برگی از درخت المپیاد فیزیک

تئوری مدارهای الکتریکی

مؤلف:

حسین کامکار

انتشارات خوشخوان

پیشگفتار ناشر

وقتی تصمیم جدی می‌گیری که شروع کنی به المپیاد خوندن برای این نیست که چیزی رو به دیگران اثبات کنی، بلکه برای این‌که به خودت اثبات کنی که می‌تونی با تلاش کردن و وقت گذاشتن به هدفت برسی یا خیلی بهش نزدیک بشی.

وقتی شروع می‌کنی به المپیاد خوندن، برچسب المپیادی تو مدرسه روت می‌چسبه. دیگه می‌فهمی که باید متفاوت‌تر باشی و متفاوت‌تر عمل کنی. باید برای پیمودن این مسیر کفش آهنی به پات کنی، یکسری از تفریحات رو کنار بذاری (مثل تو اینترنت چرخیدن، با گوشی بازی کردن و ...) و ساعت‌های بیشتری رو به مطالعه و تفکر کردن و کلنجار رفتن با مسائل صرف کنی. باید از بعضی تفریحات به خواست خودت و نه خواست دیگران (پدر، مادر، معلم، مشاور و ...) بزنی، چون تویی که تصمیم اول رو باید بگیری و تو این مسیر سخت قدم برداری، دیگران فقط می‌تونن کمک و همراهت باشن. نباید بذاری برای قدم گذاشتن تو این مسیر سخت دیگران برای تو تصمیم بگیرن. باید تمام سبک و سنگین‌هات و بالا و پایین‌هات رو بکنی و بعد تصمیم بگیری، چون در این صورتِ که می‌تونی این مسیر رو با هر نتیجه‌ای که در انتها برات داره، به یکی از بزرگ‌ترین تجربه‌های زندگیت در شروع دوران نوجوانی و جوانی تبدیل کنی، و در انتهای مسیر می‌تونی با یک نتیجهٔ خوب لذت کسب این تجربه رو دو چندان بکنی.

وقتی زمان شروع مرحلهٔ اول، بعد دوم و سوم می‌رسه باید مثل یه دونده که در یک مسابقه شرکت می‌کنه از قبل آمادگی لازم رو در تمرینات کسب کرده باشی، تا با صدای شروع (شلیک گلوله) تلاش نهاییت رو شروع کنی. قبل از شروع و در حین دوران مسابقه باید آمادگی خودت رو با خوب تمرین کردن مثل یک ورزشکار بالا ببری، ولی ورزش تو بیشتر فکریه و البته باید علاوه بر مطالعه، خوب به جسم و روحتم برسی (مثل ورزش، تفریح به موقع و مناسب و ...) تا روحت رو برای این تجربه آماده کنی.

مثل هر کاری شروع به المپیادی شدن نیاز به ملزوماتی داره که باید در سال‌های قبل و یا یکی یا دو سال مونده به پایه دهم و یازدهم آماده کنی. مثلاً برای شرکت در المپیاد فیزیک باید در پایه‌های هفتم، هشتم و نهم بر مباحث فیزیک کتاب علوم کامل مسلط باشی و در این سال‌ها با افزایش ساعت مطالعه منابع ابتدایی و مقدماتی رو شروع به مطالعه کرده باشی تا با آمادگی مناسبی بتونی در المپیاد فیزیک در پایه یازدهم شرکت کنی. یا مثلاً برای شرکت در المپیاد ریاضی باید در دوره‌ی اول متوسطه ریاضی رو به حد خوبی یاد گرفته باشی و سعی کنی تا با مسائل فراتر از کتاب درسی کلنجار بری و بتونی زمان زیادی رو برای پیدا کردن راه‌حل یک مسئله صرف کنی.

المپیاد خوندن با توجه به تغییر نظام آموزشی در مدارس کشور متفاوت شده است، و دانش‌آموزان در دوره‌ی دوم متوسطه زمان کمتری برای آشنایی با انواع المپیاد و مباحث موجود در آن‌ها دارند. البته برخی از مدارس در سراسر کشور با توجه به داشتن هر دو دوره‌ی دبیرستان و از پایه‌های هفتم به بعد سعی در آموزش و استعدادیابی برای سرمایه‌گذاری در این مسیر دارند. با توجه به شرایط موجود برای دانش‌آموزانی که در مناطق محروم و یا مدارس غیرخاص تحصیل می‌کنند آشنایی و حرکت در مسیر المپیاد کمی سخت یا دشوار شده است، ولی المپیاد یک تجربه است برای نوع دیگری از زندگی، تلاش آموزنده برای شرکت در کنکور و یا حتی فراتر از آن آموزش سخت‌کوشی در مسیر زندگی.

امید می‌رود که با انتخابی درست، مسیر مناسب را پیش‌رو داشته باشید و ما نیز با ارائه‌ی این منبع آموزشی، گامی هر چند کوچک در تسهیل کردن پیمودن این مسیر، برایتان برداشته باشیم.

لازم می‌دانم از دوست عزیز و جوانم آقای حسین کامکار که قبول زحمت کردن و طی چند سال اخیر پیگیر تألیف و ویرایش کتاب بودند کمال تشکر را داشته باشم.

کتاب حاضر برای دانش‌آموزان علاقه‌مند به المپیاد فیزیک تألیف شده، و سعی شده تا این کتاب بر مباحث تئوری مدارهای الکتریکی مورد نیاز برای شرکت در این المپیاد منطبق باشد.

لازم می‌دانم از تمامی کسانی که در تولید این اثر نقش داشتند کمال تشکر را داشته باشم و از شما دوست عزیز نیز به خاطر نواقص و کمبودهای احتمالی طلب عفو دارم. از شما مخاطب گرامی انتظار می‌رود عیوب و ایرادات کار را به ما ارجاع دهید تا در چاپ‌های بعدی مورد توجه قرار گیرد.

با تشکر

رسول حاجی زاده مدیر انتشارات خوشخوان

پیشگفتار مؤلف

اشاره

کتابی که پیشِ رو دارید، قرار است یک «منبع مناسب» برای مبحثِ «مدارهای الکتریکی» در المپیادِ دانش‌آموزیِ فیزیک باشد. هدفِ نویسنده این بوده که این کتاب:

۱. سرفصل‌های لازم برای مسائل مداریِ المپیاد فیزیک را تا حد خوبی پوشش دهد؛

۲. مطالب از نظر پیش‌نیازهای ریاضیاتی با سطح دانش‌آموزانِ المپیادی متناسب باشد؛

۳. تمامیِ سطوحِ المپیاد (از مراحل کشوری تا المپیاد بین‌المللیِ فیزیک یا IPhO) را پوشش دهد؛ و

۴. مثال‌ها و مسأله‌های المپیادیِ خوبی در اختیار دانش‌پژوهان قرار دهد.

در حدی که نگارنده از «منابعِ موجود» اطلاع دارد، این منابع نمی‌توانند اهدافِ بالا را برآورده کنند. منابعِ موجود یا در سطح ریاضیاتِ متداول دبیرستان نوشته شده‌اند، یا در سطحِ ریاضیاتِ دانشگاهی، که هیچ‌کدام با سطح دانش‌آموزانِ المپیادی مناسب نیستند. در کتابِ حاضر، تلاش شده که در فصل‌های نخستِ کتاب، ریاضیاتِ سبک‌تری مورد نیاز باشد، و در اواخرِ کتاب، ریاضیاتِ جدی‌تری (معادلات دیفرانسیل و اعداد مختلط) مورد استفاده قرار گرفته است. برخی منابعِ موجودِ مبحثِ مدار (مثل کتابِ فیزیک عمومیِ هالیدی) پوشش جامعی برای سرفصل‌های مداری ندارند، و برخی آن‌قدر جامع‌اند که بسیاری از مطالب آن‌ها اضافه‌تر از سرفصل‌های لازم برای المپیاد است. البته در این بین، گاه آثار المپیادیِ خوبی پیدا می‌شوند، اما تمرکزِ آن‌ها بر مراحلِ ابتداییِ المپیاد کشوری است.

طبیعتاً کتاب پیش‌رو نیز بی‌نقص نیست. پیشاپیش از مخاطبانِ کتاب بابتِ نقص‌های کتاب عذرخواهی می‌کنم و از همه دبیران محترم و دانش‌پژوهان المپیادی می‌خواهم که در صورت مشاهده «اشتباه» یا «خلا» در کتاب، به نویسنده کتاب به آدرس اینترنتی (kamkar.hosein@gmail.com) یا ناشر اطلاع دهند تا در ویراستِ بعدی اصلاح شود.

قدرشناسی

کتابِ پیشِ رو در ظاهر نوشته‌ی یک نفر است، اما در حقیقت محصولِ یک سنتِ علمی در المپیاد فیزیک است که نسل‌های مختلفی از معلمان و شاگردان را در برمی‌گیرد.

در اینجا پس از حمد خداوند عزوجل، مایلم به رسمِ قدرشناسی، از دبیران فیزیک

خـود از ابتـدای تحصیلـم تـا پایـان دوره‌ی المپیـاد سـپاس‌گزاری کنـم، آقایـان: امیـن احمـدی، مهـدی قهرمانـی، کیـوان حسـینی، حسـن علیمحمـدی، فرهـاد احمـدی، افشـین دانش‌نـژاد، رضـا شمسـی‌پور، پیـام روغنیـان، اشـکان جعفرپـور، علـی شـهراد، رضـوان ، احمـد شـریعتی، مهـدی سـعادت، محمـود بهمن‌آبـادی، امیـر آقامحمـدی، محمـد خرمـی، کاظـم رجبـی، حجت‌اللّـه مظفـری، آرمـان اکبریـان. همچنیـن از همـه اسـاتید محترمـی کـه دوران تحصیـل در دانشکده‌ی برق دانشگاه صنعتی شریف از آن‌ها بهره‌مند شده‌ام متشکرم.

از علیرضـا حبیـب‌زاده کـه در مقطعـی، در تدویـن، ویرایـش و نـگارشِ کتـاب بـه مـن یـاری رسـاند کمـال تشـکر را دارم. همچنیـن از علیرضـا سـوری کـه بـا دقـت نظـر ویراسـتاریِ کتـاب را انجـام داده اسـت سـپاس‌گزارم. از طاهـا علیمحمـدی بابـت کمـک در گـردآوری مسـائل در موضوعـات مختلـف سـپاس‌گزارم. از همـکارانِ عزیـز سیدمحمدحسـین شـریفی و سیدحسـام فیروزی بابتِ نقطه‌نظرات ارزش‌مندی که روی نقاطی از کتاب گذاشتند سپاس‌گزارم.

