برگی از درخت المپیاد ریاضی و کامپیوتر

پشت صحنه‌ی حل یک مسئله‌ی

# ترکیبیات شمارشی

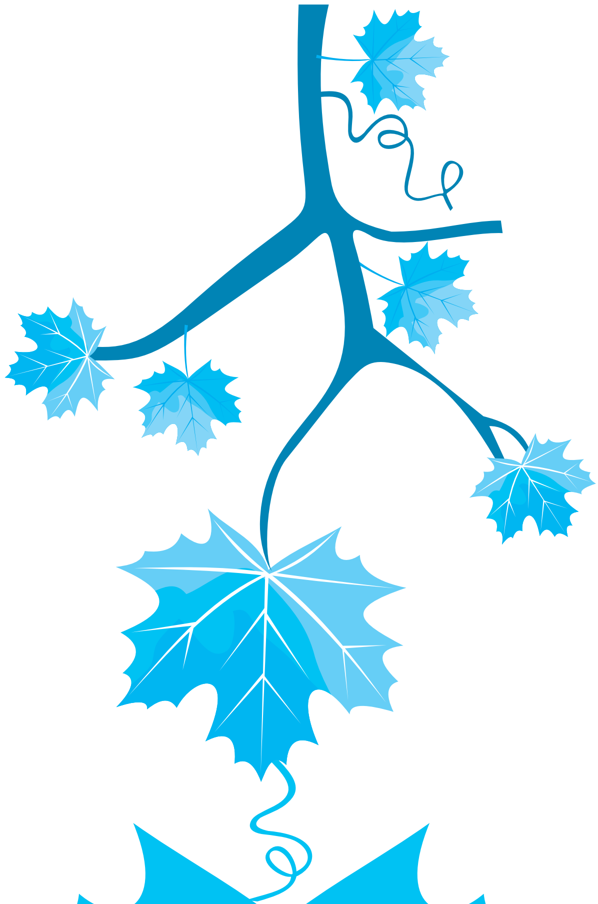

مؤلفین

سید احسان آزرمسا

نگین السادات موسوی



انتشارات خوشخوان



درخت المپیاد درختی است که توسط
انتشارات خوشخوان کاشته شده و هریک
از کتاب های این پروژه برگی از آن است.
وظیفه ما نگهداری وآبیاری این درخت است.امیدواریم
باعنایات حضرت حق این درخت، تنومند شده
وبه بار واقعی بنشیند. فراموش نکنید که بار ومیوه ی
این درخت شما
عزیزان می باشید.
التماس دعا

## پروژه‌ی درخت المپیاد

اعتقاد بر این است که شروع فعالیت‌های المپیاد به صورت حرفه‌ای، باید از ابتدای دوره‌ی دبیرستان شروع شود. اکثر المپیادهای علمی در زمستان سال سوم دبیرستان تعیین تکلیف می‌شوند. بنابراین از شروع دبیرستان تا اواسط سال سوم حدوداً ۸ ترم تحصیلی می‌شود (با احتساب فصل و ترم تابستان) که لازم است برنامه‌ریزی دقیقی برای این چند ترم انجام شود.

انتشارات خوشخوان این برنامه‌ریزی را در قالب پروژه‌ی درخت المپیاد انجام داده است که هر شاخه از درخت، مبحثی از آن المپیاد و هر برگ از آن شاخه شماره‌ای از آن مبحث می‌باشد.

به عنوان مثال اپتیک (۱) کتابی است که در یک ترم تحصیلی در یک کلاس ممتاز می‌توان برای داوطلبان المپیاد فیزیک تدریس کرد.

با عنایات حضرت حق و با کمک تنی چند از همکاران گرامی کتب مربوط به این درخت در هر رشته‌ای از المپیاد معرفی خواهد شد.

منتظر پیشنهادات و نظرات شما سروران هستیم.

گروه المپیاد

انتشارات خوشخوان

مسابقه ها، کنکورها و المپیادهای علمی همایش هایی هستند که کم وبیش در سرتاسر دنیای پهناور به صورت داخلی وبین المللی برگزارمی شود وسال به سال به تنوع، جذبه وعظمت آن ها افزوده می‌شود. یکی ازاین همایش های باشکوه که هرسال درچندین رشته درسطح دانش آموزان سنوات آخر دوره متوسطه برگزارمی‌شود المپیادهای علمی‌می باشد که قدیمی ترین آن المپیاد ریاضی بوده و ازسال ۱۹۵۹ آغاز و تا به حال ادامه داشته است.

در حال حاضر نتیجه ی کسب شده در المپیادهای علمی برای هر کشوری یکی از شاخص های قدرت علمی آن کشور محسوب شده و نفرات ممتاز این المپیادها به راحتی جذب دانشگاه ها وآکادمی های ممتاز جهان شده وپس ازگذشت سنواتی چند به موفقیت های چشم‌گیری نایل می شوند چنانچه بسیاری از دانشمندان حال حاضر در رشته های مختلف از جمله شیمی، فیزیک، IT و ... در سال های نه چندان دور از مدال آوران این المپیادها بوده اند.

جمهوری اسلامی ایران برای اولین باردر سال ١٣٦٦ در المپیاد ریاضی جهان که در کشور کوبا برگزار می شد شرکت کرده و باکسب یک مدال برنز به مقام ٢٦ جهان نائل آمد که تعجب همگان را برانگیخت چراکه درآن سال ایران درگیرجنگ تحمیلی بوده و جهانیان به غیر از جنگ و درگیری چیزی از ایران سراغ نداشتند و درخشش دانش آموزان ایران در آن سال و سنوات بعد نگاه ها را به سمت ایران معطوف کرده وچشم خفته آن ها را تا حدود زیادی بیدار کرد. همانطور که از رسانه های گروهی مطلع شده اید درتمام المپیادهای علمی تیم اعزامی کشورعزیزمان درسنوات گذشته جزء کشورهای برتر بوده وضمن کسب مدال های رنگارنگ رتبه های بسیار درخشانی ازجمله رتبه اول را حائز شده اند.

نحوه گزینش نفرات اعزامی به المپیادهای جهانی تا حدود زیادی مشابه یکدیگرند به این صورت که درابتدا درمسابقه ای سراسری تحت عنوان مرحله اول که معمولاً به صورت پرسش های چندگزینه ای مطرح می شود حدوداً هزارنفر پذیرفته شده و در رقابتی معمولاً تشریحی که مرحله ی دوم نامیده می شود شرکت می کنند. دراین مرحله در هر رشته حدوداً چهل نفر پذیرفته شده و دردوره ی تابستانی درباشگاه دانش پژوهان جوان که متولی برگزاری تمام المپیاد های علمی می باشد شرکت کرده و پس ازگذراندن این دوره مرحله ی سوم آزمون برگزار شده و عده ای (در حدود ده نفر) مدال طلا، عده ای مدال نقره و عده ای دیگر مدال برنز

کسب می کنند (در این مرحله معمولاً همه‌ی افراد شرکت کننده در دوره مدال کسب می کنند) دارندگان مدال طلا حدود یک سال در آن باشگاه آموزش دیده و پس از آن اعضاء تیم اعزامی شناسایی می شوند. دارندگان مدال طلا همگی بدون کنکور و در رشته و دانشگاه دلخواه خود پذیرفته شده و ادامه ی تحصیل می دهند اما دارندگان مدال های نقره و برنز همانند سایر داوطلبان در کنکور سراسری شرکت کرده و برای کسب رتبه دلخواه جهت پذیرفته شدن در رشته و دانشگاه مورد علاقه خود در رقابت می کنند با این تفاوت که این افراد سهمیه‌ی ویژه ای در پذیرفته شدن در رشته و دانشگاه مورد علاقه ی خود دارند که جزئیات آن در سایت باشگاه دانش پژوهان جوان تشریح شده است.

متأسفانه در سال های اخیر در بعضی از مدارس افرادی مثلاً لباس کارشناسی به تن کرده و علیه فعالیت های المپیاد جبهه می گیرند و ادعا می کنند فعالیت برای المپیادهای علمی مانع موفقیت در کنکور سراسری بوده و هرچه دانش آموز به سمت المپیاد سوق پیدا کند از کنکور فاصله گرفته و در صورت عدم کسب مدال طلا (که بسیار محتمل است) آینده ی خود را تباه کرده است در حالی که با تحقیقی که در سال های گذشته انجام شده است فعالیت در زمینه المپیادهای علمی نه تنها مانع فعالیت برای کنکور نیست بلکه مسیر فعالیت برای کسب رتبه مناسب در کنکور را بسیار هموارتر می سازد به عنوان مثال می توانید تمام مدال آوران نقره و برنز و یا حتی آن هایی که در مرحله اول پذیرفته شده ولی به دوره تابستانی راه پیدا نکرده اند را در یک رشته شناسایی کرده و موفقیت های تحصیلی آن ها را در دانشگاه ها جویا شوید که نگارنده ی این متن بارها این تحقیق را انجام داده و به مثبت بودن آن یقین پیدا کرده است.

