



مجموعه پرسش های چهارگزینه ای
حسابان (۱) پایه ی یازدهم
(ویژه ی مهندسی ها)

مؤلفین:

حسین شفیع زاده
علی رضا نداف زاده
محسن رحیمی
عباس نعمتی فر



انتشارات خوشخون

ساده بگویم ...

نگاه، زاده‌ی علاقه است.

اگر دو چشم روشن عشق به تو نگاه کند، دگر تو از آن خود نیستی

زمان می‌گذرد و زمانه نیز هم

کودک می‌شوی ...

جوان هستی و جوانی نمی‌کنی ... می‌گذری ...

پیر می‌شوی ... می‌مانی ...

باز هم، مثل همیشه در پی گمشده‌ای هستی که با تو هست و نیست

باز ...

در پی آن علاقه‌ی پنهانی

آن نگاه همیشه تازه هستی

باز ...

آن دو چشم روشن عشق را، در غبار بی‌امان زمان، جست و جو می‌کنی.

غافل از آن که او دیگر تکه‌ای از تو شده

سایه‌ای خوش، بر دل تو

گوشه گوشه‌ی این دل خراب، سرشار از عطر نگاه توست عزیزدل. (مجتبی معظمی)

امروز در آستانه‌ی پنجاه سالگی و مرور خاطرات قدیم، گوشه گوشه‌ی دلم مملو از علاقه دوستان و عزیزانی است که دیروز و امروز در کنارم بودند و جوانی و میانسالیم را سرشار از لحظات شیرینی کردند که هر روز تصورشان، شادی دلنشینی را برایم به همراه می‌آورد. امروز که سرعت گذر عمر را بیش از هر زمانی درک می‌کنم، می‌بینم که کودکی، نوجوانی و جوانی به یک چشم بر هم زدنی گذشته و شاید چند گامی بیشتر تا پایان میانسالی نمانده است، دوستانی دارم که شاید حتی یک بار هم ندیده باشمشان، دوستانی که مرا با کتاب‌های کمک درسیم در طی این سال‌ها همراهی کرده‌اند، آنهایی که تألیف کتب را به عشق آنها آغاز کردم تا شاید بتوانم در زمان‌هایی کوتاه ذهنشان را با مسائل جذاب ریاضی درگیر کنم و در این درگیری شیرین آنها را برای رسیدن به هدفشان که عبور از سدی به نام کنکور است، کمکی کوچک کرده باشم. گاهی خودم را به جای دوستی می‌گذارم که کیلومترها دورتر مشغول خواندن و نگاه کردن به آموزش و سؤالات کتاب‌های ماست، امیدوارم که عشق و علاقه‌ی ما را در سطر سطر کتاب‌ها ببیند، عشقی که شاید کم و کاستی‌هایی در دل خود دارد. امیدوارم نگاه و دلش ما را بخاطر این کمک و کاستی‌ها ببخشد.

کتاب حاضر را چهار تن از دوستان بسیار قدیمی و با تجربه‌ی بنده که در دبیرستان‌های معروف تهران مشغول به تدریس هستند تألیف کرده‌اند. کمال تشکر را از آقایان شفیق‌زاده، رحیمی، ندادف‌زاده و نعمتی‌فر دارم، و از تکتک دوستان به خاطر صبر و بردباریشان تشکر ویژه دارم که در طی این چند سال پیگیر تألیف کتاب پرسش‌های چهارگزینه‌ای حسابان (۱) بودند.

امیدوارم مطالب کتاب حاضر برای تمامی عزیزانی مفید واقع شود. بهترین‌ها را برای شما و خودم از خداوند خواستارم.

لازم می‌دانم از تمامی کسانی که در تولید این اثر نقش داشتند کمال تشکر را داشته باشم و از شما دوست عزیز نیز به خاطر نواقص و کمبودهای احتمالی طلب عفو دارم. از شما مخاطب گرمی انتظار می‌رود عیوب و ایرادات کار را به ما ارجاع دهید تا در چاپ‌های بعدی مورد توجه قرار گیرد.



رسول حاجی‌زاده

مدیر انتشارات خوشخوان

مقدمه مؤلفین

یک پرسش اساسی در زمینه‌ی سرمایه‌گذاری اقتصادی ترند (trend) این روزهای جامعه است، کجا و در کدام بازار سرمایه‌گذاری کنیم تا سود بیشتری داشته باشیم!

اگر ریشه‌های این پرسش را در جنبه‌های دیگر زندگی جستجو کنیم، متوجه خواهیم شد که هر لحظه از عمر، ما در حال انتخاب هستیم، قدم برداشتن در کدام مسیر ما را به کیفیت بالاتری از زندگی می‌رساند؟ در یک مثال تصور کنیم عمر ما سرمایه‌ی ماست و هدف‌مان از انجام هر کار، سرمایه‌گذاری برای دستیابی به کیفیت بالاتری از زندگی است. معامله به این صورت است که ما از منبع بی‌بازگشت گذر زمان هزینه می‌کنیم و در انتظار سود، صدف کوتاه مدت یا بلند مدتی در نظر داریم.

امروز و با پیشرفت تکنولوژی‌های الکترونیکی و افزایش قابل توجه صرف زمان در فضای مجازی و نرم‌افزارهای پیام‌رسان، هر کدام از ما در محاصره‌ی رقابتی ناجوانمردانه‌ای هستیم!

شبکه‌های مجازی و نرم‌افزارهای پیام‌رسان، با صرف هزینه‌های بسیار زیاد و استفاده از متخصصین با تجربه، در جستجوی این هستند که چگونه می‌توان از دست‌آوردهای جدیدتری رونمایی کرد تا ما مخاطبین مجبور به صرف زمان بیشتر در آن شبکه‌ی اجتماعی یا پیام‌رسان شویم.

تصور اینکه در رقابت بین این غول‌های تکنولوژی، ما موش آزمایشگاهی هستیم، کمی بحث را جدی‌تر می‌کند.

کدام‌یک از ما به این موضوع بی‌اعتقاد است که زمان (عمر) بزرگترین سرمایه‌ی بی‌بازگشت است؟

عزیز من!

سلام

بیایید برای عمرمان (بزرگترین سرمایه‌ی در دسترس) ارزش قائل شویم و در انتخاب مسیرهای پیشرو، در پرسودترین بازارها سرمایه‌گذاری کنیم.

کدام بازار پرسودتر است؟

۱. صرف زمان در اینستاگرام یا صرف زمان در راه آموزش و تلاش برای دستیابی به جایگاه‌های رفیع‌تر

علمی-شغلی

۲. صرف زمان در نرم‌افزارهای پیام‌رسان یا توجه به مطالعه و آموختن مهارت‌های لازم برای رسیدن به زندگی

بهتر

۳. صرف زمان بیش از حد برای بازی‌های رایانه‌ای یا گذران وقت در کنار خانواده و صحبت کردن با عزیزان

هر لحظه از عمر قیمتی دارد اما آورده‌ی سرمایه‌گذاری و ارزش سود حاصل، در سنین پایین‌تر از ۲۵ سال، بیش از هر دوره‌ی دیگری مورد توجه است.

مغتنم دارد گذارد وام خودش

ای خُنگ آن را که او ایام پیش

صحت و زورِ دل و قوت بُود

اندر آن ایام گش قدرت بُود

می‌رساند بی‌دریغی بار و بَر

وان جوانی همچو باغ سبز و تَر

و اما سخنی کوتاه در مورد کتاب:

در این کتاب سعی کرده‌ایم از تجربیات چند ده ساله‌ای که دانشیم استفاده کنیم و کتابی به رشته تالیف درآوریم که مناسب عموم دانش‌آموزان یازدهم باشد و در عین حال دانش‌آموزان ممتاز نیز بهره لازم را از کتاب داشته باشند.

۱. چینش مناسب تست‌ها از ساده به سخت
۲. طبقه‌بندی موضوعی تست‌ها در هر فصل
۳. تبدیل حداکثری تمارین و فعالیت‌های کتاب درسی به تست
۴. پرهیز از زیاده‌گویی و بیان تست‌های تکراری
۵. استفاده مناسب و به‌جا از تست‌های کنکور سراسری در لابه‌لای تست‌ها
۶. هماهنگی بین تست‌ها و درسنامه
۷. درسنامه کامل ولی مختصر و تکمیل نکات اضافی در قالب پاسخ تشریحی تست‌ها

در پایان از مسئول انتشارات آقای حاجی‌زاده بابت چاپ این کتاب کمال تشکر را داریم. همچنین یک تشکر ویژه از آقای محمد وزیرزاده‌ی عزیز که با صبر و حوصله و تحمل سختی‌های فراوان بالاخره شرایط چاپ این کتاب را فراهم آوردن.








تابستان ۱۳۹۹

حسین شفیع‌زاده، علی رضا ناداف‌زاده،

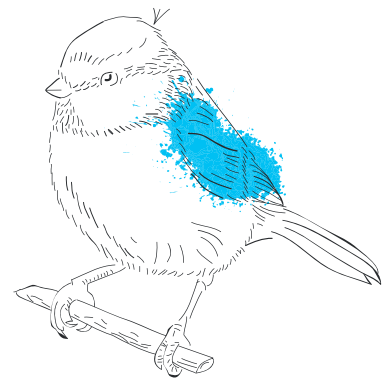
محسن رحیمی، عباس نعمتی‌فر،



۱	جبر و معادله	فصل اول 
۲	درسنامه	
۲۲	پرسش‌های چهار گزینه‌ای	
۴۶	پاسخ کلیدی پرسش‌های چهار گزینه‌ای	
۴۸	پاسخ تشریحی پرسش‌های چهار گزینه‌ای	
۹۴	آزمون‌ها	
۹۹	تابع	فصل دوم 
۱۰۰	درسنامه	
۱۱۳	پرسش‌های چهار گزینه‌ای	
۱۳۸	پاسخ کلیدی پرسش‌های چهار گزینه‌ای	
۱۴۰	پاسخ تشریحی پرسش‌های چهار گزینه‌ای	
۱۷۹	آزمون‌ها	
۱۸۳	توابع نمایی و لگاریتمی	فصل سوم 
۱۸۴	درسنامه	
۱۹۰	پرسش‌های چهار گزینه‌ای	
۱۹۷	پاسخ کلیدی پرسش‌های چهار گزینه‌ای	
۱۹۸	پاسخ تشریحی پرسش‌های چهار گزینه‌ای	
۲۰۷	آزمون‌ها	
۲۱۳	مثلثات	فصل چهارم 
۲۱۴	درسنامه	
۲۲۰	پرسش‌های چهار گزینه‌ای	
۲۳۶	پاسخ کلیدی پرسش‌های چهار گزینه‌ای	
۲۳۷	پاسخ تشریحی پرسش‌های چهار گزینه‌ای	
۲۶۰	آزمون‌ها	
۲۶۵	حد و پیوستگی	فصل پنجم 
۲۶۶	درسنامه	
۲۷۷	پرسش‌های چهار گزینه‌ای	
۲۹۳	پاسخ کلیدی پرسش‌های چهار گزینه‌ای	
۲۹۴	پاسخ تشریحی پرسش‌های چهار گزینه‌ای	
۳۲۰	آزمون‌ها	

فصل اول

جبر و معادله





بخش اول **درس‌نامه**

خلاصه‌ی جبر و معادله

۱ مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

☞ **دنباله‌ی حسابی:** دنباله‌ای است که هر جمله‌ی آن برابر است با حاصل جمع جمله‌ی قبلی آن با عدد ثابت d . این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامیم.

a_1 و $a_1 + d$ و $a_1 + 2d$ و ...