همچنیـن بـر خـود لازم می‌دانـم از همـه‌ی کسـانی کـه در دوره‌ی دانش‌آمـوزیِ خـود در دبیرسـتان علامه‌حلی تهـران (۱، ۲ و ۵) کـه در دوره‌هـای تدریـسِ مـدار در سـال‌های مختلـف، بـه شـیوه‌های متنـوع (گـردآوری سـؤال، در اختیـار گذاشـتنِ جـزوات کلاس، ویرایـش متـن، تصحیـح اشـتباه محاسـباتی، دادنِ شـهودِ تـازه بـه مؤلـف یـا ارائـه محتـوای مفیـد) مسـتقیم یـا غیرمسـتقیم بـه غنـای اثـر کمـک کرده‌انـد سـپاس‌گزاری کنـم. به‌خصـوص از آقایـان: امیرصـدرا پیشـکاری، امیرحسـین مروجـی، سـپهر سـپهری، سیدشـاهد رضـوی‌زاده، حسـین بهرامـی، منصـور داودی، شـایگان ادیـم، رادمهـر فتحـی، ارشـیا یوسـف‌نیا، علیرضـا بیطرفـان، علیرضـا خسـروجردی، امیرحسـین هاشـمی، آرمیـن قـادری آزاد، سـهیل تقی‌زاده قهـی، سـروش رضایـی، مهدی شیرین‌بیان.

از مدیریـت محتـرم انتشـارات خوشـخوان جنـاب آقـای رسـول حاجـی‌زاده و سـایر دسـت انـدرکاران ایـن انتشـارات از جملـه آقـای محمـد وزیـرزاده بابـت همـکاری و مسـاعدت در چـاپ کتاب متشکرم.

حسین کامکار،

تابستان هزار و چهارصد و دو

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
فصل اول: مفاهیم پایه مدار	۱
فصل دوم: ولتاژهای مدار	۷
فصل سوم: جریان‌های مدار	۱۳
فصل چهارم: قطعات مدار	۱۹
فصل پنجم: مقاومت الکتریکی	۲۹
فصل ششم: منبع‌ها و سنجه‌ها	۵۳
فصل هفتم: قضایای مدارهای مقاومتی	۶۳
فصل هشتم: تقارن	۸۳
فصل نهم: راهبردهای تشکیل دستگاه معادلات	۱۰۳
فصل دهم: خازن	۱۰۹
فصل یازدهم: سلف	۱۴۹
فصل دوازدهم: مدارهای مرتبه دوم	۱۷۵
فصل سیزدهم: فازور و مقاومت ظاهری	۱۹۵
فصل چهاردهم: دیود	۲۱۹

فهرست مطالب

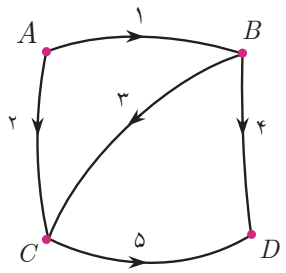
عنوان	صفحه
فصل پانزدهم: تقویت کننده‌ها و منابع وابسته	۲۳۷
مسائل بیشتر	۲۵۱
پیوست A: پتانسیل الکتریکی	۲۷۳
پیوست B: تعداد معادلات حلقه برای مدار	۲۷۷
پیوست C: پایستاری میدان الکتریکی	۲۸۱
پیوست D: محاسبه مقاومت کروی	۲۸۵
پیوست E: عملگر ||	۲۸۷
پیوست F: حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی همگن	۲۸۹
کتاب‌نامه	۲۹۳

۱

مفاهیمِ پایه‌ایِ مدار

۱ - ۱ مدار

همه ما با مفهوم مدار آشنا هستیم، ولی در این‌جا می‌خواهیم یک مدل ریاضی برای مدار و کمیت‌های اصلی آن معرفی کنیم. در نگاه ما، مدار عبارت است از گرافی که روی هر یک از یال‌هایش قطعه‌ای الکتریکی قرار دارد.[۱] در شکل ۱-۱ یک گرافِ جهت‌دار نشان داده شده است. هر کدام از نقاطِ این گراف را «رأس» یا «گره» می‌نامیم. پاره‌خط‌هایی که نقاط را به هم وصل می‌کنند را «یال» یا «شاخه» می‌نامیم. هر شاخه در حقیقت نماینده یک قطعه الکتریکی دو پایه است. همچنین به هر یک از چندضلعی‌هایی که روی شکل تشکیل می‌شوند «مِش»[۲] می‌گوییم. در حالت کلی یک گراف n گره و l شاخه و m مِش دارد. برای مثال، شکل ۱-۱ دارای ۴ گره، ۵ شاخه و دو مِش است.



شکل ۱-۱. یک گراف جهت‌دار با ۴ رأس، ۵ یال و ۲ مش

---

[۱] قطعه‌های الکتریکی معمولاً دو پا دارند، هرچند برخی از قطعات – مثل ترانزیستور – سه پا یا بیش‌تر دارند. فعلا نگران آن‌ها نباشید؛ بعدتر فکری برای قطعه‌های سه‌پا می‌کنیم!

[2] *Mesh*

جهت‌های مشخص‌شده در شکلِ گراف، نشان‌گرِ جهتِ قراردادیِ جریان هستند. معمولا برای دانش‌آموزان این سؤال وجود دارد که در ابتدای حل مدار چگونه می‌توان جهتِ جریان‌ها را تشخیص داد؟ پاسخ ساده است: الزاما در ابتدای مسأله نمی‌توان جهت همه جریان‌ها را مشخص کرد! اما می‌توان به دلخواه، یک «جهتِ قراردادی» به شاخه نسبت داد تا نشان‌گرِ «جهتِ مثبت» باشد، به‌این صورت اگر در پایانِ محاسبات، مقدارِ جریانِ شاخه منفی به‌دست آید یعنی جهتِ واقعیِ جریان برخلافِ جهتِ قراردادیِ اولیه بوده است. این‌کار مشابهِ انتخابِ جهتِ محورِ x در مسائلِ مکانیک است: یک جهت را به دلخواه «جهتِ مثبت» انتخاب می‌کنیم و می‌دانیم که ممکن است در نهایت سرعت یا شتابِ جسم را منفی به‌دست آوریم.

کمیت‌های مداریِ بسیاری وجود دارند که می‌توانند مطلوبِ یک مسأله مدار باشند: بارِ خازن‌ها، گرمای تولیدشده در مقاومت‌ها، بسامد زاویه‌ایِ نوسانِ مدار، مقاومتِ معادل و ...، اما کمیت‌های اصلی در مسأله مدار عبارتند از: ***ولتاژها*** و ***جریان‌ها***. اگر ولتاژها و جریان‌های مدار را بشناسیم، سایر کمیت‌ها هم از روی آن‌ها به‌راحتی قابل محاسبه هستند.

در این درس، به این می‌پردازیم که «ولتاژ» و «جریان» از نظر فیزیکی به چه معنایی هستند و یک مرور مختصر بر مفهومِ ولتاژ و جریان خواهیم داشت.

۱ - ۲ ولتاژ

اختلاف ولتاژ بین دو نقطه نشان‌گر چیست؟ برای پاسخ به این سؤال، باید درباره‌ی انرژی‌های پتانسیل صحبت کنیم. بگذارید از یک موردِ آشنا یعنی انرژی پتانسیل گرانشی شروع کنیم.

اگر در سطح زمین باشیم و میدان گرانشی را تقریبا یکنواخت در نظر بگیریم، می‌توان این انرژیِ پتانسیل را از رابطه‌ی آشنای $\Delta U = mg\Delta h$ به‌دست آورد. به‌صورت کلی می‌توان گفت: بین هر دو نقطه از فضا، یک مقدار اختلاف سطح انرژی گرانشی وجود دارد، یعنی اگر جرمِ m را از نقطه‌ی ۱ به نقطه‌ی ۲ انتقال دهیم، به خاطر وجود میدان گرانشی در فضا، مقداری کار روی جسم انجام می‌شود. به این صورت می‌توان اختلاف سطح انرژی بین نقاط مختلف فضا را در نظر گرفت. مثلا قله یک کوه، سطح انرژی بالاتری دارد تا سطح دریا. برای همین سنگ‌هایی که در قله‌ی کوه هستند وقتی به پایین می‌غلطند یک انرژی جنبشی پیدا می‌کنند، چون از سطح بالاتر انرژی به سطح پایین‌ترِ آن آمده‌اند و طبقِ قانونِ پایستگیِ انرژی، باید این اختلاف سطح به‌صورت انرژیِ جنبشیِ جسم ($\frac{۱}{۲}mv^۲$) ظاهر بشود.

اما اختلاف سطح انرژی بین دو نقطه را چگونه می‌توان بیان نمود و در فیزیک از آن استفاده کرد؟ یک مشکل کوچک در این‌جا این است که اختلاف انرژی پتانسیل بین دو نقطه، به جرمِ جسمی که منتقل می‌شود نیز وابسته است. اگر یک جسمِ یک کیلوگرمی جابه‌جا شود فرق می‌کند با جسمِ ده کیلوگرمی. پس وقتی می‌پرسیم اختلاف سطح انرژی بین نقطه ۱ و ۲ چقدر است نمی‌توان جواب مشخصی داد چون برای اجسام مختلف فرق می‌کند.

راه حل این مشکل، این است که اختلاف سطح انرژی را به ازای واحدِ جرم در نظر بگیریم (طبیعتاً واحدِ آن ژول بر کیلوگرم خواهد بود). در این صورت می‌توان اختلاف سطح انرژی بین دو نقطه را به‌صورت یک کمیتِ فیزیکی گزارش کرد. نام این کمیت را پتانسیلِ گرانشی می‌گذاریم. بنابراین اختلاف پتانسیلِ گرانشی بین دو نقطه برابر است با:

$$\Delta\Phi = \frac{\Delta U}{m} = g\Delta h \qquad (۱-۱)$$

مشابه معادله (۱-۱) را درباره نیروی الکتریکی نیز می‌توان نوشت. به خاطر حضور میدان الکتریکی، سطح انرژیِ نقاطِ مختلفِ فضا متفاوت است. اگر اختلاف سطح انرژی را به ازای واحدِ بار[۱] در نظر بگیریم، به کمیتِ پتانسیل الکتریکی یا همان ولتاژ می‌رسیم. بنابراین واحدِ این کمیت عبارت است از «**ژول بر کولن**»، که به اختصار به آن «**وُلت**»[۲] می‌گوییم. پس می‌توان نوشت:

$$\Delta U = q\ \Delta V \qquad (۱-۲)$$

دقت کنید که در معادله (۱-۲) بارِ q می‌تواند مثبت یا منفی باشد. دقت کنید که V همان پتانسیل الکتریکی یا ولتاژ است، ولی U انرژیِ پتانسیل الکتریکی است:

اختلاف پتانسیل ≠ اختلاف انرژیِ پتانسیل

بنابراین در یک باتریِ قلمیِ ۱٫۵ ولتیِ معمولی، یک اختلاف سطحِ انرژی بینِ دو سرِ باتری وجود دارد، به این صورت که اگر یک کولن بار از سرِ منفی به سرِ مثبتِ باتری انتقال یابد، به اندازه ۱٫۵ ژول سطح انرژی بالاتری پیدا کرده است.