به هرحال ادعا این است که فعالیت دانش آموز در یک رشته از رشته های المپیاد فواید بسیاری دارد که به تعدادی از آن ها به صورت گذرا اشاره می شود:

۱. همان طور که خداوند به بشر تن سالم داده و انتظار می رود با ورزش ها و نرمش های مناسب از این نعمت خدادادی محافظت شود به هر دانش آموزی نیز استعدادی داده است که باید شکوفا و بهره ور شود. اغلب باشگاه های کشور اعم از خصوصی و دولتی داوطلب زیادی در رشته های متفاوت ورزشی دارند که مشغول فعالیت در یکی از رشته های ورزشی مانند کشتی، تکواندو، بدن سازی و ... می باشند که وقتی از آن افراد راجع به اهدافشان از این فعالیت سؤال می شود سالم نگه داشتن بدن را عنوان داشته و انتخاب شدن در تیم ملی را در نهایت عنوان می کنند. چه بسا افرادی که در این رشته ها فعالیت می کنند و هرگز به تیم ملی راه پیدا

نمی‌کنند که وقتی ازاین افراد راجع به موفقیت هایشان سؤال می شود هرگزخود را ناموفق معرفی نمی کنند و همین‌که توانسته اند از بدن سالم خود به روش مناسب محافظت کنند را پیروزی بزرگی می‌دانند بنابرین فعالیت دریکی اززمینه های المپیاد چه در نهایت به‌کسب مدال منجر شود و یا نشود همین‌که استعداد خدادادی پرورش می یابد موفقیتی است بس بزرگ.

۲. کتب درسی به اذعان اکثرکارشناس ها و اساتید سال به سال ساده تر شده و برای عموم دانش آموزان دلچسب هستند ولی برای دانش آموزان ممتاز و تیزهوش به هیچ عنوان اغناکننده نمی باشند لذا لازم است این سری ازدانش آموزان فعالیت ویژه ای را در رشته‌ی مورد علاقه‌ی خود داشته باشند تا احساس کنند این فعالیت ها برای آن ها اغناکننده است.

۳. فعالیت های المپیادی‌که درنهایت به حل سؤالات پیچیده و عمیق در رشته ی مربوطه می شود باعث می شود تا فرد به تمام مسائل جامعه و پیش آمده درزندگی به دید یک مسأله ی المپیاد نگاه کرده و درحل آن نسبت به سایر رقبا موفق تر باشند. تحقیقات نشان می دهد افرادی که با علاقه و اشتیاق حداقل یکی ازشاخه های المپیاد را دنبال می‌کنند (نه به نیت‌کسب مدال بلکه به نیت پرورش ذهن) نسبت به سایر افراد در زندگی موفق ترند.

٤. زیربنای اکثر دروس پیش دانشگاهی در دروس المپیاد بنا نهاده می شود بنابرین افرادی‌که به سبک المپیادی دروس خود را مطالعه می‌کنند در دوره پیش دانشگاهی با پایه ی بسیار قوی تری با دروس مواجه می شوند و نسبت به رقبای خود راحت تر ازعهده‌آن ها برمی آیند.

٥. با توجه به مصوبه های موجود، کسب مدال دریکی ازالمپیاد های علمی(حتی مدال برتر) باعث اعطای امتیازهای ویژه ای برای داوطلبان کنکور در ورود به دانشگاه های سراسری می شود که جزئیات آن درسایت های معتبرمخصوصاً سایت باشگاه دانش پژوهان جوان موجود است.

٦. همچنین با توجه به مصوبه های موجود اکثر داوطلبان المپیادها به عضویت نهادهای مختلف ازجمله بنیاد ملی نخبگان درمی آیند که با رجوع به سایت های مرتبط با این نهادها و بنیادها امتیازات تعلق یافته به اعضاء را مشاهده خواهید کرد.

انتشارات خوشخوان مفتخر است از بدو تأسیس به فکر تدوین و تألیف منابعی مناسب برای دانش آموزان ممتاز و داوطلبان المپیاد بوده است که خوشبختانه با یاری خداوند متعال و با بهره گیری از اساتید مجربی که خود در سنواتی نه چندان دور مدال آوری یکی از المپیادهای علمی بوده اند، کتب متعددی به بازار عرضه شده است که مورد توجه داوطلبان قرار گرفته است. بعد از کسب تجربیات لازم به این نتیجه رسیده ایم که لازم است کتبی به صورت کار تدوین و تألیف شود که در آن هر کتاب مخصوص یک ترم تحصیلی باشد. این پروژه به نام درخت المپیاد نام گرفته است و هر کتاب از این پروژه که در اختیار دارید برگی از آن درخت خواهد بود.

بدیهی است انجام چنین پروژه ی عظیمی نظر و همت دسته جمعی می طلبد لذا لازم است از تمام دوستان و همکارانی که ما را در انجام این پروژه یاری نموده اند، تشکر و قدردانی می نمایم و در نهایت نیز از عوامل زحمت کش انتشارات اعم از مشاورین، حروف چین ها، طراحان و کارمندان و کارگران عزیز کمال امتنان را دارم.

با تشکر

رسول حاجی زاده مدیر انتشارات خوشخوان

## پیش‌گفتار استاد محترم آقای یحیی تابش

این کتاب نمودی است از یادگیری مسئله محور. یادگیری مسئله محور فرایندی پویا در یادگیری است که با درگیر کردن دانش‌آموزان با فرایند حل مسئله مسیری جدید از یادگیری را پیش روی آنان قرار می‌دهد، مسیری که با انکشاف و خلاقیت همراه است، از این‌رو دستاوردهایی که در مراحل یادگیری حاصل می‌شود به‌طور طبیعی در ذهن باقی می‌ماند و موجب توانمندی یادگیرنده می‌شود.

مسئله‌ها اصولاً در شرایط خاص خود نیاز به ابتکار و خلاقیت دارند، ابتکار و خلاقیتی که به‌طور اصولی قابل صورت‌بندی نیست و بیشتر از همه با کوشش و مواجه شدن با مسائل گوناگون قابل دست یافتن است ولی ریاضی‌دان برجسته؛ جورج پولیا (۱۸۷۷ـ۱۹۸۵)؛ در کتاب معروف خود به نام چگونه حل کنیم؟ چهار گام را برای حل مسئله توصیف می‌کند. این گام‌ها عبارتند از: ۱. فهمیدن مسئله، ۲. طرح یک نقشه، ۳. اجرای نقشه و بالاخره ٤. برگشت به عقب. پولیا با مثال‌های گوناگون این گام‌ها را مورد تجزیه و تحلیل قرار داده است، کتاب حاضر نیز از این ایده‌های کلی پولیا بهره گرفته و روش و اسلوب موردنظر خود را عرضه کرده است، روشی که مسیر حل مسئله را گام به گام پیش روی علاقه‌مندان می‌گشاید و حاصل آن بر توسعه خلاقیت یادگیرندگان منجر می‌شود.

**مسئله‌ها سرچشمه‌ی جوشندگی ریاضیات هستند و تلاش برای حل مسئله موجب پیشرفت علوم ریاضی شده است، ولی همیشه با این پرسش مواجه هستیم که انگیزه‌ی تلاش برای حل مسئله از کجا ناشی می‌شود؟**

بهترین انگیزه در حل مسئله رضایت خاطر و لذتی است که در پیدا کردن پاسخ مسئله و روش حل آن در تلاشگران پدید می‌آید، رضایت خاطر با هیچ دستاورد دیگری قابل مقایسه نیست ولی باید توجه داشته باشیم که حل مسئله‌ای با ارزش به سادگی و بدون تلاش حاصل نمی‌شود و نیاز به کوشش وافری دارد. در حل مسئله هر چند نمی‌توان از روش‌های خاصی استفاده کرد ولی آشنایی با مسیرهای تلاش در حل مسئله راهگشای گشودن قله‌های ناگشوده است. این کتاب روش اسلوب‌مند و جدید در یادگیری به کمک حل مسئله را توسعه داده است که می‌تواند از هر حیث برای دانش‌آموزان مغتنم باشد و آنان را به چالشی فرا می‌خواند تا با پیمودن مسیرهای دشوار را به همان رضایت‌خاطری دست یابند که مایه توسعه و پیشرفت ریاضیات و سایر علوم است.

**یحیی تابش**

اکثر بخش‌ها با طرح یک مسئله شروع شده‌اند. این نوع مسائل، معمولاً مسائلی هستند که دارای پیچیدگی یا نکات ویژه‌ای هستند و ممکن است به سادگی در تلاش اول قابل حل نباشند.