☞ **جمله‌ی عمومی دنباله حسابی:** جمله‌ی n ام دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول a_1 و قدرنسبت d برابر است با:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

☞ **واسطه‌ی حسابی:** اگر a, b, c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، آن‌گاه b را واسطه‌ی حسابی a و c می‌نامیم. در این صورت:

$$b = \frac{a + c}{2}$$

☞ **مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی:** اگر a_1 جمله‌ی اول و d قدرنسبت یک دنباله‌ی حسابی باشند، آن‌گاه مجموع n جمله‌ی اول آن از روابط زیر به دست می‌آید:

① $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d)$

② $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$a_n = S_n - S_{n-1}$ برای هر $n > 1$ داریم:

نکته ۱:

در دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی عمومی به صورت $an + b$ و مجموع n جمله‌ی اول به صورت $an^2 + bn$ است.

نکته ۲:

در یک دنباله‌ی حسابی جمله‌ی سوم، دو برابر جمله‌ی هفتم است. اگر مجموع n جمله‌ی اول این دنباله برابر صفر باشد، مقدار n کدام است؟

تست

کدام است؟

۱

- ۲۱ (۱) ۲۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴)

حل: گزینه‌ی ۱ صحیح است.

$a_3 = 2a_7 \Rightarrow (a_1 + 2d) = 2(a_1 + 6d) \Rightarrow a_1 + 10d = 0$ و $S_{21} = \frac{21}{2}(2a_1 + 20d) = 21(a_1 + 10d) = 21 \times 0 = 0$

دقت کنید که از رابطه‌ی $a_1 + 10d = 0$ نتیجه می‌گیریم که $a_{11} = 0$ پس مجموع ۱۰ جمله‌ی قبل از a_{11} و ۱۰ جمله‌ی بعد از a_{11} برابر صفر است، لذا $S_{21} = 0$.

در یک دنباله‌ی حسابی، $s_n = 3n^2 + 2n$ حاصل $s = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) + \dots + (a_{19} + a_{20})$ کدام است؟

تست

کدام است؟

۲

- ۱۴۵۰ (۱) ۱۵۵۰ (۲) ۱۶۵۰ (۳) ۱۷۵۰ (۴)

حل: گزینه‌ی ۴ صحیح است. عبارت s را به صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم:

$s = (a_1 + a_{20}) + (a_2 + a_{19}) + (a_3 + a_{18}) + \dots + (a_{10} + a_{11}) = 2a_{21} + 2a_{21} + 2a_{21} + \dots + 2a_{21} = 7(2a_{21})$
 $\Rightarrow s = 14a_{21} = 14(S_{21} - S_{20}) = 14(1323 + 42 - 1200 - 40) = 1750$

در یک دنباله‌ی حسابی ۶۰ جمله‌ای، مجموع جملات ردیف زوج، ۳ برابر مجموع جملات ردیف فرد است. اگر قدرنسبت این دنباله برابر ۳ باشد، مجموع جملات ردیف فرد کدام است؟

تست

برابر ۳ باشد، مجموع جملات ردیف فرد کدام است؟

۳

- ۳۶ (۱) ۴۵ (۲) ۶۰ (۳) ۷۲ (۴)

حل: گزینه ۲ صحیح است. مجموع جملات ردیف فرد را s می‌نامیم. در این صورت مجموع جملات ردیف زوج برابر $3s$ است.

$$\begin{cases} 3s = a_1 + a_4 + \dots + a_{6n} \\ s = a_2 + a_5 + \dots + a_{6n-1} \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 2s = (a_1 - a_2) + (a_4 - a_5) + \dots + (a_{6n} - a_{6n-1})$$

پس $2s = 3 \cdot d$ و در نتیجه $45 = 15d = 3 \cdot d$.

↔ **دنباله هندسی:** دنباله‌ای است که هر جمله‌ی آن برابر است با حاصل ضرب جمله‌ی قبلی آن در عدد ثابت q . این عدد ثابت و مخالف صفر را قدرنسبت دنباله می‌نامیم.

$$a_1, a_1q, a_1q^2, \dots$$

↔ **جمله عمومی دنباله هندسی:** جمله‌ی n ام دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a_1 و قدرنسبت q برابر است با:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

↔ **واسطه هندسی:** اگر a, b, c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، آن‌گاه b را واسطه‌ی هندسی a و c می‌نامیم. در این صورت:

$$b^2 = ac$$

↔ **مجموع n جمله اول دنباله هندسی:** اگر a_1 و q به ترتیب جمله‌ی اول و قدرنسبت یک دنباله‌ی هندسی باشند، آن‌گاه مجموع n جمله‌ی اول

$$s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

آن از رابطه‌ی مقابل به دست می‌آید:

اگر جملات n ام، k ام و t ام یک دنباله‌ی حسابی، سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، آن‌گاه قدرنسبت دنباله‌ی

$$\frac{t-k}{k-n} \text{ هندسی برابر است با:}$$

نکته ۳:

تست

۴

در یک دنباله‌ی هندسی $2n$ جمله‌ای، مجموع جملات ردیف زوج، $\frac{3}{4}$ برابر مجموع جملات ردیف فرد است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۳

حل: گزینه ۱ صحیح است. جملات ردیف زوج یک دنباله‌ی هندسی، با جمله‌ی اول a_1 و قدرنسبت q^2 و جملات ردیف فرد یک دنباله‌ی هندسی، با جمله‌ی اول a_1 و قدرنسبت q است. در هر دو دنباله، تعداد جملات n است.

$$s_2 = \frac{3}{2} s_1 \Rightarrow \frac{a_1(1-(q^2)^n)}{1-q^2} = \frac{3}{2} \times \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow a_2 = \frac{3}{2} \times a_1 \Rightarrow a_1 q = \frac{3}{2} \times a_1 \Rightarrow q = \frac{3}{2}$$

جملات چهارم، ششم و دوازدهم یک دنباله‌ی حسابی، سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی‌اند. مجموع چه تعداد از جملات اولیه‌ی دنباله‌ی حسابی برابر صفر است؟

- (۱) جمله ۷ (۲) جمله ۶ (۳) جمله ۵ (۴) جمله ۴

تست

۵

حل: گزینه ۳ صحیح است. به شرطی a_4, a_6, a_{12} تشکیل دنباله‌ی هندسی می‌دهند که $a_4 \cdot a_{12} = (a_6)^2$ باشد.

$$(a_6)^2 = a_4 \cdot a_{12} \Rightarrow (a + 5d)^2 = (a + 3d)(a + 11d) \Rightarrow a^2 + 10ad + 25d^2 = a^2 + 14ad + 33d^2 \Rightarrow 4ad + 18d^2 = 0 \Rightarrow 2a + 4d = 0 \Rightarrow s_8 = 0$$

مجموع جواب‌های معادله‌ی $\frac{1-x+x^2-x^3+\dots+x^8}{1-x^3+x^6} = 2$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) $-\sqrt{5}$

تست

۶



حل: گزینه ۱ صحیح است. صورت کسر، حاصل جمع ۹ جمله از یک دنباله هندسی با جمله اول $a_1 = 1$ و قدرنسبت $q = -x$ است؛ پس برابر است با:

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^8 = \frac{a_1(1 - q^9)}{1 - q} = \frac{1(1 - (-x)^9)}{1 - (-x)} = \frac{1 + x^9}{1 + x}$$

به طور مشابه مخرج کسر نیز یک دنباله هندسی ۳ جمله ای با جمله اول $a_1 = 1$ و قدرنسبت $q = -x^3$ است؛ پس برابر است با:

$$1 - x^3 + x^6 = \frac{a_1(1 - q^3)}{1 - q} = \frac{1(1 - (-x^3)^3)}{1 - (-x^3)} = \frac{1 + x^9}{1 + x^3}$$

$$r = \frac{\frac{1 + x^9}{1 + x}}{\frac{1 + x^9}{1 + x^3}} = \frac{1 + x^3}{1 + x} = \frac{(1 - x + x^2)(1 + x)}{1 + x} = 1 - x + x^2$$

پس داریم:

پس $x^2 - x - 1 = 0$ و در نتیجه $x_1 + x_2 = 1$ است.

۲ معادلات درجه دوم

↔ **ریشه یابی:** در معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با فرض $\Delta = b^2 - 4ac$ سه حالت زیر وجود دارد.

- ۱ $\Delta < 0$. ریشه‌ی حقیقی ندارد.
- ۲ $\Delta = 0$. یک ریشه‌ی مضاعف برابر $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ دارد.
- ۳ $\Delta > 0$. دو ریشه‌ی حقیقی متمایز به صورت $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ دارد.

اگر $x = 2$ ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی $3x^2 + (m-1)x + n = 0$ باشد، حاصل $m + n$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

تست

۷

$$2 = -\frac{m-1}{2 \times 3} \Rightarrow m = -11$$

حل: گزینه ۱ صحیح است. ریشه‌ی مضاعف برابر $\frac{-b}{2a}$ است. پس داریم:

$$3x^2 - 12x + n = 0 \xrightarrow{x=2} 12 - 24 + n = 0 \Rightarrow n = 12$$

حال $x = 2$ را در معادله جایگزین می‌کنیم.

پس $n + m = 1$ است.

اگر $x = \alpha$ ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ باشد، آن‌گاه $f(x) = a(x - \alpha)^2$.
هم‌چنین اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم فوق باشند، آن‌گاه $f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$.

نکته ۴:

کدام عبارت زیر یک عامل $x^2 - 3x + 3a - a^2 = 0$ است؟

۱ (۱) $x + 3 + a$ ۲ (۲) $x + 3 - a$ ۳ (۳) $x - 3 + a$ ۴ (۴) $x - 3 - a$

تست

۸

حل: گزینه ۳ صحیح است. معادله‌ی درجه‌ی دوم را حل می‌کنیم:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 12a + 4a^2}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{(2a - 3)^2}}{2} = \frac{3 \pm (2a - 3)}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3 + 2a - 3}{2} = a \\ x_2 = \frac{3 - 2a + 3}{2} = 3 - a \end{cases}$$

$$x^2 - 3x + 3a - a^2 = (x - x_1)(x - x_2) = (x - a)(x - 3 + a)$$

پس عبارت داده شده به صورت $(x - x_1)(x - x_2)$ تجزیه می‌شود:

یعنی $x - a$ و $x - 3 + a$ از عوامل عبارت داده شده‌اند.