---

[۱] یعنی یک واحد بارِ مثبت، $q = +۱C$

[۲] به یادِ آلسنادرو وُلتا (۱۷۴۵–۱۸۲۷)، مخترع پیل شیمیایی. البته ادعای جالبی وجود دارد مبنی بر اینکه برخی آثار باستانی ایرانیان، حکایت از این دارد که بین سال‌های ۶۵۰ تا ۱۵۰ پیش از میلاد، ایرانیان از باتری‌های شیمیایی برای آبکاری فلزات استفاده می‌کرده‌اند! سرچ کنید: *Baghdad Battery*.

به‌صورت مشابه، اگر بارِ q از سرِ مثبتِ باتری به سرِ منفیِ باتری منتقل شود، مقداری از سطحِ انرژی آن کم می‌شود. این همان انرژی‌ای است که به قطعاتِ مدار داده شده و مثلا می‌توان با آن، یک لامپ را روشن کرد. در پیوستِ A کمی عمیق‌تر درباره مفهومِ ولتاژ الکتریکی توضیح داده‌ایم.

۱ - ۳ جریان

جریان الکتریکی، آهنگ عبورِ بار در واحدِ زمان در یک شاخه است:

$$I = \frac{dq}{dt} \qquad (۱-۳)$$

بنابراین واحد جریان الکتریکی عبارت است از «***کولن بر ثانیه***» که به اختصار آن را «***آمپر***»[۱] می‌نامند. جریان الکتریکی معمولا حاصل از حرکت الکترون‌های آزاد در یک ماده رسانا در اثر میدان الکتریکی است.[۲] با توجه به کوچک بودن بار الکترون‌ها می‌توان جریان ناشی از آن‌ها را یک کمیت پیوسته به حساب آورد. بار الکترون مطابق قراردادی تاریخی منفی تعریف شده است و مقدار عددی آن برابر با $e = ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹}\, C$ است.

۱ - ٤ جهت قراردادیِ ولتاژ و جریان

قبلا گفتیم که جهتِ قراردادیِ جریان را می‌توان در ابتدای حل مسأله مدار، به دل‌خواه انتخاب کرد. اما آیا جهتِ ولتاژِ همان شاخه را هم دوباره به دل‌خواه انتخاب می‌کنیم؟ پاسخ منفی است. هماهنگیِ جهتِ ولتاژها و جهتِ جریان‌ها بسیار کلیدی است، و اگر به این هماهنگی توجه نداشته باشیم، ممکن است مثلا رابطه ولتاژ و جریانِ یک مقاومت، به‌صورت زیر در آیند:

$$V = -RI \qquad (۱-٤)$$

---

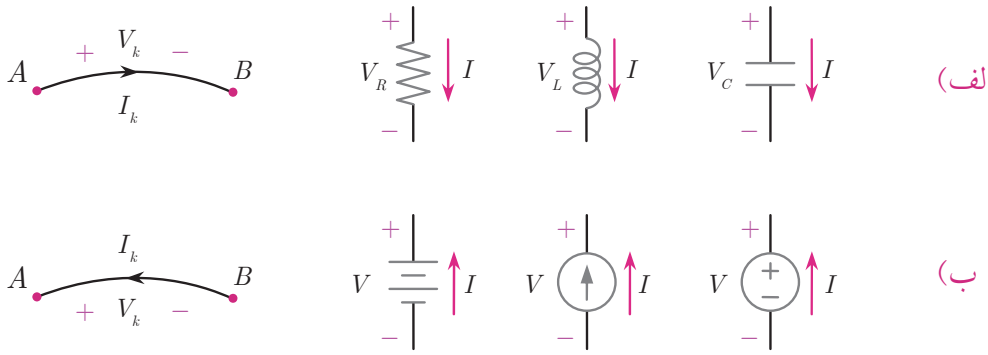
[۱] به یادِ آندره‌ماری آمپر، ۱۷۷۵–۱۸۳۶، یکی از تئوری‌پردازانِ اصلیِ نظریه الکترومغناطیس. در حقیقت از نظرِ تاریخی، ابتدا واحد «آمپر» تعریف شده و واحدِ کولن به‌صورت آمپر در ثانیه تعریف می‌شود، به همین دلیل در سیستم واحدهای بین‌المللی (SI) «جریان» از کمیت‌های اصلی شمرده می‌شود نه «بار الکتریکی».

[۲] جریان الکتریکی در یک سیم عموما ناشی از حضور میدان الکتریکی است، ولی در حالت کلی می‌توان حرکت و گذر بارها را بدون میدان الکتریکی نیز تصور کرد. مثلا در پدیده ابررسانایی هنگامی که دمای برخی فلزات را به دماهای پایین (مثلا ۲۰ کلوین) می‌رسانیم، مقاومت الکتریکی رسانا برابر صفر می‌شود و جریان الکتریکی بدون هیچ تضعیفی و بدون هیچ منبع تغذیه بیرونی به‌صورت پایدار در ابررسانا برقرار می‌ماند.

معادله (۱-٤) یک علامتِ منفی نسبت به معادله مشهور و همیشگیِ مقاومت‌ها اضافه‌تر دارد! طبیعتا ما علاقه نداریم این منفی‌های اضافه و آزاردهنده در معادلاتمان پیدا شوند، و بنابراین باید یک **اصلِ هماهنگی** بین جهتِ ولتاژ و جهتِ جریان قرارداد کنیم تا معادلاتِ خود را بر اساسِ آن تنظیم کنیم. این اصل، به این صورت است:

الف) در قطعات مصرف‌کننده[1] انرژی (مثل مقاومت، خازن، سلف، دیود و ...) جهت‌ها به‌صورتی انتخاب می‌شوند که جهت جریان از سر مثبت به سر منفی باشد (شکل ۱-۲ الف).

ب) در قطعات الکتریکی تولیدکننده[2] انرژی (مثل انواع منابع تغذیه) جهت‌ها به‌صورتی انتخاب می‌شوند که جهت جریان از سر منفی به سر مثبت باشد (شکل ۱-۲ ب).



شکل ۱-۲. جهت قراردادی ولتاژ و جریان برای (الف) قطعات مصرف‌کننده و (ب) قطعات مولد انرژی.

۱ - ۵ توان

در ابتدای این درس، گفتیم که اگر ولتاژها و جریان‌های مدار را بدانیم، سایر کمیت‌ها را به راحتی می‌توان به‌دست آورد. در این بخش، به عنوانِ یک نمونه، به محاسبه «توان» قطعات الکتریکی می‌پردازیم. توانِ لحظه‌ایِ یک قطعه الکتریکی دل‌خواه برابر است با:

$$P_{(t)} = I_{(t)} V_{(t)} \qquad (۱-۵)$$

که در آن، $V_{(t)}$ و $I_{(t)}$ عبارتند از ولتاژِ لحظه‌ای و جریانِ لحظه‌ایِ قطعه.

---

[1] *Passive*
[2] *Active*

برای اثباتِ (۱-۵) فرض کنید بارِ dq در مدت‌زمانِ کوچکِ dt از قطعه عبور می‌کند. در این بین، انرژیِ بارِ dq بنا بر معادلاتِ (۱-۲) و (۱-۳) به اندازه زیر تغییر می‌کند:

$$dE = V_{(t)}dq = V_{(t)}I_{(t)}dt$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$P_{(t)} = \frac{dE}{dt} = I_{(t)}V_{(t)}$$

دقت کنید که اگر جهتِ ولتاژها و جریان‌ها مطابقِ «اصلِ هماهنگی جهت‌ها» در بخشِ قبل انتخاب شده باشند، آن‌گاه $P_{(t)}$ برای قطعات مصرف‌کننده، نشان‌گرِ «***توانِ مصرفی***» و برای قطعاتِ تولیدکننده، نشان‌گرِ «***توانِ تولیدی***» خواهد بود. زیرا اولی آهنگِ کاهش‌یافتنِ انرژی بارهای گذرنده از قطعه را مشخص می‌نماید و دومی آهنگ افزایش‌یافتنِ انرژی بارها را.

دقت کنید که «توانِ مصرفی» الزاماً به معنای «توانِ اتلافی» نیست. انرژی‌ای که یک قطعه مصرفی می‌گیرد، گاه به‌صورت یک انرژیِ قابلِ بازیابی در آن ذخیره می‌شود، مثل انرژی الکتریکی ذخیره‌شده در خازن یا انرژی مغناطیسی ذخیره‌شده در سلف؛ و گاه تبدیل به‌صورتی از انرژی می‌شود که قابل بازیابی نیست، مثل گرمای ایجاد شده در مقاومت‌ها، که بنا بر قانون دوم ترمودینامیک، قابل بازیابی نیست[۱].

[۱] البته اگر بخواهیم دقیق صحبت کنیم، مطابق قانونِ دومِ ترمودینامیک، بخشی از انرژی گرمایی (و نه تمام آن) قابل بازیابی است. اگر گرمای تولیدشده در مقاومت را در یک ماشینِ گرمایی استفاده کنیم، بسته به بازده آن ماشین گرمایی، بخشی از گرما را می‌توانیم به‌صورت کار بازیابی کنیم.

۲

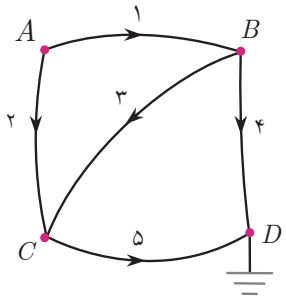
ولتاژهای مدار

۲ - ۱ ولتاژِ گره، ولتاژِ شاخه

در درس ۱ با مفهومِ «ولتاژ» آشنا شدیم و گفتیم که هر شاخه از شاخه‌های مدار، اختلاف ولتاژی دارد که جهت آن از اصلِ هماهنگی (بخشِ ۱-٤) به‌دست می‌آید. بنابراین اگر مدار دارای l شاخه باشد، اطلاعاتِ ولتاژهای مدار را با l متغیر به نامِ «***ولتاژِ شاخه***» می‌توان توصیف کرد.