در آغاز حل برخی مسائل، بخشی با عنوان «**چه چیزی در مسئله شما را گیج کرده است؟**» وجود دارد، که سعی دارد ابهاماتی که ممکن است در بدو مواجهه با مسئله برای خواننده پیش آید را روشن سازد. طبیعتاً علاوه بر سوالاتی که ذکر می‌شوند، سوالات و ابهامات دیگری نیز برای مخاطب پیش می‌آید. لذا هدف این بخش بیشتر این بوده که خواننده را، نسبت به فکر کردن به ابهاماتی که در ذهنش شکل گرفته و او را گیج کرده است، به تکاپو بیاندازد تا از این طریق و با شفاف شدن این ابهامات بتواند قدم اول را در حل مسئله بردارد.

بعد از این قسمت، سوال و پاسخ‌هایی پی‌درپی مطرح شده‌اند. این سوالات با دقت زیادی طرح شده‌اند تا بتوانند در جاهایی که احتمال می‌رود خواننده دچار مشکل شود و از حرکت باز ایستد، او را به فکر و مسیر اصلی هدایت کنند. به همین جهت برای کارآیی و تاثیرگذاری این اثر نیاز است که خواننده با صبر و تلاش و صرف زمان کافی بر روی مسائل فکر کند و تنها روزنامه‌وار پاسخ‌ها را مطالعه نکند، بلکه زمانی پاسخ یک سوال را مطالعه کند که یا جوابی برای آن داشته باشد یا تمام تلاشتان را (از نظر خودتان) به خرج داده باشد. هر چه مخاطب تلاش بیشتری برای پاسخ به سوالات مطرح شده انجام دهد، رشد بیشتری در افزایش توانایی تفکر ریاضی و توانایی حل مسئله خواهد داشت.

همچنین باید توجه داشت که راه‌حل موجود در کتاب تنها روش برای حل مسئله‌ی مربوطه نیست. لذا ممکن است شما راه‌حل دیگری برای مسئله به‌دست آورید. اما باز هم خواندن بقیه متن را توصیه می‌کنیم زیرا روند حل ارائه شده، صرفاً یک راه‌حل از چندین راه‌حل ممکن برای مسئله نیست. بلکه آموزنده‌ی نحوه‌ی تفکری است که قادر به حل مسئله شده است و می‌تواند در حل مسائل بعدی کارساز باشد.

بعد از اتمام حل، در برخی فصل‌ها، بخشی با نام «درسنامه» برای جمع‌بندی نکات موجود و معرفی قضیه‌ای جدید آورده شده است.

در انتهای هر بخش نیز تعدادی تمرین وجود دارد. تمرین‌ها به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که شامل ساده‌ترین مثال‌ها تا بعضاً پیچیده‌ترین مثال‌ها باشند. لذا شکست در حل تمرین‌ها، به منزله‌ی عدم توانایی و عدم فهم مطلب آن بخش نیست. آن‌چه که لازم است، صرف زمان مناسب برای تفکر روی تمرین‌ها است. از خواننده انتظار می‌رود لااقل به میزان دو برابر زمانی که صرف مطالعه‌ی مطلب یک بخش می‌کند، صرف تفکر روی تمرین‌های آن بخش بکند تا به تسلط لازم برای یادگیری بقیه مطلب کتاب دست یابد.

## محتوا و مخاطبین کتاب

مخاطبین این کتاب داوطلبین شرکت در المپیاد ریاضی و تمام کسانی هستند که از فکر کردن و حل مسئله لذت می‌برند. موضوع فصل‌های این کتاب، بر اساس نیازهای شرکت‌کنندگان المپیادهای ریاضی و کامپیوتر مشخص شده است. در فصل‌های اول تا سوم اصول و ابزارهای اولیه شمارش بررسی می‌شوند. فصل چهارم مجموعه‌ای از نکات تکمیلی بر بخش‌های گذشته است. در فصل‌های پنجم تا هشتم ابزارهای قوی‌تر شمارش معرفی و بحث شده‌اند. فصل نهم نیز به مبحث اتحادهای ترکیبیاتی اختصاص دارد. در مجموع برای متقاضیان شرکت در مرحله‌ی اول المپیاد ریاضی، مطالعه‌ی فصول ۱ تا ۵ و برای متقاضیان شرکت در مرحله‌ی دوم المپیاد ریاضی، مطالعه‌ی فصل‌های ٦ تا ۸ توصیه می‌شود.

## قدردانی

در انتها از اساتید گرانقدرمان، جناب آقای دکتر تابش و آقای دکتر اصغری که همواره ما را از راهنمایی‌ها و حمایت‌های خود در راستای ارتقا هر چه بهتر کیفیت کتاب بهره‌مند کردند، کمال تشکر را داریم. همچنین جا دارد از زحمات خانم‌ها حسناسادات آزرم‌سا و آذین موسوی قدردانی کنیم که با پیشنهادهای بسیار خوبشان، ما را در نگارش این اثر یاری کردند. در نهایت از همه دوستانی تشکر می‌کنیم که علاوه بر جنبه‌ی علمی، ما را از لحاظ روانی حمایت کرده و همواره مشوق ما در تهیه این اثر بوده‌اند.

با آرزوی موفقیت
نگین‌السادات موسوی
سیداحسان آزرم‌سا
تابستان ۱۳۹۲

در مواجهه با یک مساله‌ی ریاضی، برخی موفق به حل آن می‌شوند و برخی دیگر از حل آن باز می‌مانند. یک علت، می‌تواند اختلاف دانش این افراد باشد، اما عامل دیگری نیز می‌تواند وجود داشته باشد به نام «مهارت حل مساله». همان‌طور که آشنایی با بسیاری از وسایل و ابزارها به منزله‌ی توانایی استفاده از آن‌ها نیست؛ آشنایی با قضایای مختلف ریاضی نیز به منزله‌ی توانایی استفاده از آن‌ها برای حل مسائل نیست. پس در حل مسائل ریاضی، همانند استفاده از سایر ابزارهای موجود، علاوه بر دانش به مهارت نیز احتیاج است.

اما مهارت حل مساله از چه راهی کسب می‌شود؟ چگونه افرادی که در مواجهه با مساله‌ای شکست خوردند می‌توانند مهارت‌های لازم برای حل آن را از افراد موفق (در حل آن مساله) کسب کنند؟ آیا انتقال راه‌حل تمیز و پالایش شده‌ی آن مساله به این افراد می‌تواند به آن‌ها کمک کند؟

البته که در هر شکستی در حل مساله و اطلاع یافتن از حل آن، تجربه‌ای وجود دارد. اما این تجربه وقتی آموزنده‌تر خواهد بود که چکنویس ذهن فردی که موفق به حل آن شده نیز به همراه راه‌حل در اختیار این افراد قرار بگیرد. این کار باز هم آموزنده‌تر خواهد بود اگر روند حل و مسیر رسیدن به ایده‌ها به این افراد منتقل شود تا فردی که موفق به حل مساله نشده بود، گام به گام بتواند با روند تفکر فرد موفق پیش برود و در نهایت حل کامل مساله را بیاموزد و علت این که خود نتوانسته مساله را حل کند دریابد. همان‌طور که برای آموزش استفاده از یک وسیله، تا فرد خود آن وسیله را در دست نگیرد و با آن چند نمونه کار انجام ندهد، بر استفاده از آن مسلط نمی‌شود. علاوه بر این، با این کار، او اعتماد به نفس لازم برای حل مساله را نیز به‌دست می‌آورد.

«پشت صحنه حل مساله»، کتابی است که فرآیند حل مساله را تصویر می‌کشد و آن چه که در ذهن یک فرد با تجربه در حل مساله گذشته را به‌صورت واقعی و با همان ترتیب نمایش می‌دهد. این کتاب سعی دارد با همراه کردن خواننده در فرآیند حل مساله و با طرح سوالات چالش برانگیز در مسیر حل او را از پیچ و خم‌های این مسیر عبور دهد و با زیر و بم آن آشنا سازد.

نگارش این کتاب به صورتی است که خواننده را از لحاظ فکری، عملی و روانی درگیر حل مساله می‌کند. مخاطب را در هر گام در جهت افزایش شهود و روشن‌تر شدن فضای مساله پیش ببرد تا خود بتواند به نکات اصلی در مساله دست یابد، ابزارها را در دست بگیرد و با آن‌ها مساله را حل کند. لذا برای نوشتن این کتاب مطالعه، زمان و آزمون‌های زیادی صورت گرفته تا خواننده با صرف زمان کمتری پیشرفت بیشتری را در توانایی حل مساله و تفکر ریاضی کسب کند.

بسیاری از کتاب‌های موجود در زمینه المپیاد ریاضی، برای آموزش تنها به بیان قضایای مهم و حل مثال‌هایی از آن‌ها اکتفا کرده‌اند. اما این کتاب چیزی فراتر از این را هدف قرار داده و سعی دارد علاوه بر بیان قضایا، خواننده را با خاستگاه و نحوه‌ی کاربرد آن‌ها آشنا کند زیرا بسیاری از این اصول و قضایا خاستگاهی واقعی دارند به‌طوری که ما خارج از دنیای ریاضیات نسبت به آن‌ها درک داریم و بعضاً در زندگی روزمره به کار می‌بریم. به همین منظور به جای آن که در هر فصل

از همان ابتدا قضیه‌ای بیان شود و سپس کاربردهای آن در مسائل مختلف نشان داده شود، در آغاز فصل مساله‌ای مطرح شده و سعی شده در خلال حل مساله، این قضیه از دل آن بیرون کشیده شود تا خواننده به این درک برسد که چرا و چگونه از یک ابزار و قضیه در حل استفاده شده است.