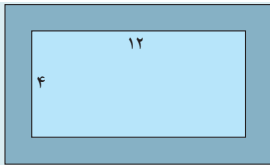


نکته ۵:

برای حل برخی از مسائل کاربردی، با مدل‌سازی مناسب، مسأله را تبدیل به حل یک معادله‌ی درجه ۲ می‌کنیم.

تست

۹



در شکل مقابل یک آبراه بتونی با پهنای یکسان و به مساحت ۱۷ مترمربع اطراف استخری به ابعاد ۱۲ متر و ۴ متر قرار دارد. پهنای آبراه چند سانتی‌متر است؟

- ۱) ۴۰ ۲) ۵۰ ۳) ۶۰ ۴) ۷۵

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است. پهنای آبراه x را فرض می‌کنیم و مساحت آن را پیدا می‌کنیم:

$$s = 2(x(12 + 2x) + 4x) = 4x^2 + 32x \Rightarrow 4x^2 + 32x = 17 \Rightarrow 4x^2 + 32x - 17 = 0$$

جواب این معادله $x = \frac{1}{4}$ است، پس پهنای آبراه برابر ۵۰ سانتی‌متر است.

روابط بین ضرایب و ریشه‌ها: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آن‌گاه:

۱) $s = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

۲) $p = \alpha\beta = \frac{c}{a}$

۳) $|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

مثال ۱

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم باشند، حاصل $\alpha^2 + \beta^2$ و $\alpha^3 + \beta^3$ را برحسب s و p بنویسید.

حل: از اتحادها کمک می‌گیریم:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = s^2 - 2p$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = s^3 - 3ps$$

۵

تست

۱۰

بین ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x + 3m - 1 = 0$ رابطه‌ی $\alpha + 3\beta = 5$ برقرار است. مقدار m کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ \alpha + 3\beta = 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{کم}} 2\beta = 2 \Rightarrow \beta = 1$$

حل: گزینه‌ی ۱ صحیح است. با توجه به رابطه $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ داریم:

$$x^2 - 3x + 3m - 1 = 0 \xrightarrow{x=1} 1 - 3 + 3m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$$

حال $\beta = 1$ را در معادله جایگزین می‌کنیم.

تست

۱۱

ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + 2mx + 4m - 4 = 0$ دو عدد صحیح زوج متوالی‌اند. مقدار m کدام است؟

- ۱) ۱ یا -۳ ۲) ۱ یا ۳ ۳) -۱ یا ۳ ۴) -۱ یا -۳

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است. اختلاف دو عدد صحیح زوج متوالی، ۲ واحد است.

$$\alpha - \beta = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{4m^2 - 4(4m - 4)}}{1} = 2 \Rightarrow \sqrt{4m^2 - 16m + 16} = 2$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 16m + 16 = 4 \Rightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Rightarrow m = 1, 3$$

دقت کنید به ازای $m = 1$ و $m = 3$ ریشه‌های معادله دو عدد زوج متوالی هستند.

نکته ۶:

گاهی اوقات برای یافتن رابطه‌ی بین ریشه‌ها، می‌توان ریشه را در خود معادله جایگزین کرد.

به طور مثال اگر α ریشه‌ی معادله‌ی $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشد، آن‌گاه $\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0$ و یا $\alpha^2 = 3\alpha - 1$.





اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x - 3 = 0$ باشند، حاصل $\frac{\alpha^2 - 3}{\beta} + \frac{3\beta}{\alpha}$ چقدر است؟

تست

۱۲

(۱) ۳ (۲) -۳ (۳) -۱۵ (۴) ۱۵

حل: گزینه‌ی ۳ صحیح است. اگر α را در معادله جایگزین کنیم، داریم:
پس در عبارت داده شده، به جای $\alpha^2 - 3$ عبارت 3α را جایگزین می‌کنیم.

$$\frac{\alpha^2 - 3}{\beta} + \frac{3\beta}{\alpha} = \frac{3\alpha}{\beta} + \frac{3\beta}{\alpha} = \frac{3(\alpha^2 + \beta^2)}{\alpha\beta} = \frac{3(s^2 - 2p)}{p} = \frac{3(9 + 6)}{-3} = -15$$

بین ضرایب معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ رابطه‌ی $2a - b + c = 0$ برقرار است. یک ریشه‌ی این معادله کدام است؟

تست

۱۳

(۱) $-\frac{c}{2a}$ (۲) $\frac{c}{2a}$ (۳) $\frac{c}{a}$ (۴) $-\frac{c}{a}$

حل: گزینه‌ی ۴ صحیح است.

راه‌حل اول: اگر $x_1 = -2$ را در معادله جایگزین کنیم داریم:

پس -۲ یک ریشه‌ی معادله است. از آنجایی که حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $\frac{2c}{a}$ است، پس:

$$(-2)x_2 = \frac{2c}{a} \Rightarrow x_2 = -\frac{c}{a}$$

راه‌حل دوم: در معادله‌ی داده شده به جای b عبارت $2a + c$ را جایگزین می‌کنیم (دقت کنید $2a - b + c = 0$ است)، بنابراین:

$$ax^2 + (2a + c)x + 2c = 0 \Rightarrow ax^2 + 2ax + cx + 2c = 0 \Rightarrow ax(x + 2) + c(x + 2) = 0 \Rightarrow (x + 2)(ax + c) = 0 \Rightarrow x = -2, -\frac{c}{a}$$

← **تشکیل معادله‌ی درجه دوم:** برای آن که معادله‌ی درجه دومی بنویسیم که ریشه‌های آن α و β باشند، ابتدا $s = \alpha + \beta$ و $p = \alpha\beta$ را محاسبه می‌کنیم و سپس در معادله‌ی زیر جایگزین می‌کنیم:

$$x^2 - sx + p = 0$$

معادله‌ی درجه دومی که ریشه‌های آن α و β است را به صورت مقابل نیز می‌توانیم بنویسیم: $a(x - \alpha)(x - \beta) = 0$

نکته ۷:

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x - 2 = 0$ باشند، ریشه‌های کدام معادله‌ی زیر $1 + \frac{2}{\alpha}$ و $1 + \frac{2}{\beta}$ است؟

تست

۱۴

(۱) $x^2 + x - 4 = 0$ (۲) $x^2 - x - 4 = 0$ (۳) $x^2 - 4x - 1 = 0$ (۴) $x^2 + x - 3 = 0$

حل: گزینه‌ی ۱ صحیح است.

راه‌حل اول: با توجه به معادله‌ی داده شده روابط $\alpha + \beta = 3$ و $\alpha\beta = -2$ برقرار است. حاصل s و p را در معادله‌ی خواسته شده پیدا می‌کنیم:

$$s = \left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) + \left(1 + \frac{2}{\beta}\right) = 2 + \frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = 2 + \frac{2(3)}{-2} = -1$$

$$p = \left(1 + \frac{2}{\alpha}\right)\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) = 1 + \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} + \frac{4}{\alpha\beta} = 1 + \frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} + \frac{4}{\alpha\beta} = 1 + \frac{2 \times 3}{-2} + \frac{4}{-2} = -4$$

$$x^2 - sx + p = x^2 + x - 4 = 0$$

حال در عبارت $x^2 - sx + p = 0$ جایگزین می‌کنیم:

$$x = 1 + \frac{2}{\alpha} \Rightarrow x - 1 = \frac{2}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{x - 1}$$

راه‌حل دوم: ریشه‌ی معادله‌ی جدید را $x = 1 + \frac{2}{\alpha}$ فرض می‌کنیم.

در معادله‌ی داده شده α را جایگزین می‌کنیم، پس:

$$\alpha^2 - 3\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{2}{x-1}\right)^2 - 3\left(\frac{2}{x-1}\right) - 2 = 0 \Rightarrow \frac{4 - 6(x-1) - 2(x-1)^2}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow -2x^2 - 2x + 8 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 4 = 0$$



اگر $2\sqrt{2} + 3$ ریشه‌ی معادله‌ی $x^2 + ax + b = 0$ باشد به طوری که a و b دو عدد صحیح‌اند. حاصل $a+b$ کدام است؟

تست

۱۵

۵ (۴) ۷ (۳) -۵ (۲) -۷ (۱)

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است.

راه‌حل اول: برای آن که a و b صحیح باشند، ریشه‌ی دیگر باید $3 - 2\sqrt{2}$ باشد. بنابراین:

$$s = (3 + 2\sqrt{2}) + (3 - 2\sqrt{2}) = -a \Rightarrow a = -6$$

$$p = (3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = b \Rightarrow b = 1$$

پس $a+b = -5$ است.

راه‌حل دوم: فرض کنید $x = 2\sqrt{2} + 3$ ریشه‌ی معادله‌ی مورد نظر باشد، پس داریم:

$$x = 2\sqrt{2} + 3 \Rightarrow x - 3 = 2\sqrt{2} \xrightarrow{\text{به توان دو}} (x-3)^2 = (2\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$$

یعنی $a = -6$ و $b = 1$ و در نتیجه $a+b = -5$ است.

← معادلاتی که منجر به درجه ۲ می‌شوند: برخی از معادلات را می‌توان با یک تغییر متغیر مناسب، به معادله‌ی درجه دوم تبدیل کرد و پس از حل آن و با رجوع به تغییر متغیر، مقادیر مجهول معادله‌ی اولیه را یافت.

مجموع جواب‌های معادله‌ی $x^2 - 3x - 8 = 0$ کدام است؟

تست

۱۶

۸ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۶ (۱)

حل: گزینه‌ی ۱ صحیح است. با فرض $x^2 - 3x = t$ داریم:

$$(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) - 8 = 0 \Rightarrow t^2 - 2t - 8 = 0 \Rightarrow t = -2 \text{ یا } 4$$

$$\begin{cases} t = -2 \Rightarrow x^2 - 3x = -2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1, 2 \\ t = 4 \Rightarrow x^2 - 3x = 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1, 4 \end{cases}$$

حال جمع ریشه‌ها برابر ۶ است.

معادله‌ی $x^4 - mx^2 + 3 - m = 0$ چهار ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد. حدود m کدام است؟

تست

۱۷

$m < -6$ (۴) $0 < m < 3$ (۳) $2 < m < 3$ (۲) $m < -6$ یا $m > 2$ (۱)

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است. با فرض $x^2 = t$ به معادله $t^2 - mt + 3 - m = 0$ می‌رسیم، این معادله باید ۲ ریشه‌ی مثبت داشته باشد (به ازای هر یک از جواب‌های مثبت برای t ، برای x دو جواب به‌دست می‌آید) شرط داشتن دو ریشه‌ی مثبت آن است که $\Delta > 0$ ، $s > 0$ و $p > 0$ باشد.

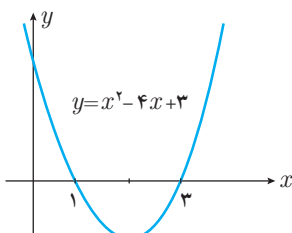
$$\Delta = m^2 - 4(3 - m) = m^2 + 4m - 12 \xrightarrow{\Delta > 0} m < -6 \text{ یا } m > 2$$

$$p = 3 - m \xrightarrow{p > 0} m < 3$$

$$s = m \xrightarrow{s > 0} m > 0$$

اشتراک سه شرط بالا به‌صورت $2 < m < 3$ است.