اما اگر برای مدار یک مبدأ پتانسیل (که معمولا «زمین» نامیده می‌شود) انتخاب کنیم، به هر گره از گره‌های مدار می‌توان یک ولتاژ نسبت داد که نسبت به آن مبدأ پتانسیل معین سنجیده شده است. بر این اساس اگر مدار دارای n گره باشد، اطلاعاتِ ولتاژهای مدار را با $n-1$ متغیر به نامِ «ولتاژِ گره» نیز می‌توان توصیف کرد، زیرا یک گره را به عنوان «زمین» انتخاب کرده‌ایم.

پس با دو سیستم می‌توان اطلاعاتِ مربوط به ولتاژها را ارائه کرد. هر یک از این دو سیستم را که بدانیم می‌توانیم با محاسباتی ساده به سیستم دیگر نیز برسیم. مثلا برای گراف شکل ۲-۱، این دو سیستم به این صورت خواهند بود:



شکل ۲-۱

متغیرهای مدار برحسب سیستمِ ولتاژِ شاخه‌ها: پنج متغیر شاملِ V_{AB}، V_{AC}، V_{BC}، V_{BD}، V_{CD}.

متغیرهای مدار برحسب سیستمِ ولتاژِ گره‌ها: سه متغیر شاملِ V_A، V_B، V_C.

بین متغیرهای این دو سیستم، روابطِ ساده‌ای برقرار است. مثلا:

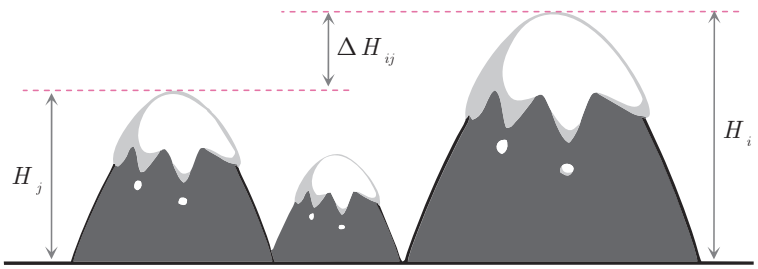
$$V_{BC} = V_B - V_C$$

اما کار کردن با کدام یک از این دو سیستم راحت‌تر/ بهتر است؟ در برخی از موارد، سیستمِ ولتاژِ گره انتخابِ مناسب‌تری است، چرا که با متغیرهای ولتاژیِ کمتری کار می‌کند، و این یعنی در نهایت، تعداد مجهول‌های ولتاژیِ ما کمتر خواهد بود و دستگاه معادلاتی که برای مدار خواهیم داشت کوچک‌تر می‌شود. اما گاهی هم انتخابِ سیستمِ ولتاژِ شاخه برتری دارد. در این درس، هدف، شناختِ این دو سیستمِ مختلف و رابطه بین آن‌هاست. درباره این‌که در هر مسأله کدام انتخاب بهتر است در درسِ ۹ صحبت خواهیم کرد. همچنین پیوستِ B توصیفِ دقیق‌تری از رابطه این دو سیستم ارائه می‌دهد.

۲ - ۲ قانونِ حلقه (KVL)

قانون حلقه (و یا قانونِ ولتاژِ کیرشهف[۱]، یا به اختصار: KVL[۲]) بیان می‌کند که در یک مسیر بسته، مجموع اختلاف ولتاژها برابر صفر است. برای توضیح این قانون، از یک مثال استفاده می‌کنیم.

یک کوهستان را در نظر بگیرید که شامل n کوه است (شکل ۲-۲). کوه‌نوردِ A که در ابتدا روی یکی از قله‌ها (مثلا قله M_1) است تصمیم می‌گیرد به یک گردش کوهستانی برود و از قله‌ای به قله دیگر برود و نهایتا به نقطه ابتدایی (همان قله M_1) باز گردد. او در این سفر، از قله‌های مختلفی عبور می‌کند، و اختلاف ارتفاع هر دو قله پیاپی در مسیر خود را در دفترچه‌اش ثبت می‌کند. این اختلاف ممکن است مثبت یا منفی باشد. مثلا اگر از کوهِ i اُم به کوهِ j اُم برود، مقدارِ ΔH_{ij} را به عنوانِ اختلاف ارتفاعِ دو قله (یعنی $H_j - H_i$) ثبت می‌کند. قانونِ مسیرِ بسته بیان می‌کند که وقتی کوه‌نورد به نقطه ابتدای مسیرش می‌رسد، جمعِ اختلاف ارتفاع‌های مثبت و منفی‌ای که در مسیرش ثبت کرده است برابر صفر خواهد بود.



شکل ۲-۲. کوهستان!

[۱] گوستاو روبرت کیرشهف (۱۸۲۴–۱۸۸۷)، فیزیک‌دانِ آلمانی، که قانونِ حلقه و قانونِ گره (بخشِ ۳–۱) به یادِ او نام‌گذاری شده است.

[2] *Kirchhoff's voltage law*

اگر مجموع اختلاف ارتفاع‌های مثبت و منفی صفر نشوند حتماً اشتباهی رخ داده است. فرض‌کنید کوه‌نورد از قله ۱ به قله ۲ و سپس قله ۳ برود و از آن‌جا از راهی دیگر به قله ۱ برگردد. اگر در دو قسمت سفرش این اعداد را ثبت کرده باشد:

$$\Delta H_{۱۲} = +۱۵۰۰\ m$$

$$\Delta H_{۲۳} = -۷۰۰\ m$$

با توجه به این اطلاعات، می‌توان محاسبه کرد که او حتما در قسمت سوم سفرش چه عددی را ثبت نموده است:

$$\Delta H_{۳۱} = -۸۰۰\ m$$

بنابراین یک رابطه جبری بین اختلاف ارتفاعِ کوه‌ها وجود دارد:

$$\Delta H_{۱۲} + \Delta H_{۲۳} + \Delta H_{۳۱} = ۰$$

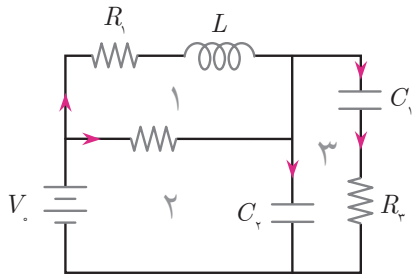
قانونِ حلقه در مدار نیز مشابه همین سخن را درباره‌ی اختلاف ولتاژِ شاخه‌های مدار بیان می‌کند:

قانون حلقه در مدار (KVL)

در هر مسیر بسته در مدار، مجموع اختلاف ولتاژهایی که در طول حلقه دیده می‌شود برابر صفر است.

۱-۲-۲ مثال

برای سه حلقه مشخص شده در شکل ۲-۳، قانون حلقه را بنویسید.



شکل ۲-۳

پاسخ: مهم‌ترین اشتباهِ رایجِ دانش‌آموزان در نوشتنِ قانونِ حلقه، اشتباه کردنِ مثبت و منفی‌ها در معادله جبری KVL است. به همین دلیل، باید در توجه به مثبت و منفی‌ها دقت داشته باشید.

در ابتدا به هر شاخه، یک متغیر نسبت می‌دهیم. با توجه به جهت جریان‌ها در شکل ۲-۳ و مطابقِ اصلِ هماهنگی (بخشِ ۱-٤)، جهتِ مثبت و منفیِ متغیرهای ولتاژی تعیین (و نه انتخاب) می‌شوند. دقت کنید که معادله KVL را برحسب جهت‌های قراردادی می‌نویسیم و کاری به «جهت واقعی» ولتاژ نداریم. از یک نقطه دلخواه روی حلقه آغاز می‌کنیم. اگر از سر مثبت به سر منفی برویم (افت ولتاژِ قراردادی) متغیرِ ولتاژ آن شاخه را با علامت منفی می‌نویسیم، در غیر این صورت علامت آن مثبت خواهد بود. بنابراین برای حلقه‌های مدار شکل ۲-۳ خواهیم داشت:

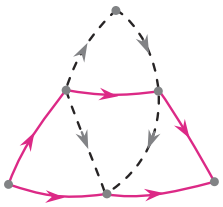
حلقه ۱: $-V_{R_1} - V_L + V_{R_2} = 0$

حلقه ۲: $+V_0 - V_{R_2} - V_{C_2} = 0$

حلقه ۳: $-V_{C_1} - V_{R_3} + V_{C_2} = 0$

۲ - ۳ تعداد معادلاتِ حلقه

در یک مدارِ ساده، به تعدادِ مش‌های مدار می‌توان معادله‌ی KVL مستقل نوشت.[1] مثلا برای مدارِ مثالِ ۲-۲-۱ می‌توان سه معادله KVL نوشت. درست است که قانون KVL برای حلقه‌های ترکیبی (مثلِ مسیرِ پررنگ در شکل ۲-٤) نیز برقرار است، اما معادله KVL حلقه ترکیبی را می‌توان با جمع زدن معادلات KVL مش‌های درونی آن به‌دست آورد (اثبات کنید) و بنابراین معادله مستقلی نسبت به معادله مش‌های درونش به‌دست نمی‌دهد، یا به تعبیری «اطلاعات جدیدی» به‌دست نمی‌دهد. در عین حال، ممکن است در برخی از مسائل، نوشتن KVL حلقه ترکیبی مناسب‌تر باشد و راهِ حل را کوتاه‌تر کند.



شکل ۲-۴. حلقه ترکیبی شامل سه مش

[1] برای اثباتِ این مطلب و توضیحاتِ آن، به پیوستِ B نگاه کنید.

۲ - ٤ حذفِ معادلاتِ حلقه

در ابتدای این درس گفتیم که اطلاعاتِ ولتاژیِ یک مدار با n گره و l شاخه را می‌توان به دو صورت توصیف کرد:

۱. ولتاژِ شاخه‌ها (l متغیر)

۲. ولتاژِ گره‌ها ($n-۱$ متغیر)

اگر با سیستمِ ولتاژِ گره‌ها کار کنیم، اساساً نیازی به نوشتنِ معادلاتِ KVL نخواهیم داشت!