# فهرست مطالب

فصل ۱۰ **پاسخ تمرین‌ها** ........ **۲۴۵**

# فهرست پرسش‌ها

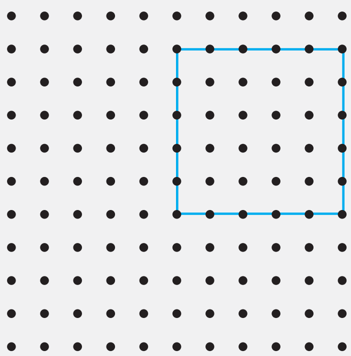
# ۱

# نمادها و اصول اولیه شمارش

## ۱-۱ اصل جمع و ضرب

**پرسش** مربع‌های صاف و نقطه‌ها

در شکل ۱-۱ تعدادی نقطه مشاهده می‌کنید. در هر ردیف و در هر ستون ۱۱ نقطه وجود دارد. اصطلاحاً به این شکل یک شبکه‌ی ۱۱ × ۱۱ از نقاط می‌گویند. چند مربع صاف (موازی با اضلاع صفحه) وجود دارد که رئوسش از این نقاط باشد؟

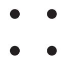


شکل ۱-۱

## چه چیزی در مسئله شما را گیج کرده است؟

- با توجه به تعداد زیاد نقطه‌ها، احتمالاً تعداد خیلی زیادی نیز مربع خواهیم داشت. پس یکی‌یکی شمردن مربع‌ها کمی غیرمنطقی به نظر می‌رسد. در این صورت چگونه باید مربع‌ها را شمرد؟

بیایید اول تعداد نقطه‌ها را کم‌تر کنیم. مثلاً در هر سطر و ستون تنها ۲ نقطه باشد (مطابق شکل ۱-۲) به وضوح در این شکل تنها یک مربع می‌توان ساخت.



شکل ۱-۲

حال فرض کنید در هر سطر و ستون ۳ نقطه باشد.

**سؤال.** در این حالت چند مربع وجود خواهد داشت؟

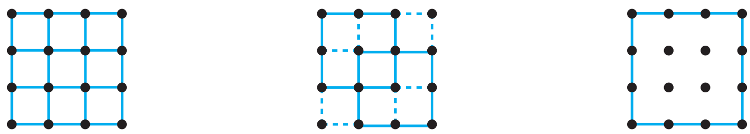
**پاسخ.** در این حالت باید ۵ مربع در شکل پیدا کرده باشید (توجه کنید که تنها مربع‌های صاف را می‌شماریم).

شکل ۱-۳

حال یک نقطه‌ی دیگر نیز به هر سطر و ستون اضافه کنید. یعنی در هر سطر و ستون ۴ نقطه داشته باشیم.

**سؤال.** در این حالت چند مربع وجود دارد؟

**پاسخ.** در این حالت باید ۱۴ مربع در شکل پیدا کرده باشید. همان‌طور که در شکل ۱-۴ مشاهده می‌کنید، ۱ مربع بزرگ ۳ × ۳، ۴ مربع ۲ × ۲ و ۹ مربع ۱ × ۱ در شکل وجود دارد.

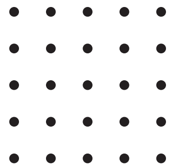


شکل ۱-۴

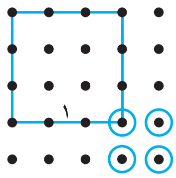
**سؤال.** یک نقطه‌ی دیگر نیز به هر سطر و ستون اضافه می‌کنیم تا هر سطر و ستون شامل ۵ نقطه شوند. نقاط را رسم کنید و بدون این‌که خطی روی این نقاط بکشید، به این سؤال پاسخ دهید: در این حالت چند نوع (از اندازه‌های مختلف) مربع خواهیم داشت؟ از هر کدام چقدر؟

برای پاسخ به این سؤال، از پاسخ قسمت‌های قبل کمک بگیرید. سعی کنید تمامی مربع‌ها را تصور کنید.

**پاسخ.** با توجه به این‌که در این حالت بزرگ‌ترین مربع ۴ × ۴ است، پس ۴ نوع مربع خواهیم داشت. (۱ × ۱، ۲ × ۲، ۳ × ۳ و ۴ × ۴) همچنین واضح است که تنها یک مربع ۴ × ۴ در شکل ۱-۵ وجود دارد. برای مربع‌های ۳ × ۳ نیز احتمالاً هر ۴ مربع را پیدا کردید. توجه کنید که تنها ۴ نقطه‌ای که در شکل ۱-۶ علامت زده شده‌اند، می‌توانند رأس پایین راست یک مربع ۳ × ۳ باشند. به همین دلیل تنها ۴ مربع با این اندازه وجود دارد.



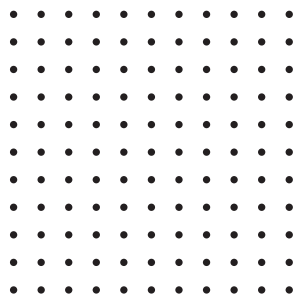
شکل ۱-۵




شکل ۱-۶

همچنین ۹ مربع ۲ × ۲ و ۱۶ مربع ۱ × ۱ نیز در این شکل می‌توان پیدا کرد. پس در کل ۳۰ مربع (صاف) در این شکل وجود دارد.

الان دیگر می‌توانیم به سؤال اصلی خودمان بازگردیم . دو مرتبه نقاط ۱۱ × ۱۱ را رسم می‌کنیم (شما دیگر لازم نیست رسم کنید).



شکل ۱-۷

حال بدون این‌که خطی روی این نقاط بکشید، بگویید از هر اندازه‌ای، چند مربع وجود دارد. اعداد خود را درون جدول زیر بنویسید.

| اندازه | ۱ × ۱ | ۲ × ۲ | ۳ × ۳ | ۴ × ۴ | ۵ × ۵ | ۶ × ۶ | ۷ × ۷ | ۸ × ۸ | ۹ × ۹ | ۱۰ × ۱۰ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| تعداد | | | | | | | | | ۴ | ۱ |

اگر به درستی تمامی اعداد را پیدا کرده باشید، مجموعشان ۳۸۵ خواهد شد. یعنی ۳۸۵ مربع در شکل ۱-۷ وجود دارد.

**درسنامه** اصل جمع چیست؟

در حل این مسئله از **اصل جمع** استفاده شده است. یعنی برای شمارش تعداد موجودات، می‌توانیم آن‌ها را بر اساس خاصیتی به چند دسته تقسیم کنیم و تعداد اعضای هر دسته را پیدا کنیم و در نهایت مقادیر به‌دست آمده را با هم جمع بزنیم. این گفته معادل قاعده‌ی زیر است:

فرض کنید $A_1, A_2, \cdots, A_n$ چند زیرمجموعه از یک مجموعه‌ی متناهی $A$ باشند، به طوری که هیچ دوتایی از این زیرمجموعه‌ها اشتراکی نداشته و اجتماع این زیرمجموعه‌ها کل $A$ باشد. آن‌گاه

$$|A| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

**پرسش** **Computer**

به چند حالت در شکل زیر با دو حرکت مورب به سمت راست و چپ، کلمه COMPUTER را می‌توان ساخت؟

$$\begin{array}{c} C \\ OO \\ MMM \\ PPPP \\ UUUUU \\ TTTTTT \\ EEEEEEE \\ RRRRRRRR \end{array}$$

یکی از مسیرهایی که این کلمه را می‌سازد در شکل ۱ـ۸ نشان داده شده است.

$$\begin{array}{c} C \\ O\ O \\ M\ M\ M \\ P\ P\ P\ P \\ U\ U\ U\ U\ U \\ T\ T\ T\ T\ T\ T \\ E\ E\ E\ E\ E\ E\ E \\ R\ R\ R\ R\ R\ R\ R\ R \end{array}$$

شکل ۱ـ۸

## چه چیزی در مسئله شما را گیج کرده است؟

- مسیرها زیادند و شمردن تک‌تک‌شان کار سختی است.

در این سؤال نیز از حالات کوچک‌تر شروع می‌کنیم تا ایده‌ای برای شمارش پیدا کنیم.

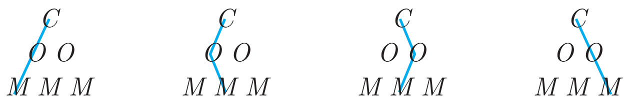
**سؤال.** تمامی مسیرهای مربوط به ساختن کلمه‌ی CO را رسم کنید.