۳ صفرهای تابع



برای هر تابع f ، جواب‌های معادله‌ی $f(x) = 0$ را صفرهای تابع f می‌نامیم. صفرهای تابع f همان طول نقطه‌های تلاقی نمودار f با محور x هاست. به طور مثال نمودار تابع $f(x) = x^2 - 4x + 3$ به‌صورت مقابل است:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1, 3 \Rightarrow \text{۳ و ۱ صفرهای تابع } f \text{ هستند.}$$

نکته ۸:

اگر α یک صفر تابع $f(x)$ باشد آن‌گاه $f(x)$ به صورت مقابل تجزیه می‌شود: $f(x) = (x - \alpha)g(x)$

در حالت خاص اگر α و β صفرهای تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشند، آن‌گاه: $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$

اگر $x = -2$ یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + x - 6$ باشد، اختلاف سایر صفرهای این تابع چقدر است؟

تست

۱۸

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

حل: گزینه‌ی ۴ صحیح است. به ازای $x = -2$ مقدار f برابر صفر است.

$$\begin{array}{r} x^3 + 4x^2 + x - 6 \quad | \quad x + 2 \\ \underline{x^3 + 2x^2} \\ 2x^2 + x - 6 \\ \underline{2x^2 + 4x} \\ -3x - 6 \\ \underline{-3x - 6} \\ 0 \end{array}$$

$$f(-2) = 0 \Rightarrow -8 + 4a - 2 - 6 = 0 \Rightarrow a = 4$$

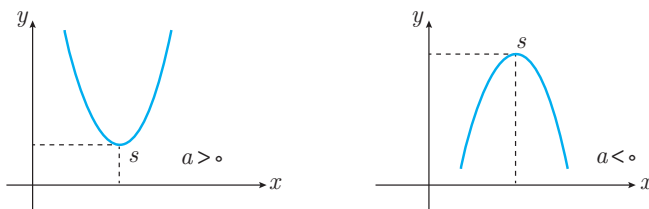
حال f را به عامل $x + 2$ تجزیه می‌کنیم. برای این کار کافی است $f(x)$ را بر $x + 2$ تقسیم کنیم.

$$f(x) = (x + 2)(x^2 + 2x - 3) = (x + 2)(x + 3)(x - 1)$$

بنابراین دو ریشه‌ی دیگر $x = 1$ و $x = -3$ است که ۴ واحد اختلاف دارند.

۴ رسم سهمی

نمودار $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ یک سهمی است که مختصات رأس آن عبارت است از $x_s = -\frac{b}{2a}$ و $y_s = -\frac{\Delta}{4a}$



تذکر

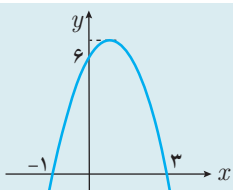
سهمی‌ها دارای خط تقارن به معادله‌ی $x = -\frac{b}{2a}$ هستند.

اگر $s(\alpha, \beta)$ رأس سهمی باشد، معادله‌ی آن به صورت مقابل است: $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$

نکته ۹:

اگر $x_1 = \alpha$ و $x_2 = \beta$ ریشه‌های یک سهمی باشند، معادله‌ی آن به صورت مقابل است: $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$

نکته ۱۰:



نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت مقابل است. عرض رأس سهمی چقدر است؟

تست

۱۹

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow 6 = a(-3)(1) \Rightarrow a = -2$$

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است. چون ۳ و -۱ صفرهای تابع‌اند، پس معادله را به صورت $y = a(x - 3)(x + 1)$ می‌نویسیم. نقطه $(0, 6)$ را در معادله صدق می‌دهیم.

پس معادله سهمی به صورت مقابل است:

$$y = -2(x - 3)(x + 1) = -2x^2 + 4x + 6$$

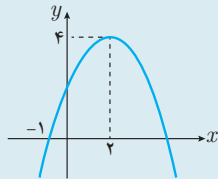
عرض رأس سهمی $y = -\frac{\Delta}{4a}$ است. لذا:

$$y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{16 - 4(-2)(6)}{4(-2)} = 8$$

البته طول رأس سهمی وسط ریشه‌هاست، $x = \frac{3-1}{2} = 1$. حال $x = 1$ را در معادله‌ی سهمی جایگزین می‌کنیم، بنابراین عرض رأس سهمی به دست می‌آید.

$$y = -2(x - 3)(x + 1) \xrightarrow{x=1} y = 8$$





نمودار $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت مقابل است. مقدار $f(-4)$ کدام است؟

تست

۲۰

- (۱) -۱۲ (۲) -۱۰
 (۳) -۸ (۴) -۱۶

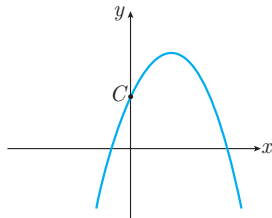
حل: گزینه ۱ صحیح است. رأس سهمی به صورت $s(۲, ۴)$ است، پس معادله‌ی سهمی به صورت $f(x) = a(x-۲)^2 + ۴$ است. کافی است $f(-۱) = ۰$ را آزمایش کنیم.

$$f(-۱) = ۰ \Rightarrow a \times ۹ + ۴ = ۰ \Rightarrow a = -\frac{۴}{۹} \Rightarrow f(x) = -\frac{۴}{۹}(x-۲)^2 + ۴ \Rightarrow f(-۴) = -\frac{۴}{۹}(-۶)^2 + ۴ = -۱۲$$

نکته !!

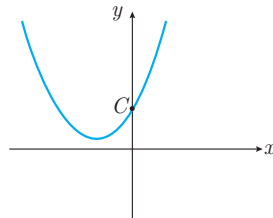
به کمک علامت s ، p و Δ و یا علامت a ، b و c می‌توان مشخص کرد که نمودار یک سهمی از چه ناحیه‌هایی عبور می‌کند.

به مثال‌های زیر توجه کنید:

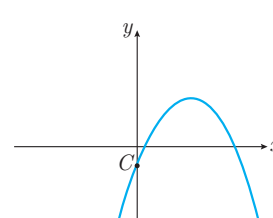


$$\Delta > ۰, s > ۰, p < ۰$$

$$(a < ۰, b > ۰, c > ۰)$$



$$\Delta < ۰, a > ۰, b > ۰, c > ۰$$



$$\Delta > ۰, s > ۰, p > ۰$$

$$(a < ۰, b > ۰, c < ۰)$$

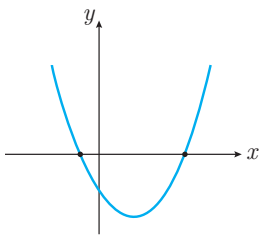
توجه داشته باشید که $f(۰) = c$ است، پس همان محل برخورد منحنی با محور y هاست.

نمودار سهمی $y = ۲x^2 + mx - ۳ + m$ از هر چهار ناحیه‌ی مختصات عبور می‌کند. حدود m کدام است؟

تست

۲۱

- (۱) $m > ۳$ (۲) $۰ < m < ۳$ (۳) $m < ۳$ (۴) $-۳ < m < ۳$



حل: گزینه ۳ صحیح است. کافی است تابع دارای دو صفر مختلف‌العلامت باشد:

پس حاصل ضرب ریشه‌ها منفی است.

$$p = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-۳+m}{۲} < ۰ \Rightarrow m < ۳$$

دقت کنید وقتی $p < ۰$ است خود به خود، Δ مثبت است.

← **یافتن ماکزیمم و مینیمم درجه ۲:** عرض رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ در واقع همان ماکزیمم و یا می‌نیمم مقدار y است. (که در واقع برد این تابع را نیز تعیین می‌کند).

مثال ۲

بیش‌ترین مقدار مساحت مستطیلی را بیابید که بین طول و عرض آن رابطه‌ی $۲x + y = ۱۲$ برقرار باشد.

حل: مساحت مستطیل برابر $s = xy$ است. به جای y مساوی آن یعنی $۱۲ - ۲x$ را جایگزین می‌کنیم.

$$s = xy = x(۱۲ - ۲x) = -۲x^2 + ۱۲x$$

$$\max s = -\frac{\Delta}{۴a} = -\frac{۱۴۴ - ۴(-۲)(۰)}{۴(-۲)} = ۱۸$$

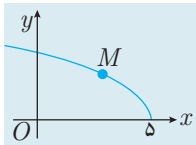
راه‌حل اول: بیش‌ترین مقدار یک عبارت درجه دوم از رابطه‌ی $-\frac{\Delta}{۴a}$ به دست می‌آید.

$$s = -۲x^2 + ۱۲x = -۲(x-۳)^2 + ۱۸$$

راه‌حل دوم: عبارت را به صورت مربع کامل می‌نویسیم:

پس حداکثر s برابر ۱۸ است.





در شکل مقابل نقطه‌ی M روی منحنی $y = \sqrt{10 - 2x}$ در ناحیه‌ی اول قرار دارد. حداقل OM چقدر است؟

تست

۲۲

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) $\sqrt{10}$

حل: گزینه‌ی ۳ صحیح است. نقطه‌ی $M(x, \sqrt{10 - 2x})$ را در نظر بگیرید.

$$OM = \sqrt{x^2 + (\sqrt{10 - 2x})^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 10} = \sqrt{(x - 1)^2 + 9}$$

حداقل $(x - 1)^2$ برابر صفر است، پس حداقل OM برابر $\sqrt{9}$ یعنی برابر ۳ است.

۵ معادلات گویا و گنگ

↔ معادلات شامل عبارات گویا: برای حل معادلات شامل عبارات گویا، با مخرج مشترک گرفتن و سپس طرفین و وسطین کردن دو طرف معادله و ساده کردن عبارت جبری به‌دست آمده، معادله را حل می‌کنیم. جواب به‌دست آمده نباید مخرج هیچ یک از کسرها را صفر کند.

معادله‌ی $\frac{3}{x} + \frac{2}{x-2} = \frac{4x-12}{x^2-4x}$ چند جواب دارد؟

تست

۲۳

- هیچ (۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴)

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است. مخرج مشترک می‌گیریم سپس طرفین وسطین می‌کنیم.

$$\frac{3(x-2) + 2x}{x(x-2)} = \frac{4x-12}{x(x-4)} \Rightarrow \frac{5x-6}{x-2} = \frac{4x-12}{x-4} \Rightarrow (5x-6)(x-4) = (x-2)(4x-12)$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 26x + 24 = 4x^2 - 20x + 24 \Rightarrow x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 6$$

جواب $x = 0$ قابل قبول نیست.