مثالِ کوهستان بخش ۲-۲ را در نظر بگیرید: اگر n قله داشته باشیم و یکی از آن‌ها را به عنوان مبدأ ارتفاع در نظر بگیریم، ارتفاعِ سایرِ کوه‌ها کاملا از هم استقلال دارند. یعنی با دانستنِ ارتفاعِ دماوند و ارتفاعِ دنا، نمی‌توان ارتفاع سهند را محاسبه نمود! هر قله‌ای ارتفاع خاصِ خود را دارد. بنابراین دقیقا $n-۱$ کمیت مستقل داریم، بدون این‌که هیچ قیدی بین آن‌ها وجود داشته باشد.

اما اختلاف ارتفاع‌ها چنین نیستند: اگر اختلاف ارتفاعِ بینِ دماوند و دنا ($\Delta H_{۱۲}$) و اختلاف ارتفاعِ بینِ دنا و سهند ($\Delta H_{۲۳}$) را داشته باشیم، می‌توان اختلاف ارتفاع بین دماوند و سهند ($\Delta H_{۱۳}$) را نیز محاسبه نمود. لذا بین این سه کمیت، یک قید وجود دارد که در حقیقت قانونِ مسیرِ بسته در کوهستان بیان‌گر آن است.

درباره‌ی ولتاژها هم دقیقا به همین صورت می‌توان استدلال کرد.

بنابراین اگر با ولتاژِ گره‌ها کار کنید، یک مزیت محاسباتی مهم دارید: دیگر لازم نیست قانونِ حلقه بنویسید! این نکته، ایده اصلی یکی از استراتژی‌های حل مدار (درس ۹) است. با این حال نباید فکر کنید که قانونِ حلقه، قانونِ اضافه‌ای است! خیلی وقت‌ها ساده‌تر است که مسأله را برحسب ولتاژِ شاخه‌ها و معادلاتِ KVL حل کنیم.

۳

جریان‌های مدار

۳ - ۱ قانون گره

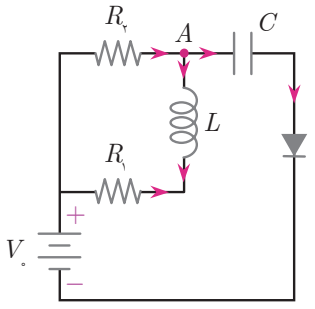
قانون گره (و یا قانونِ جریانِ کیرشهف، و یا به اختصار KCL[1]) بیان می‌دارد که جریان‌های ورودی یک گره با جریان‌های خارج شده از آن برابر است. اگر جریان‌های ورودی را با علامتِ مثبت و جریان‌های خروجی را با علامتِ منفی در نظر بگیریم، می‌توان گفت:

قانون گره

مجموع جریان‌هایی که به یک گره وارد می‌شوند باید برابر صفر باشند.

برای مثال، برای گره A در شکل ۳-۱ می‌توان نوشت:

$$i_{R_2} - i_L - i_C = 0$$



شکل ۳-۱

[1] *Kirchhoff's current law*

۳ - ۲ چارچوبِ معادلاتِ گره

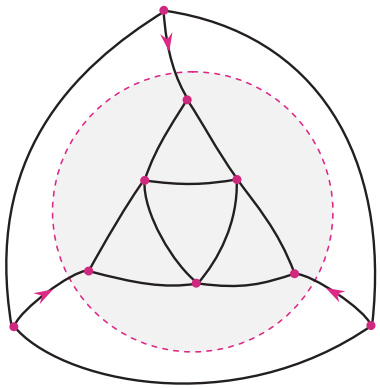
معادلات KCL درباره‌ی همه‌ی جریان‌های مختلف مدار در یک لحظه هستند. اما اگر یک مدارِ بسیار بزرگ (مثلا در ابعاد کهکشانی!) در نظر بگیریم، یا تغییرات مدار را بسیار سریع در نظر بگیریم، مطابق محدودیت‌های نظریه نسبیت خاص اطلاعات نمی‌توانند با سرعتی بیش از سرعت نور منتقل شوند. بنابراین اگر در یک سوی مدار، جریانی کاهش یابد، در سوی دیگر مدار هنوز جریان‌ها متوجه این کاهش نشده‌اند. در حقیقت می‌توان گفت اگر ابعاد مدار را با شاخص L و بسامد تغییرات مدار را با شاخص f مشخص کنیم، معادلات KCL در صورتی برقرارند که داشته باشیم:

$$Lf \ll c$$

که در آن c سرعت نور است. این شرط برای بسیاری از مدارها با ابعاد معمولی و متعارف کاملا برقرار است. البته اگر برای مثال بسامد مدار از مرتبه $1GHz$ باشد، برای مدارهای با ابعاد معمولی نیز نوشتن معادلات KCL می‌تواند محل مناقشه باشد. در چنین شرایطی، اتفاق‌های جالب دیگری نیز می‌افتد، از جمله این‌که مدار شروع به تابش می‌کند و این دقیقا اتفاقی است که در آنتن‌ها رخ می‌دهد.

۳ - ۳ آبَرگره

فرض کنید که یک سطح بسته، قسمتی از یک مدار را در بر بگیرد، به‌صورتی که تنها یال‌های مدار را قطع کند و از هیچ رأسی عبور نکند (شکل ۳-۲). قسمتی از این مدار را که درون این سطح بسته قرار دارد یک آبَرگره[1] می‌نامیم. ادعا این است که قانون KCL برای این ابرگره نیز صادق است. یعنی مجموع جریان‌هایی که وارد سطح می‌شوند باید برابر صفر باشد.



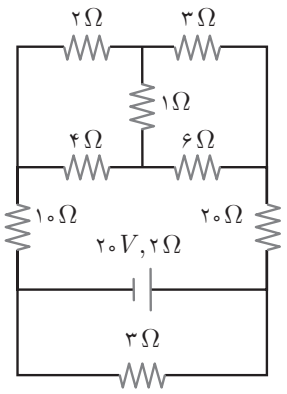
شکل ۳-۲. ابرگره

[1] *Super node*

برای اثبات این نکته کافی است برای رأس‌های داخل سطح بسته قانون KCL را بنویسیم و با هم جمع کنیم. از آن‌جا که جریان هر یالی که کاملا در درون سطح قرار داشته باشد دقیقا دو بار (به ازای هر یک از رأس‌های دو طرف آن) یک بار با علامت مثبت و بار دیگر با علامت منفی در این حاصل جمع حاضر می‌شود، جمع جریان‌های این یال‌ها برابر صفر خواهد شد و تنها جریان یال‌هایی باقی می‌ماند که سطح بسته آن‌ها را قطع نموده است (یعنی تنها یک رأس آن‌ها درون ابرگره است). بنابراین صفر شدن جمع جریان‌ها در گره‌های درونی معادل صفر شدن جمع جریان‌های ورودی به ابرگره است و قانون KCL نه تنها برای گره‌ها بلکه برای ابرگره‌ها نیز صادق است.

۳-۳-۱ مثال

در مدار شکل ۳-۳ نسبت ولتاژ دو سر مقاومت ۲۰Ω به ولتاژ دو سر مقاومت ۱۰Ω چقدر است؟



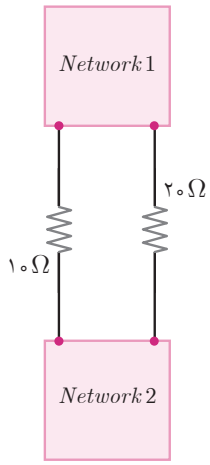
شکل ۳-۳. مثالِ ۳-۳-۱.

پاسخ: این سؤال را می‌توان با کمک تحلیل ابرگره، به راحتی حل کرد. پنج مقاومت بالایی را یک ابرگره در نظر می‌گیریم و درمی‌یابیم که جریان مقاومت ۱۰Ω و مقاومت ۲۰Ω برابر است. بنابراین می‌توان نسبت ولتاژهای دو سر آن‌ها را محاسبه نمود. بنابراین برای حل این سؤال، نیازی به حل سایر قسمت‌های مدار نخواهیم داشت. می‌توان گفت:

$$\frac{V_۱}{V_۲}=\frac{I_۱R_۱}{I_۲R_۲}=\frac{R_۱}{R_۲}=\frac{۲۰\Omega}{۱۰\Omega}=۲$$

بنابراین طراح سؤال می‌توانست شکل مدار مسئله را به دلخواه دشوارتر نماید. در شکل ۳-٤ حالت کلی‌تری از مسأله ترسیم شده است که البته پاسخ آن هیچ تفاوتی با محاسبه بالا ندارد. تنها این نکته مهم

است که بین شبکه مداری بالا و شبکه مداری پایین هیچ شاخه دیگری جز شاخه‌های ترسیم شده وجود نداشته باشد تا KCL برای ابرگره‌ها صادق باقی بماند.



شکل ۳-۴. تعمیمِ مثالِ ۳-۳-۱

۳ - ٤ تعداد معادلات گره

در یک مدار با n گره، دقیقاً $n-1$ معادله KCL می‌توان نوشت. می‌توان اثبات کرد که معادله آخرین گره همیشه تکراری از آب در می‌آید و معادله مستقلی نیست.

اگر دور $n-1$ گره از مدار، یک سطح بسته بکشیم و آن را به عنوان یک ابرگره در نظر بگیریم، با توجه به استدلالی که گفته شد می‌توان گفت: قانون گره برای این ابرگره نیز صادق است. شاخه‌هایی که از ابرگره خارج می‌شوند همان شاخه‌هایی هستند که به n اُمین گره وارد می‌شوند. نوشتن قانون KCL برای گره‌های درونی معادل نوشتن قانون KCL برای تنها گره بیرونی باقی مانده است. بنابراین آخرین گره، معادله KCL مستقلی به‌دست نخواهد داد. پس هر مدار با n رأس دقیقا دارای $n-1$ معادله KCL مستقل است.[۱]

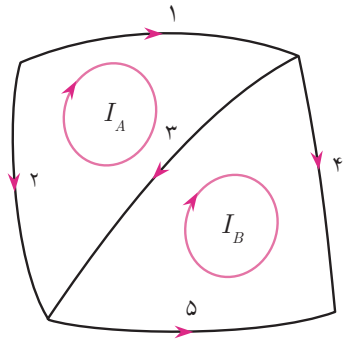
۳ - ۵ حذفِ معادلاتِ گره: معرفیِ جریانِ مش

در بخش ۲-٤ دیدیم که چگونه انتخابِ «ولتاژِ گره‌ها» به عنوانِ متغیرهای اصلیِ توصیف‌گرِ اطلاعاتِ ولتاژی، ما را از نوشتنِ معادلاتِ حلقه بی‌نیاز می‌کرد. آیا ترفندی مشابه وجود دارد که بتوان با انتخابِ

[۱] البته دقیق‌تر این است که به جاری هر مدار بگوییم هر مدار هم‌بند. اگر گراف مدار، ناهم‌بند باشد قضیه کمی تفاوت می‌کند. می‌توانید رابطه آن را خودتان کشف کنید.

