Q(a_n)}$ برای همه $n$ ها، یک عدد صحیح باشد آن گاه $\dfrac{P(n)}{Q(n)}$ نیز برای هر عدد صحیح $n$ به طوری که $Q(n) \neq ۰$ باشد، یک عدد صحیح است.

## ۳.۱ سال ۲۰۰۹

۱) یک صفحه‌ی مشبک $m \times n$ با مربع‌هایی که به رنگ سیاه یا سفید هستند را در نظر بگیرید. به یک مربع سیاه در صفحه‌ی مشبک «مجزا» گوییم اگر مربعی در سمت چپ آن در همان سطر خودش و مربعی هم در بالای آن در همان ستون خودش به رنگ سفید وجود داشته باشد (شکل را ببینید). فرمول بسته‌ای برای تعداد صفحه‌های مشبک ۲ × $n$ بدون مربع سیاه «مجزا» به دست آورید.



شکل ۳.۱) یک صفحه‌ی مشبک ۴ × ۵ بدون مربع سیاه «مجزا»

۲) دو دایره‌ی با شعاع‌های متفاوت را از یک مقوا جدا می‌کنیم. هر کدام از دایره‌ها را به ۲۰۰ قطاع برابر تقسیم می‌کنیم. در هر دایره ۱۰۰ قطاع سفید و ۱۰۰ قطاع دیگر به رنگ سیاه هستند. دایره‌ی کوچک‌تر را روی دایره‌ی بزرگ‌تر قرار می‌دهیم به طوری که مرکز دو دایره روی هم قرار بگیرند. نشان دهید که همواره می‌توان دایره‌ی کوچک‌تر را چنان چرخاند که خطوط شعاعی (مرزهای) قطاع‌های دو دایره روی هم قرار بگیرند و ضمناً حداقل ۱۰۰ قطاع از دایره‌ی کوچک‌تر روی قطاع هم رنگ خود در دایره‌ی بزرگ‌تر قرار بگیرند.

۳) فرض کنید $f(x,y,z) = \dfrac{(xy+yz+zx)(x+y+z)}{(x+y)(x+z)(y+z)}$، مجموعه مقادیر حقیقی $r$ را بیابید به طوری که برای آن‌ها حداقل یک سه تایی $(x,y,z)$ از اعداد حقیقی مثبت یافت شود که $f(x,y,z) = r$.

۴) تمام زوج مرتب‌های $(a,b)$ که $a$ و $b$ اعداد صحیح هستند را بیابید به طوری که $۳^a + ۷^b$ یک مربع کامل باشد.

۵) یک مجموعه نقاط مشخص در صفحه با این خاصیت که هر سه نقطه‌ای از آن‌ها می توانند به وسیله‌ی یک دیسک به شعاع ۱ پوشانده شوند را در نظر بگیرید. ثابت کنید همه‌ی این مجموعه نقاط می‌توانند توسط دیسک به شعاع ۱ پوشانده شوند.