۲۰۰ کیلوگرم محلول آب نمک با غلظت ۷ درصد داریم. ۴۸ کیلوگرم آب و n کیلوگرم نمک به این محلول اضافه می‌کنیم تا غلظت آن ۱۰ درصد گردد. مقدار n کدام است؟

تست

۲۴

- ۶ (۱) ۱۲ (۲) ۸ (۳) ۴ (۴)

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است. در محلول اولیه $200 \times \frac{7}{100} = 14$ کیلوگرم نمک وجود دارد. در محلول ثانویه وزن کل محلول $200 + 48 + n$ و وزن

نمک آن $14 + n$ است. پس غلظت محلول جدید برابر $\frac{14+n}{248+n}$ است که باید برابر ۱۰ درصد باشد.

$$\frac{14+n}{248+n} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} \Rightarrow 140 + 10n = 248 + n \Rightarrow 9n = 108 \Rightarrow n = 12$$

علی و محسن کاری را با هم در ۱۸ ساعت تمام می‌کنند. ولی اگر هر کدام به تنهایی کار کنند، زمان اتمام کار علی $\frac{1}{5}$ برابر زمان اتمام کار محسن است. محسن به تنهایی در چند ساعت کار را تمام می‌کند؟

تست

۲۵

- ۲۴ (۱) ۳۰ (۲) ۳۶ (۳) ۴۵ (۴)

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است. اگر محسن در x ساعت کار را تمام کند، علی در $\frac{1}{5}x$ ساعت کار را تمام می‌کند. در یک ساعت، محسن $\frac{1}{x}$ و علی

$\frac{1}{\frac{1}{5}x}$ کار را انجام می‌دهند. جمع این دو مقدار باید برابر $\frac{1}{18}$ باشد.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{1}{5}x} = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{1/5 + 1}{1/5x} = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{25}{15x} = \frac{1}{18} \Rightarrow x = 30$$

← **نسبت طلایی:** در یک مستطیل به طول L و عرض w اگر نسبت $\frac{L}{w} = \frac{w+L}{L}$ برقرار باشد، گوییم در این مثلث نسبت طلایی برقرار است. در واقع داریم:

$$\frac{L}{w} = \frac{w+L}{L} = \frac{w}{L} + 1 \xrightarrow{\frac{L}{w}=t} t = \frac{1}{t} + 1 \Rightarrow t = \frac{1+t}{t} \Rightarrow t^2 = 1+t \Rightarrow t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

در چنین مستطیلی نسبت طول به عرض برابر $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است.

در مستطیلی با محیط $6+2\sqrt{5}$ ، نسبت طول به عرض متناسب با نسبت طلایی است. عرض این مستطیل چقدر است؟

تست

۲۶

- (۱) $2\sqrt{5}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (۴) ۴

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است. اگر عرض مستطیل را x فرض کنیم، طول آن برابر $\frac{1+\sqrt{5}}{2}x$ است.

$$\text{محیط} = 2\left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right) = (3+\sqrt{5})x = 6+2\sqrt{5} \Rightarrow x = 2$$

← **معادلات شامل عبارات گنگ:** برای حل معادلات شامل عبارات رادیکالی، با به توان رساندن طرفین معادله (و در صورت لزوم تکرار این عمل) و ساده کردن، به معادله‌ای بدون رادیکال می‌رسیم که آن را حل می‌کنیم. جواب‌های به‌دست آمده باید در معادله‌ی اصلی آزمایش شوند. دقت کنید زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج نباید منفی باشد، همچنین اگر خواستید دو طرف یک معادله را به توان زوج برسانید شرط هم‌علامت بودن دو طرف تساوی را بررسی کنید.

نزدیک‌ترین عدد صحیح به جواب معادله‌ی $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-2} = \sqrt{3x+3}$ کدام است؟

تست

۲۷

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است. دو طرف تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(x+1) + (2x-2) + 2\sqrt{x+1}\sqrt{2x-2} = 3x+3 \Rightarrow 2x-1 + 2\sqrt{2x^2-2} = 3x+3 \Rightarrow \sqrt{2x^2-2} = 2$$

$$2x^2 - 2 = 4 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}$$

مجدداً دو طرف تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

جواب $x = -\sqrt{3}$ قابل قبول نیست چون زیر رادیکال در معادله‌ی اصلی منفی می‌شود. نزدیک‌ترین عدد به $\sqrt{3}$ همان ۲ است.

حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی $11 = x^2 - 3x + \sqrt{x^2 - 3x - 9}$ چقدر است؟

تست

۲۸

- (۱) -۳ (۲) ۳ (۳) ۱۰ (۴) -۱۰

حل: گزینه‌ی ۴ صحیح است. فرض کنید $t = x^2 - 3x - 9$ در این صورت $x^2 - 3x = t + 9$ داریم:

$$t + 9 + \sqrt{t} = 11 \Rightarrow \sqrt{t} = 2 - t \xrightarrow{\text{به توان دو}} t = 4 - 4t + t^2 \Rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ یا } 4$$

جواب $t = 4$ قابل قبول نیست چون سمت راست معادله $\sqrt{t} = 2 - t$ منفی می‌شود.

$$t = 1 \Rightarrow x^2 - 3x - 9 = 1 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -10$$

در عبارات گنگ شامل $\sqrt{f(x)}$ دقت کنید که هم $f(x)$ و هم $\sqrt{f(x)}$ هیچ‌کدام منفی نیستند.

نگه ۱۲

معادله‌ی $\sqrt{x^2 - x - 2} + \sqrt{x^2 + ax + a} = 0$ جواب دارد. مقدار a کدام است؟

تست

۲۹

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{3}{4}$ (۳) $-\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$



حل: گزینه‌ی ۳ صحیح است. حاصل جمع دو عبارت نامنفی هرگز صفر نمی‌شود مگر آن که هر دو صفر باشند.

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - x - 2} = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ یا } 2 \\ \sqrt{x^2 + ax + a} = 0 \Rightarrow x^2 + ax + a = 0 \quad (2) \end{cases}$$

جواب‌های معادله اول را در معادله‌ی دوم آزمایش می‌کنیم.

$$x^2 + ax + a = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow 4 + 2a + a = 0 \Rightarrow a = -\frac{4}{3} \\ x = -1 \Rightarrow 1 - a + a = 0 \Rightarrow 1 = 0 \text{ تناقض} \end{cases}$$

۶ روش هندسی حل معادلات

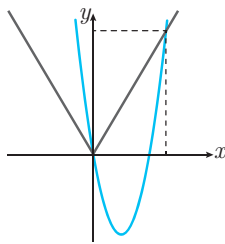
اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، جواب‌های معادله‌ی $f(x) = g(x)$ همان طول نقاط تلاقی نمودارهای این دو تابع است و برعکس. بنابراین یکی از راه‌های یافتن تعداد جواب‌ها و یا مقدار تقریبی ریشه‌های معادله‌ی $f(x) = g(x)$ آن است که نمودار این دو تابع را رسم کنیم و نقاط تقاطع آن‌ها را پیدا کنیم. به این روش حل معادله، روش هندسی یا نموداری حل معادله می‌گویند.

معادله‌ی $\frac{|x|}{x-3} = x$ چند جواب دارد؟

تست

۳۰

(۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار



حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است. با فرض $x \neq 3$ طرفین وسطین می‌کنیم به معادله‌ی $|x| = x^2 - 3x$ می‌رسیم حال نمودار دو تابع $y = |x|$ و $y = x^2 - 3x$ را رسم می‌کنیم. نمودار این دو تابع در نقاط $x = 4$ و $x = 0$ متقاطع‌اند.

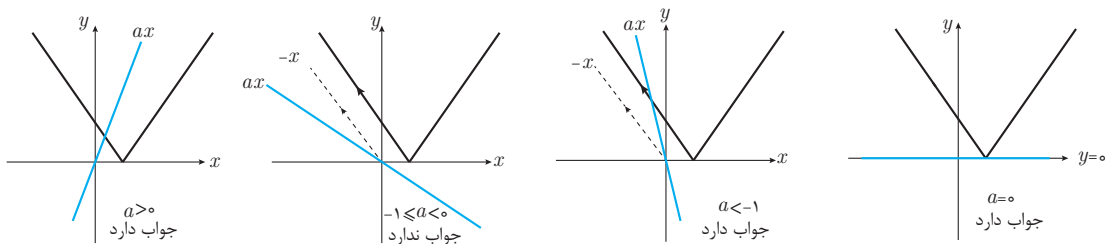
معادله‌ی $ax - |x - 2| = 0$ جواب ندارد. حدود a کدام است؟

تست

۳۱

(۱) $0 < a < 1$ (۲) $-1 \leq a < 0$ (۳) $a > 1$ (۴) $a \leq -1$

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است. معادله را به صورت $ax = |x - 2|$ می‌نویسیم و سپس نمودار دو تابع $y = |x - 2|$ و $y = ax$ را رسم می‌کنیم.



فقط در حالت $-1 \leq a < 0$ جواب ندارد.

۷ قدرمطلق و ویژگی‌های آن

تعریف: قدرمطلق a به دو صورت زیر تعریف می‌شود:

۱ $|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$

۲ $|a| = \sqrt{a^2}$

در واقع $|a|$ همان فاصله‌ی نقطه‌ای به طول a از مبدأ، بر روی محور اعداد حقیقی است.



تست

۳۲

با فرض $-2 < x < 1$ ، حاصل $P = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + 3\sqrt{x^2 + 4x + 4}$ در چه محدوده‌ای قرار دارد؟

- (۱) $3 < p < 9$ (۲) $3 < p < 6$ (۳) $2 < p < 6$ (۴) $2 < p < 9$

$$p = \sqrt{(x-1)^2} + 3\sqrt{(x+2)^2} = |x-1| + 3|x+2|$$

حل: گزینه‌ی ۱ صحیح است. زیر رادیکال‌ها را مربع کامل می‌کنیم:

$$p = -(x-1) + 3(x+2) = 2x+7$$

چون $-2 < x < 1$ ، پس $x+2$ مثبت و $x-1$ منفی است.

$$-2 < x < 1 \Rightarrow -4 < 2x < 2 \Rightarrow 3 < 2x+7 < 9 \Rightarrow 3 < p < 9$$

با توجه به محدوده‌ی x داریم:

◀ ویژگی‌های قدرمطلق: برخی از ویژگی‌های قدرمطلق به صورت زیر است:

۱) $|x| \geq 0$

۲) $|x| = a \Rightarrow x = \pm a \quad (a \geq 0)$

۳) $|x| = |-x|$

۴) $|x| = |a| \Rightarrow x = \pm a$

۵) $|xy| = |x| |y|$

۶) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0)$

۷) $|x^2| = |x|^2 = x^2$

۸) $|x| < a \Rightarrow -a < x < a \quad (a > 0)$

۹) $|x| > a \Rightarrow x < -a$ یا $x > a$

۱۰) $-|x| \leq x \leq |x|$

۱۱) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (نامساوی مثلثی)

۱۲) $|x-y| \geq ||x| - |y||$

تست

۳۳

اگر $|a| < |b|$ و $a < 0$ ، آن‌گاه حاصل $p = |a-b| + |a+b| + |a|$ کدام است؟

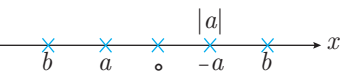
- (۱) $-a-2b$ (۲) $2b$ (۳) a (۴) $3a$

$$|a| < |b| \xrightarrow{a < 0} -a < |b| \Rightarrow b < a \text{ یا } b > -a$$

حل: گزینه‌ی ۳ صحیح است. با توجه به ویژگی شماره ۹ داریم:

البته اگر جایگاه اعداد را روی محور تعیین کنیم، روابط بالا شهودی‌تر به دست می‌آیند.