مناسبِ متغیرهای اصلی، ما را از نوشتنِ معادلاتِ حلقه بی‌نیاز کند؟ خواهیم گفت که اگر «**جریانِ مش‌ها**» را به عنوان متغیرهای اصلیِ توصیف‌گرِ جریان‌ها در نظر بگیریم، اتفاقِ مشابهی می‌افتد.

قبلا گفته بودیم که «مش» عبارت است از نواحیِ درونیِ مدار. مثلا شکل ۳-۵ مداری شاملِ دو مش را نشان می‌دهد. برای توضیحِ جریانِ مش، مدارِ شکل ۳-۵ را در نظر بگیرید. فرض کنید به هر یک از مش‌های مدار یک جریان نسبت دهیم، یعنی I_A و I_B که هر یک مربوط به یکی از دو مشِ مدار هستند.



شکل ۳-۵. جریانِ مش‌ها

جریانی که از یک مش می‌گذرد، در حقیقت از همه شاخه‌های پیرامونیِ مش عبور می‌کند. اما اگر به شاخه ۳ روی مدارِ شکل ۳-۵ نگاه کنید می‌بینید که در دو طرفِ این شاخه، دو جریانِ مشِ مختلف برقرار است. در چنین مواردی، «برآیند» دو جریانِ مش از شاخه مزبور عبور خواهد کرد. بنابراین برای جریان شاخه‌های شکل ۳-۵ خواهیم داشت:

$$i_۱ = I_A, \qquad i_۲ = -I_A, \qquad i_۳ = I_A - I_B, \qquad i_۴ = I_B, \qquad i_۵ = -I_B$$

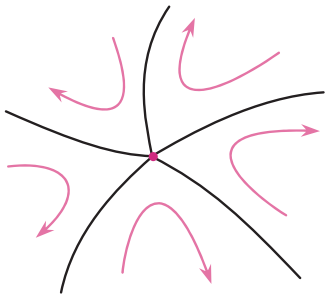
بدین صورت کل اطلاعات مربوط به جریان‌های مدار شکل ۳-۵ قابل خلاصه‌سازی در دو متغیر I_A و I_B است. جریان همه شاخه‌ها از این دو متغیر به نحوی به‌دست خواهند آمد که معادلات و قیود KCL برقرار بماند.

در این‌جا، دو ادعا مطرح است که هر کدام را به ترتیب اثبات می‌کنیم.

ادعای اول: اگر جریانِ شاخه‌ها را با «برآیندگیری» از جریان مش‌های دو طرفش به‌دست آوریم، در تمامِ گره‌های مدار KCL برقرار می‌ماند.

اثباتِ ادعای اول: یک گره دلخواهِ مدار را در نظر بگیرید و فرض کنید که k شاخه به آن وارد می‌شوند. اگر جریانِ شاخه‌ها با برآیندگیری از جریانِ مش‌ها به‌دست بیایند، خواهیم دید که جریانِ مش‌ها به دلیل چرخشی

بودنشان، از یک شاخه وارد و از شاخه دیگر خارج می‌شوند (شکل ۳-۶) و لذا برای هر جریانِ مش، جمعِ جبریِ جریان‌های ورودی برابرِ صفر است. بنابراین جریان‌های مش، KCL را برقرار نگه می‌دارند.



شکل ۳-۶. جریان‌های مش، پس از ورود به گره، از آن خارج می‌شوند.

ادعای دوم: متغیرهای جریانِ مش، متغیرهای مستقلی هستند که قیدی بین آن‌ها برقرار نیست و در ضمن تمامِ اطلاعاتِ جریانیِ مدار را به ما می‌دهند.

اثباتِ ادعای دوم: فرض کنید گراف مدار دارای n گره و l شاخه باشد. اگر جریان شاخه‌ها را متغیرهای اصلی بگیریم، به l متغیر احتیاج داریم، که بین آن‌ها قیودِ KCL برقرار است. مطابقِ بخشِ ۳-٤، تعداد معادلاتِ مستقلِ KCL برابر با $n-1$ است. هر قید، یک درجه از درجاتِ آزادیِ متغیرهای اصلی می‌کاهد. بنابراین در اطلاعاتِ جریان‌های مدار، $l-n+1$ درجه آزادی وجود دارد. از طرفی مطابق قضیه اویلر برای گراف‌های مسطح (نگاه کنید به پیوست B) تعدادِ مش‌های مدار دقیقا برابر است با $l-n+1$. بنابراین تعدادِ متغیرهای انتخاب‌شده دقیقا برابر است با تعدادِ درجاتِ آزادیِ جریان‌های مدار.

نتیجه این دو ادعا این می‌شود که اگر اطلاعات جریان‌های مدار را با جریان مش‌های آن توصیف کنیم، دیگر نیازی به نوشتن معادلات KCL نخواهیم بود.

نکته قابل ذکر این است که ما نمی‌توانیم هم‌زمان هم معادلاتِ KVL و هم معادلاتِ KCL را حذف کنیم. اگر متغیرهای اصلی ولتاژی را «ولتاژِ گره‌ها» انتخاب کنیم، هرچند معادلاتِ KVL حذف می‌شوند اما باید برای گره‌ها KCL نوشت. در نقطه مقابل، اگر متغیرهای اصلی جریانی مدار را «جریان مش‌ها» انتخاب کنیم، معادلات KCL حذف می‌شوند، اما باید برای مش‌های مدار KVL بنویسیم. درباره این دو استراتژیِ مختلف، در درس ۹ توضیحات بیشتری خواهیم داد.

۴

قطعاتِ مدار

۴ - ۱ معادلاتِ قطعه‌ها

در درس ۲ و درس ۳ با معادلاتِ KVL و KCL آشنا شدیم. این معادلات، صرفاً به «**شکلِ کلیِ گرافِ مدار**» وابسته بودند و درباره ولتاژ و جریانِ شاخه‌ها معادلاتی را در اختیار می‌گذاشتند. در کنارِ این‌ها، معادلاتِ دیگری هم لازم است که «**عملکردِ قطعاتِ مدار**» را در اختیار ما بگذارد. عملکرد یک قطعه الکتریکی وقتی شناخته می‌شود که رابطه ولتاژ و جریان آن را بشناسیم. برای مثال، عملکرد یک مقاومت الکتریکی با مقاومت R با قانون اهم یعنی

$$V_{(t)} = R\ I_{(t)}$$

شناخته می‌شود. به معادله‌ای که رابطه ولتاژ و جریانِ یک قطعه را مشخص می‌کند «**معادله قطعه**» می‌گوییم.

بنابراین برای حل یک مدار، سه نوع معادله در اختیار داریم:

۱. معادلات KVL: معادلاتی که رابطه ولتاژ یک شاخه با ولتاژ سایر شاخه‌های مدار را مشخص می‌کند.

۲. معادلات KCL: معادلاتی که رابطه جریان یک شاخه با سایر جریان‌های مدار را مشخص می‌کنند.

۳. معادلات قطعات: معادلاتی که رابطه ولتاژ و جریان یک شاخه را بیان می‌کند.

با دانستنِ معادلاتِ مربوط به قطعات، می‌توان مسأله مدار را به‌صورت کامل حل کرد. اگر یک مدار با n گره و l شاخه داشته باشیم و اگر جریان‌ها و ولتاژهای شاخه‌ها را به عنوان مجهول در نظر بگیریم، $2l$ مجهول در مسأله خواهیم داشت. بنابراین به $2l$ معادله مستقل برای حل کامل مدار احتیاج داریم. این معادلات عبارتند از:

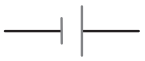
تعداد معادلات KVL	$l-n+۱$
تعداد معادلات KCL	$n-۱$
تعداد معادلات قطعه‌ها	l
مجموع	$۲l$

(۱-٤)

پس برای این‌که از نظرِ تئوریک، مدار حل شود، لازم است عمل‌کرد همه قطعاتِ مدار را شناخت. البته این خبرِ خوب را هم باید بدهم که برای حل یک مسئله‌ی مدار، همیشه لازم نیست یک دستگاه $۲l$ معادله - $۲l$ مجهول را حل کنیم! راه‌ها و استراتژی‌هایی وجود دارد که دستگاه معادلات مدار را ساده‌تر و کوچک‌تر می‌کند. بسیاری از درس‌های بعدیِ کتاب، دقیقا همین هدف را دنبال می‌کنند.

در حالت کلی، در یک معادله‌ی المانی ممکن است مشتقاتِ ولتاژ و جریان نیز ظاهر شوند. در جدول ٤-۱، «معادلات قطعه» برای برخی از قطعات مهم را فهرست کرده‌ایم.

جدول ۴-۱. معادله برخی از قطعاتِ اصلیِ مدار

نام قطعه	نمادِ مداری	معادله قطعه
مقاومت الکتریکی		$V=RI$
سیم (اتصال کوتاه)		$V=۰$
قطعی (اتصال باز)		$I=۰$
باتری		$V=V_{۰}$
منبع جریان		$I=I_{۰}$
خازن		$I=C\frac{dV}{dt}$
سلف		$V=L\frac{dI}{dt}$

در این‌جا به معرفیِ اجمالیِ قطعات جدول ٤-۱ می‌پردازیم، هرچند در درس‌های بعدی، توضیح بیش‌تری درباره هر یک از این قطعات ارائه خواهد شد.

مقاومت، قطعه‌ای است که رابطه ولتاژ و جریان آن به‌صورت خطی است:

$$V=RI \qquad (۲-٤)$$

سیمِ آرمانی (یا اتصال کوتاه) رسانایی است که مقاومتِ الکتریکیِ آن صفر باشد، بنابراین چنین موجودی می‌تواند بدون هیچ اختلاف پتانسیلی در دو سرش، از خود جریان‌های دلخواه عبور بدهد.

قطعی (یا اتصال باز) با این‌که یک قطعه الکتریکی نیست، اما ارائه مدل مداری برای آن از نظرِ تئوریک جالب است. مدل مداری قطعی را می‌توان یک مقاومتِ بی‌نهایت دانست. چنین موجودی می‌تواند بدون هیچ جریانی، هر اختلاف ولتاژی را در دو سر خود تحمل نماید.

باتری آرمانی، موجودی است که ولتاژ ثابتی برابرِ V دارد، مستقل از این‌که چه جریانی از آن بگذرد.