**پاسخ.**

شکل ۱-۹

**سؤال.** تمامی مسیرهای مربوط به ساختن کلمه‌ی COM رسم کنید.

**پاسخ.**



شکل ۱-۱۰

**سؤال.** بدون این‌که شکل جدیدی رسم کنید، فکر می‌کنید چند مسیر برای ساختن کلمه‌ی COMP وجود دارد؟

در سؤال قبلی به نحوه‌ی امتداد پیدا کردن مسیرهای مربوط به $COM$ نسبت به مسیرهای کلمه‌ی $CO$ دقت کنید.

**پاسخ.** همان‌طور که مشاهده می‌کنید، هر کدام از مسیرهای قسمت اول (CO) را توانستیم به دو طریق امتداد دهیم. یکی به سمت پایین ـ چپ و دیگری به سمت پایین ـ راست. همین روند برای ساختن بقیه‌ی حروف نیز صحیح است. یعنی در هر مرحله، بدون توجه به این‌که در مراحل قبلی چگونه حرکت کردیم، به دو گونه می‌توانیم مسیر را ادامه دهیم. یکی این‌که به سمت پایین ـ چپ حرکت کنیم و دیگری آن‌که به سمت پایین ـ راست حرکت کنیم. در نتیجه تعداد مسیرهای کلمه‌ی COMP، دو برابر تعداد مسیرهای کلمه‌ی COM یعنی ۸ عدد خواهد بود.

**سؤال.** به چند طریق می‌توان کلمه‌ی COMPUTER را ساخت؟

**پاسخ.** همان‌طور که گفتیم برای اضافه کردن هر حرف جدیدی، در هر وضعیتی که باشیم، ۲ انتخاب داریم. پس ۱۶ طریق برای ساختن کلمه‌ی COMPU، ۳۲ طریق برای کلمه‌ی COMPUT، ۶۴ طریق برای کلمه‌ی COMPUTE و ۱۲۸ طریق برای کلمه‌ی COMPUTER داریم. پس پاسخ مسئله، ۱۲۸ است.

**درسنامه** اصل ضرب چیست؟

در حل این سؤال از **اصل ضرب** استفاده شد. یعنی برای شمارش، مسئله را به چند بخش تقسیم کردیم (در این مسئله به ۷ انتخاب چپ یا راست) و تعداد حالات را مستقلاً برای هر بخش به‌دست آورده و در هم ضرب کردیم. این اصل در واقع بیان می‌کند اگر اتفاق $A_1$ به $a_1$ طریق مختلف، اتفاق $A_2$ به $a_2$ طریق مختلف …، اتفاق $A_n$ به $a_n$ طریق مختلف ممکن باشد، به طوری که این اتفاق‌ها مستقل از هم باشند و رخ دادن یکی به حالت خاصی از دیگری بستگی نداشته باشد؛ تعداد کل راه‌های ممکن که اتفاقات $A_1$ تا $A_n$ پشت سر هم رخ دهند برابر است با $a_1a_2\cdots a_n$ . این گفته معادل این قاعده است:

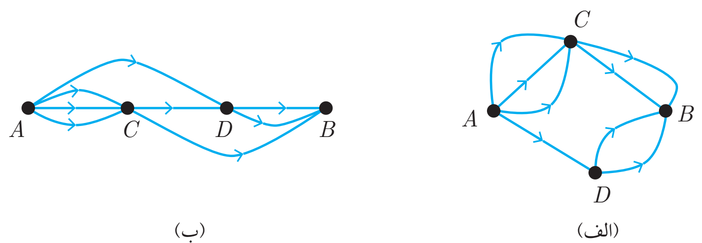
مجموعه‌های متناهی $A_1, A_2, \cdots, A_n$ را در نظر بگیرید. مجموعه‌ی $X$ را مجموعه‌ی همه‌ی $n$تایی‌های $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ بگیرید به طوری که به ازای هر $i$، $x_i \in A_i$ باشد در این صورت،

$$|X| = |A_1|.|A_2|\cdots|A_n|$$

## تمرین‌های بخش ۱-۱

۱. پروفسور آلفا، بتا، گاما و دلتا می‌خواهند در یک آزمون شفاهی ترکیبیات به دانشجویی به نام Pi پذیرش دهند. پروفسورها بر روی ۴ صندلی در یک ردیف نشسته‌اند. پروفسور آلفا و دلتا به عنوان مسئولان کمیته‌ی امتحان، باید کنار یکدیگر بنشینند. پروفسور گاما نیز به عنوان مشاور این دانشجو، باید کنار مسئولین کمیته‌ی امتحان بنشیند. به چند طریق پروفسورها می‌توانند بنشینند؟

۲. در هر کدام از شکل‌های زیر به چند طریق می‌توان با حرکت روی خطوط، از نقطه‌ی $A$ به نقطه‌ی $B$ رفت؟




شکل ۱-۱۱

۳. **(الف)** چند عدد چهاررقمی با ارقام ۰، ۱، ۲ و ۳ وجود دارد؟

**(ب)** در چند تا از این اعداد، ارقام تکراری نیست؟

**(ج)** چند عدد با این ارقام وجود دارد که بر ۳ بخش‌پذیر باشد؟

۴. چند عدد چهاررقمی بزرگ‌تر از ۵۷۳۱ با ارقام متمایز وجود دارد؟

**۵.** چند عدد ۳ رقمی با ارقام متمایز وجود دارد به طوری‌که مجموع ارقام آن برابر با ۷ باشد؟

**۶.** با جابه‌جایی حروف کلمه‌ی «کامپیوتر» چند کلمه‌ی جدید (نه لزوماً با معنا) می‌توان ساخت؟ در چند تا از این کلمات دو حرف «و» و «ر» مجاور هم باشند؟

## ۱-۲ آشنایی با دو نماد

**پرسش** **دنباله‌های عددی**

دنباله‌های زیر، چند جمله‌ی ابتدایی از یک دنباله‌ی نامتناهی از اعداد هستند که با یک رابطه‌ی ساده‌ی ریاضی توصیف می‌شوند. اول سعی کنید عدد بعدی دنباله‌های زیر را حدس بزنید. سپس یک رابطه‌ی کلی برای توصیف دنباله بیان کنید.

۱) ۳, ۸, ۱۵, ۲۴, ۳۵, ?

۲) ۱۱, ۱۹, ۱۴, ۲۲, ۱۷, ۲۵, ?

سعی کنید اعداد بعدی دنباله‌ها را پیدا کنید، سپس ادامه‌ی متن را بخوانید.

**دنباله‌ی اول:** احتمالاً متوجه شدید که عدد بعدی این دنباله، ۴۸ است. در واقع اول ۵ واحد به ۳ اضافه شده است. سپس ۷ واحد به ۸، سپس ۹ واحد به ۱۵ و در نهایت ۱۱ واحد به ۲۴ اضافه شده است. پس منطقاً در مرحله‌ی بعد ۱۳ واحد به ۳۵ می‌بایست اضافه شود و در نتیجه مقدار بعدی دنباله برابر با ۴۸ خواهد بود.

اگر بیش‌تر دقت کنید، متوجه می‌شوید که هر کدام از این اعداد یک واحد از یک عدد مجذور کامل کم‌تر هستند. به عبارت دیگر عضو اول این دنباله $۲^۲ - ۱$ است، عضو دوم آن $۳^۲ - ۱$ است و به همین ترتیب می‌توان گفت که عضو ششم آن، $۷^۲ - ۱$ است. به طور کلی‌تر، عضو $k$ آن، $k^۲ - ۱$ است و بدین ترتیب یک رابطه‌ی کلی برای توصیف اعضای این دنباله بیان می‌شود.

**دنباله‌ی دوم:** عضو بعدی این دنباله ۲۰ است. در واقع این دنباله به این شکل است که یک مرحله ۸ واحد افزایش پیدا می‌کند و مرحله‌ی بعد ۵ واحد کاهش پیدا می‌کند و دوباره مرحله‌ی بعد ۸ واحد افزایش پیدا می‌کند. حال باید مانند قبل یک رابطه‌ی کلی برای اعضای آن پیدا کنیم.

**سؤال.** اعضای این دنباله را $b_۱, b_۲, b_۳, \cdots$ بنامید. سعی کنید برای مقدار $b_k$ یک رابطه بر حسب $k$ پیدا کنید.

**پاسخ.** همان‌طور که مشاهده می‌کنید،

$$b_3 - b_1 = b_5 - b_3 = b_7 - b_5 = b_9 - b_7 = \cdots = 3$$
$$b_4 - b_2 = b_6 - b_4 = b_8 - b_6 = b_{10} - b_8 = \cdots = 3$$

در نتیجه به رابطه‌ی زیر برای $b_k$ها دست پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} b_k = \frac{3}{2}(k-1) + 11 & \text{فرد } k \\ b_k = \frac{3}{2}(k-2) + 19 & \text{زوج } k \end{cases}$$

در این دو مثال متوجه شدید اگر یک دنباله‌ی نامتناهی را همانند دنباله‌های صورت سؤال به فردی معرفی کنیم، او مجبور خواهد بود بقیه اعضای دنباله را حدس بزند. پس برای این‌که بدون ابهام بخواهیم دنباله‌ای را معرفی کنیم، لازم است تمامی اعضای آن را به صورت شفاف مشخص کنیم.