۱۳



$$p = |a-b| + |a+b| + |a| = a-b+a+b-a = a$$

پس $a-b$ مثبت و $a+b$ نیز مثبت است.

نکته ۳۳

از نامساوی مثلثی می‌توان دو نتیجه گرفت:

۱) مختلف‌العلامت $a, b \Leftrightarrow |a+b| < |a| + |b|$

۲) هم‌علامت یا صفر $a, b \Leftrightarrow |a+b| = |a| + |b|$

تست

۳۴

تمام اعداد بازه‌ی $[a, b]$ در تساوی $|2x-5| + |2-x| = |3-x|$ صدق می‌کنند. حداکثر $b-a$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۲

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است. اگر سمت راست را به صورت $|x-3|$ بنویسیم، آن‌گاه با توجه به نکته‌ی بالا باید $2x-5$ و $2-x$ هم علامت یا صفر باشند.

$$\left| \frac{2x-5}{a} \right| + \left| \frac{2-x}{b} \right| = \left| \frac{x-3}{a+b} \right| \Rightarrow (2x-5)(2-x) \geq 0 \Rightarrow 2 \leq x \leq \frac{5}{2}$$

پس $b = \frac{5}{2}$ و $a = 2$ و $b-a = \frac{1}{2}$ است.

◀ معادلات قدرمطلق: برای حل معادلات شامل عبارت قدرمطلق از ویژگی‌های قدرمطلق استفاده می‌کنیم. دو ویژگی که در حل معادلات کاربرد فراوان دارند عبارتند از:

۱) $|f(x)| = |g(x)| \Rightarrow f(x) = \pm g(x)$

۲) $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$





تست

مجموع ریشه‌های معادله‌ی $(x-1)^2 - 5|x-1| + 6 = 0$ کدام است؟

۳۵

۵ (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) ۴ (۴)

حل: گزینه‌ی ۴ صحیح است. فرض کنید $t = |x-1|$ ، در این صورت معادله به صورت $t^2 - 5t + 6 = 0$ در خواهد آمد.

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \Rightarrow |x-1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 2 \Rightarrow x = 3 \\ x-1 = -2 \Rightarrow x = -1 \end{cases} \\ t = 3 \Rightarrow |x-1| = 3 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 3 \Rightarrow x = 4 \\ x-1 = -3 \Rightarrow x = -2 \end{cases} \end{cases}$$

حاصل جمع جواب‌ها برابر ۴ است.

تست

معادله‌ی $|2x-4| + x = k$ جواب ندارد. حدود k کدام است؟

۳۶

۱) $k < 4$ ۲) $k > 2$ ۳) $k < 2$ ۴) $k > 4$

حل: گزینه‌ی ۳ صحیح است. قدرمطلق را دو حالت می‌گیریم. در هر دو حالت، جواب به دست آمده باید غیرقابل قبول باشد.

۱) $x \geq 2 \Rightarrow 2x - 4 + x = k \Rightarrow x = \frac{k+4}{3} \Rightarrow$ شرط غیرقابل قبول بودن: $\frac{k+4}{3} < 2 \Rightarrow k < 2$

۲) $x < 2 \Rightarrow -(2x - 4) + x = k \Rightarrow x = 4 - k \Rightarrow$ شرط غیرقابل قبول بودن: $4 - k \geq 2 \Rightarrow k \leq 2$

از اشتراک دو نامساوی بالا به رابطه‌ی $k < 2$ می‌رسیم.

◀ **نامعادلات قدرمطلق:** برای حل نامعادلات شامل عبارات قدرمطلق از ویژگی‌های زیر استفاده می‌کنیم.

- ① $|x| < |a| \Leftrightarrow x^2 < a^2$
- ② $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$
- ③ $|x| > a \Rightarrow x < -a$ یا $x > a$
- ④ $|a+b| \leq |a| + |b|$

تذکر

به شرطی می‌توان دو طرف نامساوی را به توان زوج رساند که هر دو طرف مثبت باشند.

تست

مجموعه جواب نامعادله‌ی $|2x+1| < x+3$ به صورت بازه‌ی (a, b) است. $a+b$ کدام است؟

۳۷

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است.

راه‌حل اول: چون قدرمطلق مثبت (یا صفر) است پس $x+1$ حتماً مثبت است و می‌توانیم دو طرف نامساوی را به توان ۲ برسانیم.

$$|2x+1|^2 < (x+3)^2 \Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 < x^2 + 6x + 9 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 8 < 0 \Rightarrow (x-2)(3x+4) < 0 \Rightarrow -\frac{4}{3} < x < 2$$

پس: $a+b = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

راه‌حل دوم: طبق قاعده‌ی $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$ داریم:

$$|2x+1| < x+3 \Rightarrow -(x+3) < 2x+1 < x+3 \Rightarrow \begin{cases} -x-3 < 2x+1 \\ 2x+1 < x+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3} < x \\ x < 2 \end{cases} \Rightarrow -\frac{4}{3} < x < 2$$

تست

مجموعه جواب نامعادلات $x^2 + ax + b < 0$ و $|x-2| < 3$ یکسان است. حاصل $a+b$ کدام است؟

۳۸

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۹ ۴) -۹

حل: گزینه ۴ صحیح است. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + ax + b = 0$ باشند آن‌گاه جواب نامعادله‌ی $x^2 + ax + b < 0$ به صورت $\alpha < x < \beta$ است. از طرفی داریم:

$$|x - 2| < 3 \Rightarrow -3 < x - 2 < 3 \Rightarrow -1 < x < 5$$

پس -۱ و ۵ همان ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $x^2 + ax + b = 0$ هستند.

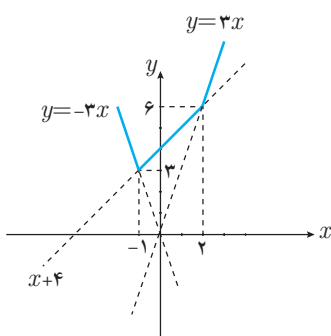
$$\begin{cases} x = -1 \Rightarrow 1 - a + b = 0 \\ x = 5 \Rightarrow 25 + 5a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -5 \end{cases} \Rightarrow a + b = -9$$

← **رسم توابع قدرمطلق:** در حالت کلی برای رسم یک تابع قدرمطلق، ابتدا عبارات داخل قدرمطلق‌ها را تعیین علامت می‌کنیم و پس از مشخص شدن علامت آن‌ها، قدرمطلق را حذف می‌کنیم و تابع حاصل که شامل قدرمطلق نیست را رسم می‌کنیم.

مثال ۳

نمودار تابع $f(x) = |x - 2| + 2|x + 1|$ را رسم کنید.

حل: ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها، $x = 2$ و $x = -1$ هستند. با توجه به علامت داخل قدرمطلق‌ها داریم:



x	-۱	۲
$x+1$	$-(x+1)$	$x+1$
$x-2$	$-(x-2)$	$x-2$
$f(x)$	$-3x$	$x+4$
		$3x$

پس $f(x)$ یک تابع سه ضابطه‌ای است.

$$f(x) = \begin{cases} -3x & x < -1 \\ x+4 & -1 \leq x \leq 2 \\ 3x & x > 2 \end{cases}$$

نمودار تابع $y = |x|(x-2)$ کدام خط زیر را دو بار قطع می‌کند؟

تست

$y = -2$ (۴)

$y = 2$ (۳)

$y = -1$ (۲)

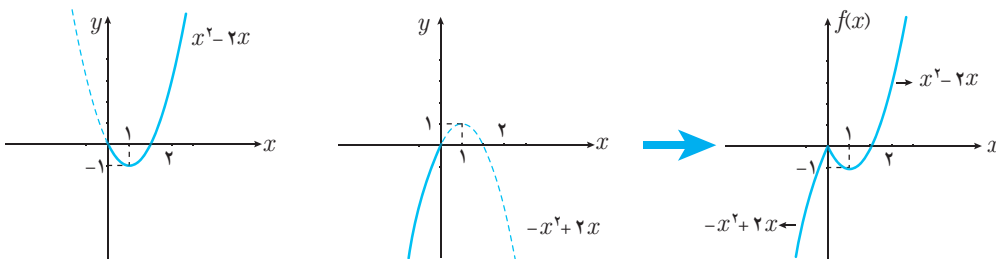
$y = 1$ (۱)

۳۹

حل: گزینه ۲ صحیح است. برای قدرمطلق دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow y = x(x-2) = x^2 - 2x \\ x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow y = -x(x-2) = -x^2 + 2x \end{cases}$$

حال دو سهمی را رسم می‌کنیم. دقت کنید $x = 1$ طول رأس هر دو سهمی است. همچنین $x = 2$ و $x = 0$ ریشه‌ی هر دو است.



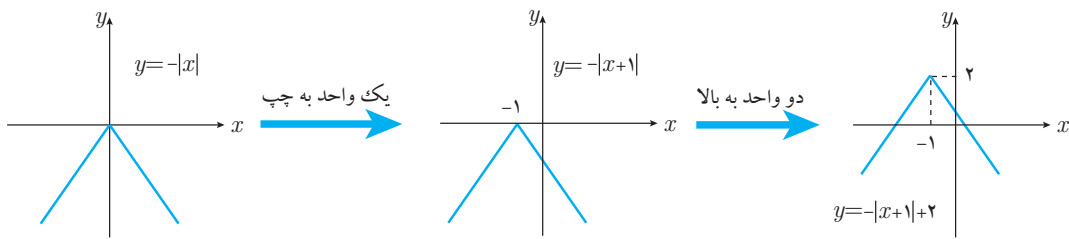
خط $y = -1$ که از رأس سهمی در $f(x)$ عبور می‌کند، نمودار f را دو بار قطع می‌کند.

برای رسم تابع $y = |x + a| + b$ از انتقال $|x|$ استفاده می‌کنیم.

نکته ۴



به طور مثال نمودار $y = 2 - |x + 1|$ به صورت زیر رسم می‌شود.



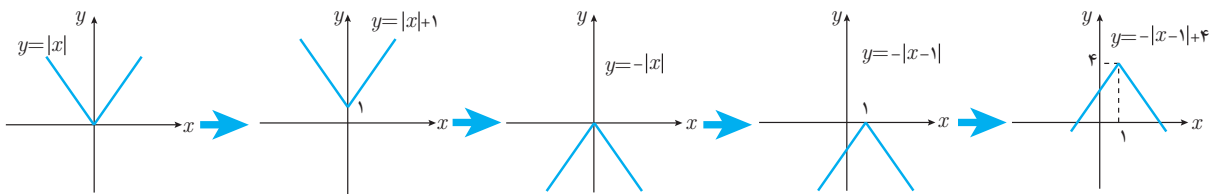
مساحت محدود به نمودار توابع $f(x) = |x| + 1$ و $g(x) = 4 - |x - 1|$ چقدر است؟

- (۱) ۶
 (۲) ۲
 (۳) ۸
 (۴) ۴

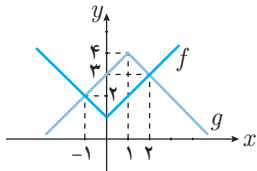
تست

۴۰

حل: گزینه‌ی ۴ صحیح است. نمودار توابع f و g را به کمک انتقال رسم می‌کنیم.