منبعِ جریان آرمانی، موجودی است که جریانِ ثابتی برابرِ I دارد، مستقل از این‌که چه ولتاژی دو سرِ آن قرار داشته باشد[۱].

خازن، عنصری است که رابطه ولتاژ و جریان آن به‌صورت

$$I = C\frac{dV}{dt} \qquad (۳-٤)$$

مشخص می‌شود. معادله فوق با مشتق‌گیری نسبت به زمان از معادله معروفِ خازن به‌دست آمده است:

$$Q = CV \quad \rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = C\frac{dV}{dt}$$

سلف (یا القاگر)، یک سیم‌پیچ است که با عبور جریان از آن، انرژی مغناطیسی در خود ذخیره می‌کند. عبور جریان از سیم‌پیچ، موجب ایجاد میدان مغناطیسی درون آن می‌شود. معادله سلف عبارت است از:

$$V = L\frac{dI}{dt} \qquad (٤-٤)$$

تئوری‌های فیزیکی مربوط به مقاومت، خازن و سلف را باید در درسِ الکترومغناطیس فرا بگیرید، و در این کتاب، ما صرفاً از نظرِ مداری با آن‌ها سر و کار داریم. با این حال، در درس‌های مربوط به آن‌ها، توضیحاتِ مختصری درباره ساختارِ فیزیکیِ این قطعات ارائه شده است.

۱-۱-٤ مقادیرِ اولیه

معادله مداریِ خازن و سلف در حقیقت یک «**معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول**» است. در حالتِ کلی، اگر یک معادله دیفرانسیلِ خطیِ مرتبه n داشته باشیم، برای یافتنِ پاسخِ مسأله به n مقدارِ اولیه احتیاج داریم. مثلاً قانونِ دومِ نیوتون:

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

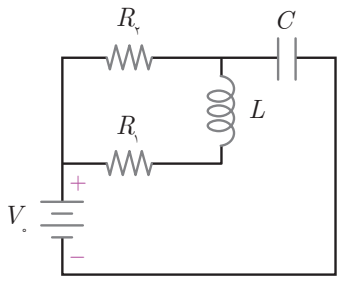
[۱] معمولاً دانش‌آموزان می‌پرسند که چنین موجودی چگونه ساخته می‌شود. این سؤال فعلا برای ما اهمیتی ندارد، همان‌گونه که ما دقیقاً نمی‌دانیم در درونِ یک باتری، چه اتفاق الکتروشیمیایی می‌افتد. در حالِ حاضر، ما در حالِ یادگیریِ مبحث «مدار» هستیم! برای یک مثالِ ساده، می‌توانید فرض کنید که شارژرِ تلفنِ همراه شما یک منبعِ جریان (البته غیرآرمانی!) است، یعنی آداپتورِ شارژر به‌صورتی طراحی شده تا جریان را (مستقل از میزانِ شارژِ فعلیِ باتریِ گوشی) نسبتاً ثابت نگه دارد.

یک معادله دیفرانسیلِ مرتبه دوم است (زیرا در این معادله، بزرگ‌ترین مرتبه مشتقِ ظاهر شده، مشتقِ دومِ $x_{(t)}$ است). به همین دلیل، حلِ مسائلِ مکانیک به $n = ۲$ ثابتِ اولیه (یعنی مکانِ اولیه و سرعتِ اولیه جسم) احتیاج دارد.

بنابراین می‌توان گفت هر خازن، احتیاج به یک «مقدارِ اولیه» دارد. این مقدارِ اولیه را «**بارِ اولیه یا ولتاژِ اولیه خازن**» تعیین می‌کند. همچنین سلف هم به یک «مقدارِ اولیه» احتیاج دارد، که عبارت است از «**جریانِ اولیه سلف**». اما مثلا برای مقاومت (که مرتبه معادله آن «*صفر*» است) نه به ولتاژِ اولیه نیاز داریم و نه جریان اولیه.

٤-١-٢ مثال

همه‌ی معادلات مداری را برای مدار شکل ٤-١ بنویسید.

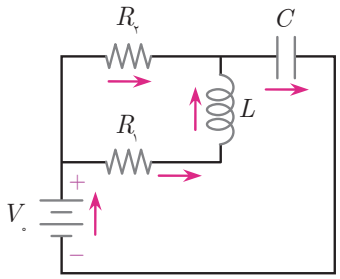


شکل ۴-۱. مدارِ مثالِ ۴-۱-۲

پاسخ: قبل از هر چیز باید یادآوری کنیم که این مثال صرفا جنبه آموزشی دارد، و در مسائل واقعی، معمولا نیازی به نوشتنِ همه معادلات پیش رو نخواهد بود. مدار دارای ۴ گره و ۵ شاخه است. ابتدا جهتِ جریان‌های قراردادی را به دل‌خواه مشخص می‌کنیم (شکل ٤-٢). بنابراین مسأله، ۱۰ مجهول خواهد داشت که عبارتند از:

باتری	V_b و I_b
مقاومتِ $R_۱$	$V_۱$ و $I_۱$
مقاومتِ $R_۲$	$V_۲$ و $I_۲$
خازن	V_C و I_C
سلف	V_L و I_L

تعدادِ کلِ معادلات مطابقِ (٤-١) عبارتند از: ۲ معادله حلقه، ۳ معادله گره و ۵ معادله مربوط به قطعات الکتریکی، که مجموعا ۱۰ معادله خواهد شد.



شکل ۴-۲. جهت جریان‌ها به دل‌خواه انتخاب می‌شوند.

دو معادله حلقه

$$V_0 - V_1 - V_L - V_C = 0$$
$$-V_2 + V_L + V_1 = 0$$

سه معادله گره

$$I_b - I_1 - I_2 = 0$$
$$I_1 - I_L = 0$$
$$I_2 + I_L - I_C = 0$$

پنج معادله برای قطعات

$$V_b = V_0$$
$$V_1 = R_1 I_1$$
$$V_2 = R_2 I_2$$
$$V_L = L\frac{dI_L}{dt}$$
$$I_C = C\frac{dV_C}{dt}$$

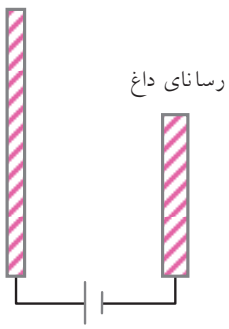
مجموعه معادلات فوق، یک دستگاه ده معادله – ده مجهول را شکل می‌دهد که معادلات آن همه مستقل از یک‌دیگر هستند. اگر بارِ اولیه خازن و جریانِ اولیه سلف را هم بدانیم، همه ولتاژها و جریان‌ها را می‌توان محاسبه نمود.

مسائل درس‌های ۱ تا ٤

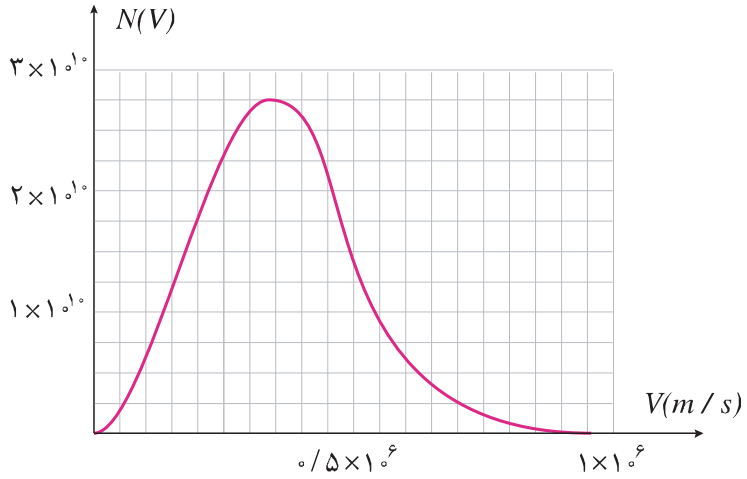
۱ مرحله دوم دوره پانزدهم المپیاد فیزیک ایران

در اجسام رسانا الکترون آزاد وجود دارد. هنگامی که دمای یک جسم رسانا بالا می‌رود، تعدادی از الکترون‌های آزاد که انرژی کافی دارند از سطح آن می‌گریزند. این پدیده مانند بخار شدن آب است که در آن مولکول‌های آب از سطح مایع می‌گریزند.

در شکل مقابل یک صفحه رسانا که دمای آن را بالا می‌بریم نشان داده شده است.



مقابل این صفحه، رسانای دیگری قرار دارد و این دو رسانا با یک باتری به هم متصل شده‌اند. تمام مجموعه نیز در یک محفظه خلا قرار دارد. الکترون‌هایی که از رسانای داغ خارج می‌شوند، انرژی جنبشی و در نتیجه سرعت‌های مختلفی دارند. تعداد الکترون‌هایی که در هر ثانیه از رسانای داغ خارج می‌شوند و سرعت آن‌ها میان مقدار معین v و $v+\Delta v$ است با فرض این‌که Δv کوچک باشد با $N(v)dv$ برابر است. در شکل زیر $N(v)$ برحسب v داده شده است. فرض کنید همه الکترون‌ها در راستای عمود بر صفحه داغ از آن خارج می‌شوند.



الف) تعداد الکترون‌هایی که در هر ثانیه از رسانای داغ خارج می‌شوند چقدر است؟

ب) جریانی را که از مدار می‌گذرد حساب کنید.

جای قطب‌های باتری را عوض می‌کنیم، به طوری که رسانای داغ به قطب مثبت و رسانای مقابل آن به قطب منفی وصل شود.

پ) حداقل اختلاف پتانسیل باتری در این حالت چقدر باشد تا جریان مدار قطع گردد؟

ت) اگر اختلاف پتانسیل باتری در این حالت $۰/۴۵\ V$ باشد چه جریانی از مدار می‌گذرد؟

جرم الکترون $m = ۹/۱ \times ۱۰^{-۳۱}\ kg$ و بار آن $e = ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹} C$ است.