برای دنباله‌های متناهی نیز این مسئله وجود دارد. به طور مثال دنباله‌ی $1, 2, 3, \cdots, 10$ ممکن است از لحاظ عرفی، همان اعداد ۱ تا ۱۰ تلقی شوند، اما این بیان از لحاظ ریاضی مشخص نکرده است که این دنباله، مثلاً دنباله‌ی $1, 2, 3, 4, 5, 10$ نیست. صرفاً ما حدس می‌زنیم منظور دنباله‌ی $a_i = i$ برای $i = 1$ تا ۱۰ بوده است (این را به شکل $\{a_i = i\}_{i=1}^{i=10}$ نیز نمایش می‌دهند.)

حال در صورتی که یک دنباله متناهی از اعداد به صورت کامل مشخص باشد، می‌توان اعضای آن را با هم جمع یا در هم ضرب کرد. برای نمایش جمع یا ضرب اعضای یک دنباله، از نمادهای $\sum$ و $\prod$ (به این نمادها به‌ترتیب «سیگما» و «پای» گفته می‌شود) کمک گرفته می‌شود.

**مثال ۱-۲-۱** همان دنباله‌ی اخیر $a_i = i$ برای $i = 1$ تا ۱۰ را در نظر بگیرید.

$$\sum_{i=1}^{10} a_i$$

عبارت فوق حاصل‌جمع اعداد $a_1$ تا $a_{10}$ را نمایش می‌دهد. بدین شکل که از $i = 1$ تا $i = 10$، مقادیر $a_i$ را با هم جمع می‌کند. یعنی همان $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{10}$ ولی بدون ابهام از این‌که منظور از «...» آیا واقعاً $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9$ بوده است یا خیر. حال در این مورد که $a_i = i$ است، می‌توان این حاصل‌جمع را به شکل زیر نیز نمایش داد.

$$\sum_{i=1}^{10} i$$

یعنی حاصل‌جمع اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰.

**مثال ۱-۲-۲** عبارت زیر را به صورت جمع چند عدد بنویسید و حاصل را محاسبه کنید.

$$\sum_{i=۱}^{۵} ۲$$

عبارت فوق حاصل‌جمع اعضای یک دنباله ۵ عضوی را نشان می‌دهد که تمامی اعضای آن ۲ هستند.
در نتیجه عبارت فوق برابر است با

$$۲+۲+۲+۲+۲=۱۰$$

**مثال ۱-۲-۳** عبارت زیر را به صورت جمع چند عدد بنویسید و حاصل را محاسبه کنید.

$$\sum_{i=۱}^{۵} ۲i$$

عبارت فوق حاصل‌جمع اعضای یک دنباله‌ی ۵عضوی را نشان می‌دهد که عضو $i$ام آن، $۲i$ است.
یعنی حاصل‌جمع اعداد زوج ۲ تا ۱۰.

$$۲+۴+۶+۸+۱۰=۳۰$$

**مثال ۱-۲-٤** مقدار صریح عبارات زیر را به‌دست آورید.

**۱.** $\sum_{i=۱}^{۵} ki$ **۲.** $\sum_{i=۱}^{۵}(i+x)$ **۳.** $\sum_{i=۱}^{۵}\sum_{j=۱}^{۵} ij$

حل:

**۱.**

$$\sum_{i=۱}^{۵} ki = k+۲k+۳k+۴k+۵k=۱۵k$$

توجه کنید که عبارت فوق برابر است با $k\sum_{i=۱}^{۵} i$.

**۲.**

$$\sum_{i=۱}^{۵}(i+x)=(x+۱)+(x+۲)+(x+۳)+(x+۴)+(x+۵)=۱۵+۵x$$

**۳.**

$$\sum_{i=۱}^{۳}\sum_{j=۱}^{۵} ij=\sum_{j=۱}^{۵} j+\sum_{j=۱}^{۵} ۲j+\sum_{j=۱}^{۵} ۳j=\sum_{j=۱}^{۵} j+۲\sum_{j=۱}^{۵} j+۳\sum_{i=۱}^{۵} j=۶\sum_{j=۱}^{۵} j$$

$$=۶(۱+۲+۳+۴+۵)=۹۰$$

نماد $\prod$ پای. $\prod$ برای نمایش حاصل‌ضرب اعضای یک دنباله به کار می‌رود. مفهوم این نماد در عبارات زیر نشان داده شده است:

$$\prod_{i=۱}^{۵} i = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵$$

$$\prod_{i=۱}^{۵} a_i = a_۱ a_۲ a_۳ a_۴ a_۵$$

در تمرینات با خواص بیش‌تری از این دو نماد آشنا می‌شوید.

## تمرین‌های بخش ۱-۲

**۱.** عبارات زیر را به صورت حاصل‌جمع یا حاصل‌ضرب اعداد نمایش دهید.

(الف) $\sum_{r=۱}^{۴} r$ (د) $\sum_{k=۱}^{۴} \frac{۱}{k}$ (ز) $\prod_{k=۱}^{۴} \frac{۱}{k}$

(ب) $\sum_{r=۱}^{۴} r^۲$ (ه) $\sum_{k=۱}^{۴} \frac{۱}{۲k+۱}$ (ح) $\prod_{k=۱}^{۴} \frac{۱}{k^۳}$

(ج) $\sum_{r=۱}^{۴} (-۱)^r r^۲$ (و) $\sum_{k=۱}^{۴} \frac{(-۱)^{k+۱}}{۲k+۱}$ (ط) $\prod_{k=۱}^{۴} (۳ + \frac{۱}{k^۳})$

**۲.** حاصل‌جمع‌ها و حاصل‌ضرب‌های زیر را به کمک نماد $\sum$ یا $\prod$ نمایش دهید.

(الف) $۴ + ۷ + ۱۰ + ۱۳ + ۱۶ + ۱۹$ (ج) $k \times ۲k \times ۳k \times ۴k \times ۵k \times ۶k$

(ب) $۲^۴ + ۲^۷ + ۲^{۱۰} + ۲^{۱۳} + ۲^{۱۶} + ۲^{۱۹}$ (د) $\frac{۳}{۵} \times \frac{۴}{۶} \times \frac{۵}{۷} \times \frac{۶}{۸} \times \frac{۷}{۹} \times \frac{۸}{۱۰}$

(ه) $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۲۰} + \frac{۱}{۳۰} + \frac{۱}{۴۲} + \cdots + \frac{۱}{۹۹۰۰}$

**۳.** حاصل عبارت زیر را پیدا کنید.

(الف) $\prod_{k=۱}^{۱۰} \frac{۲k+۵}{۲k+۳}$ (ج) $\sum_{k=۱}^{n} ۲^k$

(ب) $\sum_{k=۱}^{۶} ۲ \times ۳^k$ (د) $\prod_{k=۰}^{۷} (۱ + \frac{۱}{۲^{۲^k}})$

**۴.** در این تمرین می‌خواهیم حاصل عبارت $\sum_{k=1}^{n} k$ را بر حسب $n$ محاسبه کنیم.

**(الف)** برای هر $n$ طبیعی ثابت کنید:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)$$

**(ب)** با توجه به قسمت پیش نشان دهید

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

**۵.** در این تمرین می‌خواهیم حاصل عبارت $\sum_{k=1}^{n} k^2$ را بر حسب $n$ محاسبه کنیم.

**(الف)** به کمک تمرین قبلی برای هر $n$ طبیعی ثابت کنید:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = n \times 1 + (n-1) \times 2 + \cdots + 1 \times n$$

$$= (n+1)\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2$$

**(ب)** با توجه به قسمت پیش نشان دهید

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**۶.** در این تمرین می‌خواهیم حاصل عبارت $\sum_{k=1}^{n} k^3$ را بر حسب $n$ محاسبه کنیم.