مساحت مستطیل حاصل را به دست می‌آوریم:

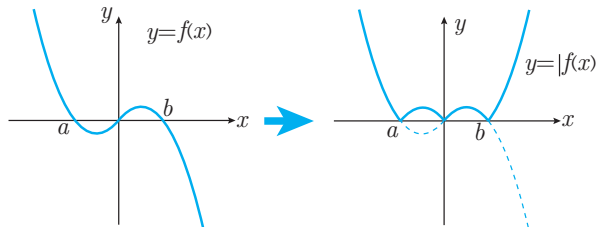


$$\begin{cases} \text{طول مستطیل} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} \\ \text{عرض مستطیل} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \text{مساحت} = \sqrt{8} \times \sqrt{2} = 4$$

برای رسم تابع $y = |f(x)|$ ، ابتدا نمودار f را رسم می‌کنیم سپس بخشی از منحنی f که زیر محور x هاست، را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

نکته ۵:

۱۶



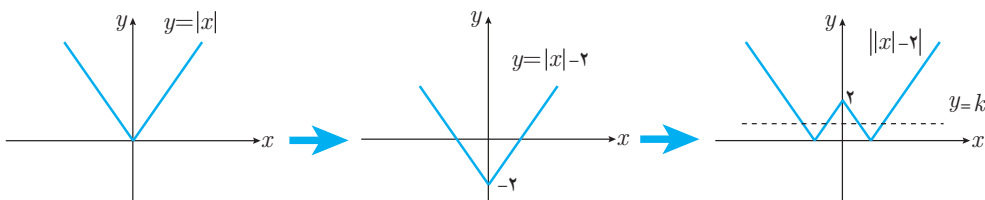
معادله $||x| - 2| = k$ چهار جواب دارد، حدود k کدام است؟

- (۱) $k > 2$
 (۲) $0 < k < 2$
 (۳) $k > 0$
 (۴) $k > 4$

تست

۴۱

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است. نمودار توابع $f(x) = ||x| - 2|$ و $g(x) = k$ را رسم می‌کنیم. باید چهار نقطه‌ی تقاطع داشته باشند.

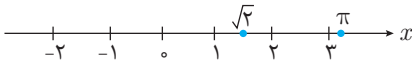


طبق نمودار می‌بایست $0 < k < 2$ باشد.

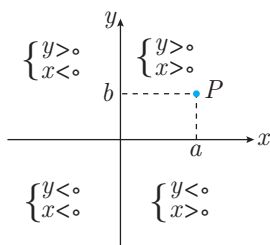


آشنایی با هندسه‌ی تحلیلی

محور اعداد: هر عدد حقیقی، متناظر نقطه‌ای بر محور اعداد حقیقی است و برعکس.



فاصله‌ی بین دو نقطه روی محور: اگر طول نقاط متناظر با A و B روی محور اعداد را به ترتیب با x_A و x_B نشان دهیم، در این صورت فاصله‌ی بین A و B برابر است با:



$$|AB| = |x_B - x_A|$$

محورهای مختصات: محورهای مختصات صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که هر ناحیه یک ربع نامیده می‌شود. (نقاط روی محورها در هیچ ربعی نیستند) هر نقطه بر صفحه‌ی مختصات مانند $p(a, b)$ را در نظر بگیرید، آن‌گاه $a = x_p$ و $b = y_p$ است.

فاصله‌ی بین دو نقطه: فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

در حالت خاص، فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x, y)$ از مبدأ برابر است با: $\sqrt{x^2 + y^2}$

تست اگر $A(1, 2)$ و $B(4, a)$ و $C(a, 6)$ سه رأس مثلث متساوی‌الساقین به رأس A باشند، آن‌گاه مقدار a کدام است؟

تست ۴۲

حل: گزینه‌ی ۱ صحیح است. برابری دو ضلع AB و AC را بررسی می‌کنیم:

$$AB = AC \Rightarrow \sqrt{(a-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{(6-2)^2 + (a-1)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 - 4a + 13} = \sqrt{a^2 - 2a + 17} \Rightarrow a^2 - 4a + 13 = a^2 - 2a + 17 \Rightarrow a = -2$$

۱۷

تست اگر $M(2, 3)$ و $N(-2, -1)$ دو رأس یک مربع باشند، مساحت آن چقدر است؟

تست ۴۳

حل: گزینه‌ی ۳ صحیح است. مساحت یک مربع به ضلع a برابر a^2 و به قطر d برابر $\frac{1}{2}d^2$ است. طول MN یا با ضلع مربع برابر است یا با قطر مربع.

$$MN = \sqrt{(3+1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{32} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{32} \Rightarrow s = a^2 = 32 \\ d = \sqrt{32} \Rightarrow s = \frac{1}{2}d^2 = 16 \end{cases}$$

مختصات نقطه‌ی وسط یک پاره‌خط: اگر نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB باشد، آن‌گاه مختصات M از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

تست سه نقطه‌ی $A(-1, 3)$ و $B(2, 4)$ و $C(0, 0)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر M و N به ترتیب وسط AB و AC باشند، طول MN چقدر است؟

تست ۴۴

حل: گزینه‌ی ۴ صحیح است.

راه‌حل اول: مختصات وسط اضلاع را به دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \begin{cases} x_N = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-1}{2} \\ y_N = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow N = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$MN = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{5}$$

پس طول MN برابر است با:

$$MN = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{(2-0)^2 + (4-0)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{20} = \sqrt{5}$$

راه‌حل دوم: طول MN برابر نصف طول BC است.

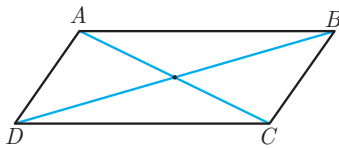
تست اگر $A(2, 3)$ ، $B(-1, 5)$ و $C(3, -1)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشند، مجموع مختصات رأس D کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

تست

۴۵

حل: گزینه‌ی ۳ صحیح است. در متوازی‌الاضلاع، وسط قطرها بر هم منطبق است، پس:

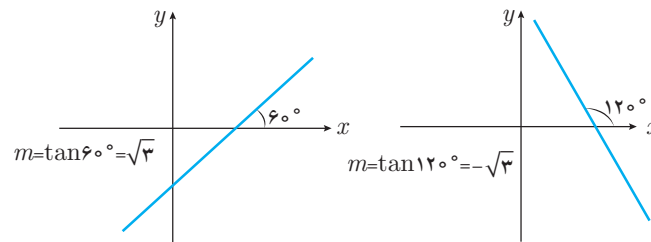


$$\frac{A+C}{2} = \frac{B+D}{2} \Rightarrow A+C = B+D \Rightarrow (2, 3) + (3, -1) = (-1, 5) + D$$

$$\Rightarrow (5, 2) - (-1, 5) = D \Rightarrow D = (6, -3)$$

پس مجموع مختصات D برابر ۳ است.

شیب خط: تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x می‌سازد شیب آن خط است.



شیب خطی که از دو نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ می‌گذرد، برابر است با $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

نکته ۱۶

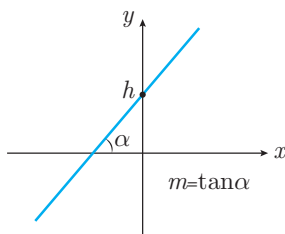
شیب خط افقی $y=b$ برابر صفر است. شیب خط قائم $x=a$ را اصطلاحاً بی‌نهایت گوئیم.

تذکر

معادله خط: معادله خط در دو حالت نوشته می‌شود:

حالت اول: معادله خطی با شیب m و عرض از مبدأ h به صورت $y = mx + h$ است.

حالت دوم: معادله خطی که از دو نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ می‌گذرد، به صورت زیر است:



$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$\underbrace{x_2 - x_1}_m$

در حالت کلی معادله‌ی خط به صورت $ax + by = c$ است که شیب آن برابر $-\frac{a}{b}$ است. ($b \neq 0$)

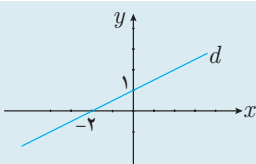
تذکر

خط d مطابق شکل، مقابل از کدام نقطه‌ی زیر عبور می‌کند؟

- (۱) $(4, 2)$ (۲) $(4, 3)$ (۳) $(-4, -3)$ (۴) $(-4, -2)$

تست

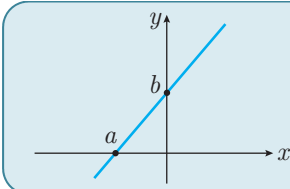
۴۶



حل: گزینه ۲ صحیح است. شیب خط d که از دو نقطه‌ی $(-۲, ۰)$ و $(۰, ۱)$ عبور می‌کند، برابر $m = \frac{۰-۱}{-۲-۰} = \frac{۱}{۲}$ است (البته از راه تانژانت هم می‌توانستیم m را بیابیم).

معادله‌ی خط $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$

پس این خط از نقطه‌ی $(۴, ۳)$ عبور می‌کند.



معادله‌ی خط مقابل به صورت $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ است.

نکته ۷:

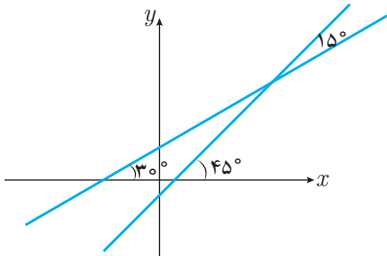
زاویه‌ی بین دو خط $y = x - 1$ و $\sqrt{3}y = x + 1$ چقدر است؟

تست

- (۱) ۱۵° (۲) ۷۵° (۳) ۳° (۴) $۲۲/۵^\circ$

۴۷

حل: گزینه ۱ صحیح است. تانژانت زاویه‌ی یک خط با جهت مثبت محور x ها همان شیب خط است.



$y = x - 1 \Rightarrow 1 = m = \tan \alpha \Rightarrow \alpha = 45^\circ$

$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = m = \tan \beta \Rightarrow \beta = 30^\circ$

پس زاویه‌ی بین دو خط، ۱۵° است.

خطوط عمود بر هم: خطوط d و d' با شیب‌های m و m' بر هم عمودند، هرگاه $mm' = -1$ و برعکس.

به بیان دیگر اگر شیب خطی m باشد، شیب خط عمود بر آن $\frac{-1}{m}$ است. ($m \neq 0$)

خطوط $ax + by = 3$ و $2x + y = 4$ در نقطه‌ی $A(1, 2)$ بر هم عمودند. مقدار $a + b$ کدام است؟

تست

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۸

حل: گزینه ۱ صحیح است. اولاً مختصات A در معادله‌ی خطوط باید صدق کند.