۲ مرحله دوم دوره بیست و هفتم المپیاد فیزیک ایران

یک خازن تخت و تعداد زیادی توپ بسیار کوچک، هریک به جرم m، که قادرند بار الکتریکی را بین صفحات یک خازن تخت انتقال دهند درنظر بگیرید. توپ‌ها به‌طور ناکشسان و عمود به صفحه‌های خازن برخورد می‌کنند به‌طوری که اگر اندازه‌ی سرعت در لحظه‌ی قبل از برخورد به صفحه v باشد، اندازه‌ی سرعت آن درست پس از برخورد ev خواهد بود که $۰ < e < ۱$. هر توپ هنگام تماس با هریک از صفحه‌ها به‌صورت آنی بار q را به‌دست می‌آورد و در اثر دافعه از آن صفحه دور می‌شود و نیز

هنگام برخورد به هریک از صفحه‌ها به‌طور تقریباً آنی بار قبلی خود را از دست می‌دهد و باری به اندازه‌ی q به‌دست می‌آورد، سپس بر اثر دافعه الکتریکی از آن دور می‌شود. این فرایند هربار که تکرار شود، توپ بخشی از انرژی جنبشی خود را از دست می‌دهد. فرض کنید مساحت هر یک از صفحات خازن A، فاصله‌ی صفحه‌های آن از هم d و تعداد توپ‌ها در واحد سطح صفحه‌ی خازن n باشد. شعاع توپ‌ها در مقایسه با فاصله‌ی بین صفحه‌های خازن ناچیز است و از نیروی وزن توپ‌ها و اثرات لبه‌ی خازن چشم می‌پوشیم. در ابتدا خازن بدون بار است و همه‌ی توپ‌ها روی یکی از صفحه‌ها قرار دارند و ساکن هستند. در این وضعیت خازن را به پتانسیل ε وصل می‌کنیم.

الف) زمان رسیدن هر توپ به صفحه‌ی مقابل و سرعت آن درست قبل از برخورد به آن صفحه پس از یک بار طی مسافت d چقدر است؟

ب) سرعت هر توپ درست قبل از برخورد به صفحه‌ی خازن پس از طی مسافت kd (k تعداد دفعه‌هایی است که هر توپ مسافت d را طی کرده است) و مدت زمان حرکت در مرحله‌ی k ام را به‌دست آورید.

پ) جریان الکتریکی میانگین بین صفحه‌ها در مرحله‌ی k ام را به‌دست آورید.

ت) نمودار جریان ولتاژ ($I - \varepsilon$) را در حد $k \to \infty$ به‌طور کیفی رسم کنید.

ث) مقدار انرژی مکانیکی تلف‌شده توپ‌ها در برخورد kام را به‌دست آورید و با استفاده از آن آهنگ اتلاف انرژی مکانیکی میانگین در حد $k \to \infty$ را حساب کنید.

پ) آهنگ میانگین انجام کار به‌وسیله‌ی باتری را در حد $k \to \infty$ حساب کنید.

راهنمایی: $1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1} = \dfrac{1 - x^k}{1 - x}$

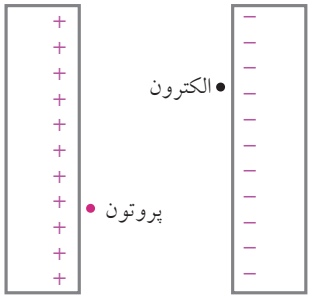
۳ مرحله اول هشتمین المپیاد فیزیک ایران

اختلاف پتانسیل الکتریکی سطح زمین تا نقطه‌ای در ارتفاع یک متر از سطح زمین چند ولت باشد تا یک ذره بسیار کوچک با بار $q = 1/5 \times 10^{-19} C$ و جرم $m = 9 \times 10^{-20} kg$ بتواند در آن نقطه معلق بماند. ($g = 10\ m/s^2$)

٤ مرحله اول هفدمین المپیاد فیزیک ایران

توسط بارهای نشان داده شده در شکل یک میدان الکتریکی یک‌نواخت درست کرده‌ایم. یک الکترون و یک پروتون در این میدان الکتریکی از حالت سکون شروع به حرکت می‌کنند.

کدام گزینه درباره انرژی‌های جنبشی این دو ذره که به صفحه‌ی روبه‌رو می‌رسند، درست است؟



الف) انرژی جنبشی پروتون بیش‌تر خواهد بود.
ب) انرژی جنبشی الکترون بیش‌تر خواهد بود.
پ) انرژی جنبشی هر دو مساوی است.
ت) انرژی جنبشی این دو از نظر مقدار مساوی و از نظر علامت مخالف است.

۵
مرحله اول پانزدهمین المپیاد فیزیک ایران

برای اندازه‌گیری بار الکتریکی الکترون از آزمایش میلیاکن استفاده می‌شود. در آزمایش میلیکان، روی یک قطره‌ی روغن مقدار بار الکتریکی وجود دارد. این قطره‌ی روغن در یک میدان الکتریکی معلق می‌ماند. با اندازه‌گیری جرم قطره‌ی روغن و دانستن میدان الکتریکی می‌توان بار روی قطره‌ی روغن را به‌دست آورد. بار سه قطره‌ی روغن به ترتیب $۳/۹\times۱۰^{-۱۹}C$، $۶/۵۰\times۱۰^{-۱۹}C$ و $۹/۱۰\times۱۰^{-۱۹}C$ اندازه‌گیری شده است. براساس این اندازه‌گیری‌های کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند بار یک الکترون باشد؟

الف) $۱/۳\times۱۰^{-۱۹}C$ ب) $۲/۶\times۱۰^{-۱۹}C$ پ) $۱/۶\times۱۰^{-۱۹}C$ ت) $۳/۹\times۱۰^{-۱۹}C$

۶
مرحله اول اولین دوره المپیاد فیزیک ایران

جریانی که از درون رشته‌ی یک لامپ می‌گذرد برابر یک دهم آمپر است. چند الکترون در یک میلی‌ثانیه از آن می‌گذارد؟

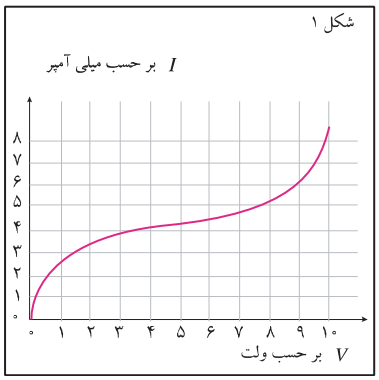
الف) $۶/۲۵\times۱۰^{۱۴}$ ب) $۱/۶\times۱۰^{۱۴}$ پ) $۱/۶\times۱۰^{۱۵}$ ت) $۶/۲۵\times۱۰^{۱۶}$

۷
مرحله دوم هجدهمین المپیاد فیزیک ایران

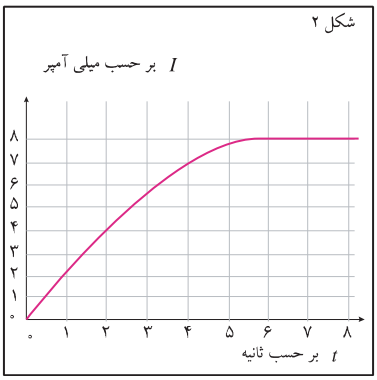
در یک مدار عنصری هست که نمودار جریان برحسب اختلاف پتانسیل دو سر آن مطابق نمودار الف است. جریان گذرنده از این عنصر را با I و اختلاف پتانسیل دو سر آن را با V نشان می‌دهیم در یک آزمایش نمودار جریان زمان این عنصر به‌صورت نمودار ب است.

الف) نمودار V برحسب زمان را بکشید.
ب) نمودار $I\times V$ برحسب زمان را بکشید.
پ) در فاصله $t=۰$ و $t=۸s$ چه مقدار انرژی در این عنصر مصرف شده است؟

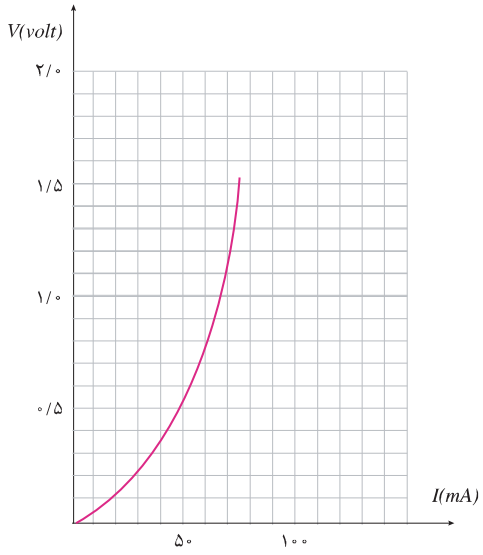
شکل ۱



شکل ۲



۸ مرحله اول چهاردهمین المپیاد فیزیک ایران



یک مقاومت غیرخطی عنصری است که ولتاژ دو سر آن به جریانی که از آن می‌گذرد بستگی دارد. اما این بستگی به شکل قانون اهم نیست. نمودار ولتاژ دو سر یک مقاومت غیرخطی برحسب جریان مطابق شکل است. این مقاومت را به دو سر یک باتری می‌بندیم که نیروی محرکهٔ آن $۱/۵V$، و مقاومت درونی آن ۱۰Ω است. نسبت گرمای تلف شده در مقاومت غیرخطی به مجموع گرماهای تلف شده در مقاومت غیرخطی و باتری را بازده نمی‌نامیم. این بازده چند درصد است؟

۹ (سی و هفتمین المپیاد جهانی فیزیک، ۲۰۰۶، سنگاپور)

آذرخش: مدل بسیار ساده شده‌ای از آذرخش ارائه شده است. آذرخش ناشی از تجمع بار الکتریکی در ابرهاست. در نتیجه، زیر ابر معمولاً دارای بار مثبت می‌شود و بالای آن دارای بار منفی و زمین زیر ابر دارای بار منفی است. وقتی میدان الکتریکی نظیر آن از شدت فروشکست هوا فراتر رود، یک تخلیه‌ی الکتریکی ویرانگر رخ می‌دهد: این آذرخش است.

به کمک منحنی ساده شده‌ی جریان- زمان نمودار زیر، و با توجه به داده‌های زیر به پرسش‌ها پاسخ دهید.

$h = ۱km$: فاصله‌ی بین پایین ابر و سطح زمین

$E_{۰} = ۳۰۰kVm^{-۱}$: میدان الکتریکی فروشکست هوای مرطوب

۳۲×۱۰^{۶} : تعداد کل آذرخش‌ها در سال که به زمین برخورد می‌کند

$۶/۵ \times ۱۰^{۱۹}$: جمعیت کل انسان‌ها

خ) مقدار کل بار Q آزاد شده در آذرخش، چقدر است؟

د) جریان میانگین I بین زیر ابر و سطح زمین در طول آذرخش چقدر است؟

ذ) فرض کنید انرژی همه‌ی آذرخش‌ها در طول یک سال جمع و به‌طور یکسان بین همه‌ی مردم تقسیم شود. با سهم خود چه مدت می‌توانید به‌طور پیوسته یک لامپ $۱۰۰W$ را روشن نگه دارید؟