**(الف)** به کمک تمرین قبلی برای هر $n$ طبیعی ثابت کنید:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = n \times 1^2 + (n-1) \times 2^2 + \cdots + 1 \times n^2$$

$$= (n+1)\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k^3$$

**(ب)** با توجه به قسمت پیش نشان دهید:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

**۷.** حاصل عبارت زیر را محاسبه کنید برای محاسبه از تساوی‌های موجود در سؤالات ۴، ۵ و ۶ استفاده کنید.

(الف) $\sum_{k=1}^{10} 3k$

(ب) $\sum_{k=1}^{10} 3k+2$

(ج) $\sum_{k=1}^{10} k^2+2$

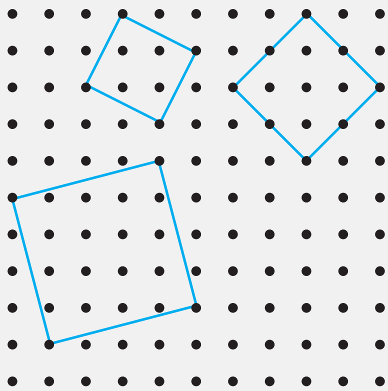
(د) $\sum_{k=1}^{10} (k+1)(k+2)$

(ه) $\sum_{k=1}^{10} k(k+1)(k+2)$

## ۱-۳ مسئله‌ای از اصل جمع و ضرب

**پرسش** مربع‌های کج

در شکل سؤال «مربع‌های صاف و نقطه‌ها»، درکل چند مربع (با احتساب مربع‌های کج) وجود دارد؟



شکل ۱-۱۲

### چه چیزی در مسئله شما را گیج کرده است؟

- تنوع مربع‌ها در این سؤال بیش‌تر از سؤال «مربع‌های صاف و نقطه‌ها» است. آیا در این‌جا نیز می‌توان همانند آن سؤال، مربع‌ها را دسته‌بندی و تعداد اعضای دسته‌ها را تک‌تک محاسبه کرد؟

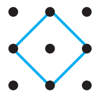
- برای شمارش تعداد مربع‌های ناصاف از یک نوع، آیا از روشی همانند روشی که در سؤال قبلی وجود داشت، می‌توان استفاده کرد؟ اگر نه آیا روش کلی دیگری می‌توان پیدا کرد؟

برای پاسخ دادن به این سؤالات، همانند قبل ابتدا مسئله را در حالات کوچک‌تر بررسی می‌کنیم. برای شبکه نقاط ۲ × ۲، به وضوح مربع کجی وجود ندارد و تنها یک مربع صاف وجود دارد. پس بررسی را از حالت ۳ × ۳ شروع می‌کنیم.

**سؤال.** در حالت ۳ × ۳ درکل چند مربع در شکل وجود دارد؟

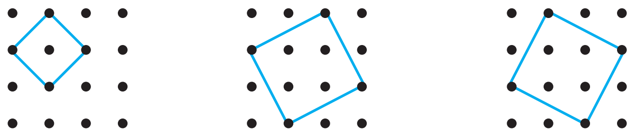
تعداد را پیدا کرده، سپس ادامه‌ی مطلب را بخوانید.

**پاسخ.** همان‌طورکه مشاهده کردید، علاوه بر ۵ مربعی که در مسئله‌ی قبلی (سؤال «مربع‌های صاف و نقطه‌ها») پیدا کرده بودید، یک مربع کج وجود دارد. پس در کل ۶ مربع وجود دارد.



شکل ۱-۱۳

**سؤال.** در حالت ۴ × ۴ درکل چند مربع وجود دارد؟



مربع ناصاف نوع سوم — مربع ناصاف نوع دوم — مربع ناصاف نوع اول

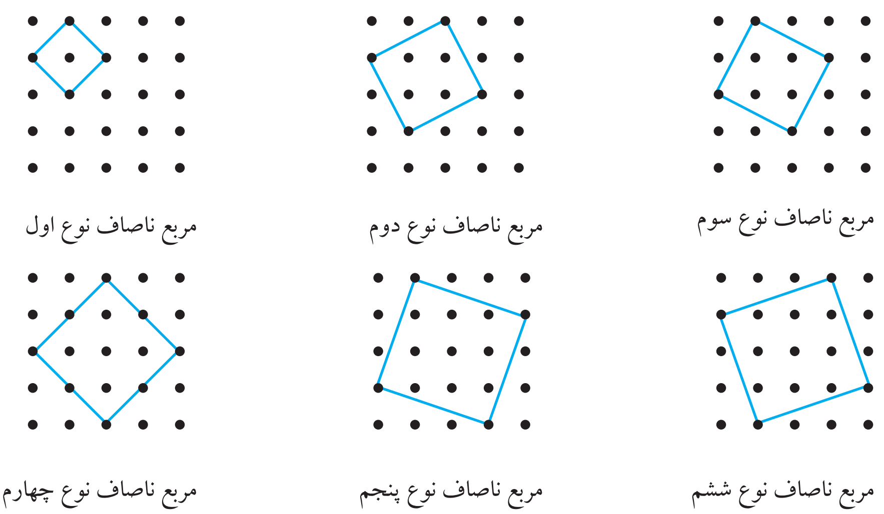
شکل ۱-۱۴

**پاسخ.** درکل به غیر از ۱۴ مربع صافی که قبلاً پیدا کرده بودیم، ۶ مربع کج نیز مشاهده می‌شوند. ۴ عدد از این مربع‌ها مشابه شکل سمت چپ هستند (که این نوع مربع‌ها را نوع ۱ نام‌گذاری کردیم). ۲ مربع دیگر نیز مشاهده می‌شوند. که طول اضلاعشان با هم برابر است، اما نحوه‌ی قرارگیری‌شان در شکل متفاوت است. به عبارت دیگر از انتقال یکدیگر به‌دست نمی‌آیند. اگر ملاک دسته‌بندی را طول ضلع مربع‌ها قرار دهیم، مربع نوع ۲ و ۳ هر دو در یک دسته خواهند بود و اگر ملاک را همسان بودن (یعنی بتوان آن‌ها را از انتقال یکدیگر به‌دست آورد) قرار دهیم، در دو دسته‌ی مختلف خواهند بود. حال سؤال گیج کننده در این‌جا این است که اولاً آیا نحوه‌ی دسته‌بندی اهمیتی در پیدا کردن جواب دارد؟ ثانیاً اگر اهمیت دارد، کدام‌یک از این دسته‌بندی‌ها مناسب‌تر هستند؟

به وضوح برای شمارش، مخصوصاً شمارش‌های پیچیده‌ای مثل این، نحوه‌ی دسته‌بندی بسیار اهمیت دارد، اما دسته‌بندی مناسب را در مراحل بعد پیدا خواهیم کرد. فعلاً این مربع‌های کج را از ۳ نوع متفاوت در نظر بگیرید. در صورت لزوم بعداً این انواع را در هم‌ادغام می‌کنیم.

**سؤال.** در حالت ۵ × ۵ درکل چند مربع وجود دارد؟

تمامی انواع مربع‌های کج را پیدا کنید و همانند حالات قبل نمایش دهید. از هر یک از این انواع چند مربع وجود دارد؟




شکل ۱-۱۵

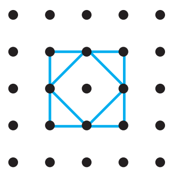
همان‌طورکه قبلاً دیده بودیم، ۳۰ مربع صاف در این جدول وجود دارد. علاوه بر این ۳۰ مربع صاف، ۶ نوع مربع کج در شکل دیده می‌شوند که تعداد هر یک از آن‌ها در جدول زیر برای شبکه ۳ × ۳، ۴ × ۴ و ۵ × ۵ نوشته شده است.

| نوع | ۳ × ۳ | ۴ × ۴ | ۵ × ۵ |
|---|---|---|---|
| ۱ | ۱ | ۴ | ۹ |
| ۲ | ... | ۱ | ۴ |
| ۳ | ... | ۱ | ۴ |
| ۴ | ... | ... | ۱ |
| ۵ | ... | ... | ۱ |
| ۶ | ... | ... | ۱ |

آیا در تعداد مربع‌های یک نوع در شبکه‌های مختلف، نظام آشنایی را مشاهده نمی‌کنید؟ مخصوصاً در تعداد مربع‌های نوع ۱ دقت کنید.

فکر می‌کنید چند مربع نوع ۱ در شبکه $۶ \times ۶$ وجود داشته باشد؟ خوب است که حدستان را واقعاً آزمایش کنید و از درستی آن مطمئن شوید. سعی کنید دلیلی برای این امر پیدا کنید.

همان‌طورکه احتمالاً حدس زدید، تعداد مربع‌های نوع ۱ برای یک شبکه‌ی $n \times n$، $(n-۲)^۲$ است. درواقع همواره تعداد مربع‌های نوع ۱ با تعداد مربع‌های صاف $۲ \times ۲$ برابر است. علت این امر را در شکل زیر مشاهده می‌کنید.



شکل ۱-۱۶

همان‌طورکه در شکل فوق مشاهده می‌کنید، در درون هر مربع $۲ \times ۲$، یک مربع از نوع ۱ وجود دارد. همچنین رئوس هر مربع نوع ۱ نیز روی اضلاع یک مربع $۲ \times ۲$ صاف قرار دارند. پس یک تناظر یک‌به‌یک بین مربع‌های نوع اول و مربع‌های $۲ \times ۲$ وجود دارد و در نتیجه‌ی آن،همواره تعداد مربع‌های صاف $۲ \times ۲$ با تعداد مربع‌های نوع ۱ برابر است.

**سؤال.** برای مربع‌های نوع ۲ و ۳ آیا نکته‌ی مشابهی وجود دارد؟

**پاسخ.** اگر دقت کنید، به رابطه‌ی مشابهی بین مربع‌های نوع ۲ و مربع‌های $۳ \times ۳$ پی می‌برید. یعنی در هر شبکه تعداد این دو نوع مربع با هم برابر است. به همین ترتیب می‌توان گفت تعداد مربع‌های نوع ۳ نیز با تعداد مربع‌های $۳ \times ۳$ صاف برابر است. پس در نتیجه درون هر مربع $۳ \times ۳$ دقیقاً دو مربع کج وجود دارد که ۴ رأس آن‌ها روی اضلاعش قرار گرفته‌اند.

به همین ترتیب نیز می‌توانید ببینید که در درون هر مربع $۴ \times ۴$ نیز یک مربع نوع ۴، یک مربع نوع ۵ و یک مربع نوع ۶ وجود دارد.

**سؤال.** در یک مربع صاف $۵ \times ۵$، چند نوع مربع کج وجود دارد که رئوسشان بر روی اضلاع آن قرار داشته باشد؟ به طورکلی در یک مربع صاف $k \times k$ چند نوع مربع کج وجود دارد که رئوسشان بر روی اضلاع آن باشد؟

**پاسخ.** به طورکلی می‌توانید بررسی کنید که در هر مربع صاف $k \times k$، $k - ۱$ مربع ناصاف وجود دارد که رئوسشان بر روی اضلاع آن باشد.

**سؤال.** یک شبکه‌ی نقطه‌ای $۶ \times ۶$ برای خود رسم کنید. بدون رسم شکل دیگری، تعداد مربع‌های آن را (اعم از صاف و کج) محاسبه کنید.

از نتایجی که تا به حال به‌دست آورید استفاده کنید و از محاسبه نترسید!

در قبل تعداد هرکدام از انواع مربع‌های صاف را به‌دست آوردیم. حال هم تعداد مربع‌های کج در درون هرکدام از این مربع‌های صاف را می‌دانیم. پس تعداد کل مربع‌ها را می‌توان از رابطه‌ی زیر حساب کرد:

$$۵^۲ + ۴^۲(۱ + ۱) + ۳^۲(۱ + ۲) + ۲^۲(۱ + ۳) + ۱^۲(۱ + ۴) = ۱۰۵$$

**سؤال.** بدون رسم شکل، مسئله را برای شبکه‌ی $۱۱ \times ۱۱$ حل کنید.

**پاسخ.** طبق مطالب گفته شده، تعداد مربع‌ها طبق رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است:

$$\sum_{k=۱}^{۱۰} k(۱۱ - k)^۲ = ۱ \times ۱۰^۲ + ۲ \times ۹^۲ + \cdots + ۱۰ \times ۱^۲$$

حال کافی است که این مجموع را محاسبه کنیم.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=۱}^{۱۰} k(۱۱ - k)^۲ &= \sum_{k=۱}^{۱۰} k^۳ - ۲۲k^۲ + ۱۲۱k \\
&= \sum_{k=۱}^{۱۰} k^۳ - ۲۲\sum_{k=۱}^{۱۰} k^۲ + ۱۲۱\sum_{k=۱}^{۱۰} k \\
&= \left(\frac{۱۰ \times ۱۱}{۲}\right)^۲ - ۲۲\left(\frac{۱۰ \times ۱۱ \times ۲۱}{۶}\right) + ۱۲۱\left(\frac{۱۰ \times ۱۱}{۲}\right) \\
&= ۳۰۲۵ - ۸۴۷۰ + ۶۶۵۵ = ۱۲۱۰
\end{aligned}$$

پس پاسخ ۱۲۱۰ مربع است.

## ۱-٤ تمرینات پایانی

**۱.** دانش‌آموزی یک کیف بسیار مجهز دارد که جیب اصلی آن دارای ۳ قفل رمزی دورقمی است. این دانش‌آموز فراموش کار رمزهای کیفش را به صورت دقیق به خاطر نمی‌آورد. فقط می‌داند که هر ۳ عدد رمز آن از ۴۰ کم‌تر هستند و ۲ تا از رمزهای آن ۱۷ و ۲۴ بودند (نمی‌داند این رمزها مربوط به کدام قفل بود). به طور متوسط در هر ۱ ثانیه او می‌تواند یک ترکیب رمز را امتحان کند. حداکثر چه زمانی طول می‌کشد تا او رمز را پیدا کند؟ توجه کنید تا زمانی که ۳ رمز صحیح نباشند، کیف باز نمی‌شود.

**۲.** چند عدد ۵رقمی مانند $\overline{abcde}$ وجود دارد که ارقام $b$ و $d$ برابر با مجموع ارقام مجاورشان باشند؟

**۳.** در یک مدرسه $n$ دبیر تدریس می‌کنند. این دبیرها را با شماره‌های $۱, ۲, \cdots, n$ شماره‌گذاری می‌کنیم. می‌دانیم دبیر $i$ام، $i+۱$ نفر از دانش‌آموزان را می‌شناسد. هر دانش‌آموز را ممکن است بیش از یک دبیر بشناسند. هر یک از دبیرها می‌خواهد یک دانش‌آموز را به عنوان نماینده خود انتخاب کنند به شرطی که او را بشناسد. در ضمن دو دبیر نماینده‌ی یکسان انتخاب نمی‌کنند. ثابت کنید این کار حداقل به $۲^n$ روش مختلف امکان‌پذیر است.

**٤.** میزهای یک کلاس مانند یک جدول $۵ \times ۵$ چیده شده‌اند و توسط حداکثر ۲۵ دانش‌آموز پر می‌شوند. دانش‌آموزان طوری روی صندلی نشسته‌اند که برای هر دانش‌آموزی یا تمامی میزهای هم‌ردیفش یا تمامی میزهای هم‌ستونش پر شده است. چند ساختار برای نشستن دانش‌آموزان در کلاس ممکن است؟ توجه کنید که با جابه‌جایی دو دانش‌آموز ساختار جدیدی تولید نمی‌شود.

**۵.** به چند طریق می‌توان خانه‌های جدولی $۱۰ \times ۱۵$ را با اعداد ۰ و ۱ پر کرد به طوری که مجموع هر چهار عدد متوالی در یک سطر یا یک ستون عددی زوج باشد؟

**۶.** عدد طبیعی $n$ را در نظر بگیرید، که $n = p_۱^{\alpha_۱} p_۲^{\alpha_۲} \cdots p_k^{\alpha_k}$ تجزیه به عوامل اول $n$ است. نشان دهید

$$(۲\alpha_۱ + ۱)(۲\alpha_۲ + ۱) \cdots (۲\alpha_k + ۱)$$

زوج مرتب $(a, b)$ از اعداد طبیعی وجود دارد که کوچک‌ترین مضرب مشترک‌شان برابر $n$ است.

**۷.** تعداد توابع $f : \{۱, ۲, \cdots, ۱۹۹۹\} \to \{۲۰۰۰, ۲۰۰۱, ۲۰۰۲, ۲۰۰۳\}$ را بیابید که $\sum_{i=۱}^{۱۹۹۹} f(i)$ فرد باشد.

**۸.** فرض کنید $A$ یک مجموعه $n$ عضوی باشد. تعداد $k$تایی‌های $(A_۱, A_۲, \cdots, A_k)$ از زیرمجموعه‌های $A$ را بیابید ($A_۱, A_۲, \cdots, A_k$ همگی زیرمجموعه‌هایی از $A$ هستند) که $A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_k = A$.

**۹.** در بسط عبارت

$$(۱ + x + x^{۲} + \cdots + x^{۲۷})(۱ + x + x^{۲} + \cdots + x^{۱۴})^{۲}$$

ضریب جمله $x^{۲۸}$ چند است؟

**۱۰.** چند عدد طبیعی کوچک‌تر از $۱۰^{۹}$ وجود دارد که رقم ۰ نداشته باشد و مجموع ارقامش برابر ۱۰ باشد؟

**۱۱.** به چند طریق می‌توان $n - ۳$ قطر یک $n$ضلعی منتظم را طوری رسم کرد که اولاً همدیگر را داخل $n$ضلعی قطع نکنند، ثانیاً هرکدام از مثلث‌های به وجود آمده دست‌کم یک ضلع مشترک با $n$ضلعی داشته باشد؟

**۱۲.** $n$ چوب با طول‌های $۱, ۲, \cdots, n$ در دست داریم. چند نوع مثلث غیرهمنهشت می‌توانیم با استفاده از سه تا از این چوب‌ها بسازیم؟

**۱۳.** در ماتریس $A$ با ابعاد $n \times n$، درایه‌ی واقع در سطر $i$ و ستون $j$ را $a_{ij}$ می‌نامیم. ماتریس $A$ را پر مغز می‌نامیم، هرگاه همه‌ی درایه‌های $A$ برابر ۰ و ۱ باشند و به ازای هر $k$ سطر متمایز مانند $p_{۱}, p_{۲}, \cdots, p_k$ حداقل یک عدد مانند $j$ وجود داشته باشد که $a_{p_{۱}j} + a_{p_{۲}j} + \cdots + a_{p_kj}$ عددی فرد باشد. چند ماتریس $n \times n$ پر مغز وجود دارد؟