$ax + by = 3 \xrightarrow{x=1, y=2} a + 2b = 3$ (۱)

ثانیاً شیب خط اول برابر $m = -\frac{a}{b}$ و شیب خط دوم برابر $m' = -2$ است، پس:

$mm' = -1 \Rightarrow \frac{-a}{b}(-2) = -1 \Rightarrow b = -2a$ (۲)

از حل دستگاه $\begin{cases} a + 2b = 3 \\ b = -2a \end{cases}$ مقادیر $a = -1$ و $b = 2$ به دست می‌آید، پس $a + b = 1$ است.

معادله‌ی خط عمودمنصف پاره‌خط واصل دو نقطه‌ی $A(-1, 3)$ و $B(3, 5)$ کدام است؟

تست

- (۱) $x + 2y = 6$ (۲) $x + 2y = 9$ (۳) $y + 2x = 9$ (۴) $y + 2x = 6$

۴۹

حل: گزینه ۴ صحیح است.



راه‌حل اول: شیب خط AB برابر $m = \frac{3-5}{-1-3} = \frac{1}{2}$ است. پس شیب خط عمود بر AB برابر $m = -2$ است.

از طرفی عمودمنصف از وسط AB عبور می‌کند یعنی از نقطه‌ی $M = \frac{A+B}{2} = (1, 4)$ ، پس معادله‌ی عمودمنصف را می‌نویسیم.

$$y - 4 = -2(x - 1) \Rightarrow y + 2x = 6$$

راه‌حل دوم: اگر نقطه‌ی $p(x, y)$ روی عمودمنصف باشد، آن‌گاه:

$$PA = PB \Rightarrow \sqrt{(3-y)^2 + (-1-x)^2} = \sqrt{(5-y)^2 + (3-x)^2} \Rightarrow (3-y)^2 + (-1-x)^2 = (5-y)^2 + (3-x)^2$$

$$\Rightarrow 9 - 6y + y^2 + 1 + 2x + x^2 = 25 - 10y + y^2 + 9 - 6x + x^2 \Rightarrow 4y + 8x = 24 \Rightarrow y + 2x = 6$$

⇨ **خطوط موازی:** خطوط d و d' با شیب‌های m و m' وقتی موازی یکدیگرند که $m = m'$ باشد.

در حالت کلی دو خط $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ با فرض $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ موازی یکدیگرند.

فاصله‌ی دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از یکدیگر برابر است با: $\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

نکته ۸:

فاصله‌ی دو خط موازی $ax + 6y + 10 = 0$ و $4x - 3y + b = 0$ برابر ۲ است. مقدار b چقدر است؟

تست

(۱) ۱۰ یا ۵ (۲) ۵ یا ۱۵ (۳) ۵ یا ۱۰ (۴) ۱۰ یا ۱۵

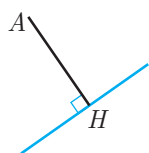
۵۰

حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است. دو خط وقتی موازی‌اند که $\frac{4}{a} = \frac{-3}{6}$ باشد پس $a = -8$ حال ضرایب دو خط را یکسان می‌کنیم:

$$\begin{cases} 4x - 3y + b = 0 \\ -8x + 6y + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 3y + b = 0 \\ 4x - 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{|b + 5|}{5} = 2 \Rightarrow |b + 5| = 10 \Rightarrow b = 5 \text{ یا } -15$$

فاصله‌ی دو خط برابر $\frac{|b - (-5)|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}$ است، پس:



⇨ **فاصله‌ی نقطه از خط:** فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

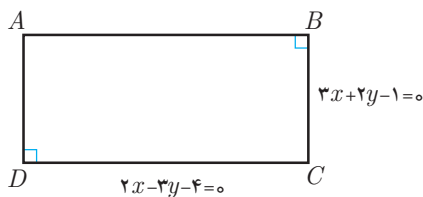
دو خط به معادلات $2x - 3y = 4$ و $3x + 2y = 1$ دو ضلع یک مستطیل و نقطه‌ی $A(2, 4)$ یک رأس آن است. مساحت مستطیل چقدر است؟

تست

(۱) ۲۶ (۲) ۲۴ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳

۵۱

حل: گزینه‌ی ۳ صحیح است. دو خط بر هم عمودند، پس دو ضلع مجاور از مستطیل هستند. نقطه A خارج از این دو ضلع است. فاصله‌ی A از دو خط، همان طول و عرض مستطیل است.



$$AB = BC \text{ از } A \text{ فاصله‌ی } = \frac{|3(2) + 2(4) - 1|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}}$$

$$AD = DC \text{ از } A \text{ فاصله‌ی } = \frac{|2(2) - 3(4) - 4|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{12}{\sqrt{13}}$$

$$\text{مساحت} = AB \times AD = \frac{13}{\sqrt{13}} \times \frac{12}{\sqrt{13}} = 12$$



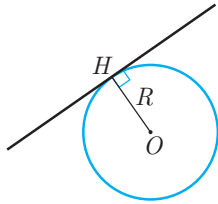
به ازای کدام مقدار m ، خط $3x - 4y = m$ بر دایره‌ی به مرکز $O(2, -1)$ و به شعاع $R = 3$ مماس است؟

تست

۲۵ یا -۵ (۱) ۱۵ یا -۵ (۳) -۱۵ یا ۵ (۲) ۲۵ یا -۵ (۴)

۵۲

حل: گزینه‌ی ۱ صحیح است. باید فاصله‌ی مرکز از خط برابر شعاع دایره باشد.



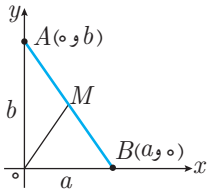
$$3x - 4y - m = 0$$

$$\text{فاصله‌ی } O \text{ از خط} = \frac{|3(2) - 4(-1) - m|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|10 - m|}{5} \Rightarrow OH = R \Rightarrow \frac{|10 - m|}{5} = 3$$

$$\Rightarrow |10 - m| = 15 \Rightarrow m = -5 \text{ یا } 25$$

↔ کاربرد هندسه‌ی تحلیلی در حل سؤالات هندسه: در بعضی از سؤالات هندسه می‌توانیم با انتخاب محورهای مختصات مناسب و اختصاص مختصات مناسب به نقاط، مسأله را به روش تحلیلی حل نمود.

به طور مثال برای اثبات این قضیه که «در مثلث قائم‌الزاویه، میانه‌ی وارد بر وتر، نصف وتر است» می‌توانیم مثلث را به صورت زیر روی محورهای مختصات بنا کنیم:



$$M = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

$$OM = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

↔ محاسبه طول میانه:

$$\begin{cases} A(0, b) \\ B(a, 0) \end{cases} \Rightarrow AB = \sqrt{a^2 + b^2}$$

↔ محاسبه طول وتر:

پس $OM = \frac{1}{2}AB$ و قضیه اثبات شد.

۲۱

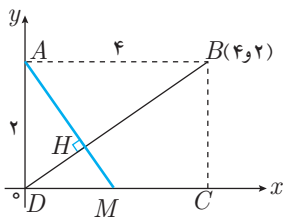
در مستطیل ABCD از A عمودی بر قطر BD رسم می‌کنیم تا DC را در M قطع کند. اگر $AD = 2$ و $AB = 4$ باشد، اندازه‌ی AM چقدر است؟

تست

۱) $\sqrt{6}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{5}$

۵۳

حل: گزینه‌ی ۴ صحیح است. محورها را به صورت زیر در نظر می‌گیریم. شیب AH عکس و قرینه‌ی شیب BD است.



$$M_{BD} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow M_{AH} = -2$$

$$AH \text{ خط معادله‌ی } y - y_A = -2(x - x_A)$$

$$y - 2 = -2x \xrightarrow{y=0} x_M = 1$$

حال طول AM را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} A(0, 2) \\ M(1, 0) \end{cases} \Rightarrow AM = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$



◀ دنباله‌های حسابی و هندسی

۱- جمله بیستم دنباله‌ی حسابی $2, a, b, 11, \dots$ کدام است؟

- (۱) ۵۹ (۲) ۶۰ (۳) ۶۱ (۴) ۶۲

۲- در یک دنباله‌ی حسابی جمله سوم برابر ۱۷ و جمله هفتم برابر ۴۹ است. جمله دهم این دنباله کدام است؟

- (۱) ۷۲ (۲) ۷۳ (۳) ۷۴ (۴) ۷۵

۳- در آرایش مقابل تعداد دایره‌های توخالی شکل پانزدهم کدام است؟

- (۱) ۸۴ (۲) ۸۵ (۳) ۱۱۲ (۴) ۱۱۳

۴- جملات دوم، پنجم و دهم یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب برابر $x-4, x-1, 2x-1$ و $4x+2$ است. مقدار x کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۵- اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه سه جمله متوالی یک دنباله‌ی حسابی‌اند. نسبت اندازه‌ی محیط این مثلث به طول ضلع بزرگ‌تر آن چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{2}{4}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $\frac{2}{8}$

۶- در یک دنباله‌ی هندسی با جمله عمومی a_n ، اگر $a_7 = 6$ و $a_1 + a_7 = 15$ باشد، قدرنسبت دنباله کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) ۳

۷- در یک دنباله‌ی هندسی با جمله عمومی a_n ، با فرض $a_7 - a_1 = 14$ و $a_7 - a_1 = 126$ قدرنسبت دنباله کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) $\frac{5}{2}$

۸- اگر اعداد $4^{12-x}, 8^{x-2}$ و 5^{12x+3} جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، x کدام است؟

- (۱) -۱۲ (۲) -۶۳ (۳) -۵۲ (۴) -۵۱

۹- در یک دنباله‌ی هندسی حاصل ضرب نه جمله اول برابر ۸ است. حاصل $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt[3]{2}$ (۳) $2\sqrt[4]{2}$ (۴) $2\sqrt[5]{2}$

۱۰- در یک دنباله‌ی هندسی با جملات مثبت و قدرنسبت بزرگ‌تر از یک، جمله چهاردهم برابر ۱ است. جمله چهارم این دنباله با مربع جمله پنجم آن برابر است؟

- (۱) هشتم (۲) نهم (۳) دهم (۴) یازدهم

۱۱- در یک دنباله‌ی حسابی مجموع n جمله اول برابر $S_n = 4n^2 + 3n$ است. جمله عمومی این دنباله کدام است؟

- (۱) $8n-1$ (۲) $6n+1$ (۳) $8n+1$ (۴) $6n-1$

۱۲- مجموع n جمله اول دنباله‌ی حسابی $5, 8, 11, \dots$ از ۴۰۰ بیش‌تر است، حداقل n کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

۱۳- مجموع جملات منفی دنباله‌ی حسابی $27, x, -21, \dots$ کدام است؟

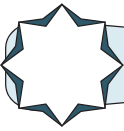
- (۱) -۱۳۵ (۲) -۱۴۰ (۳) -۱۴۵ (۴) -۱۵۰

۱۴- در ۲۰ جمله اول یک دنباله‌ی حسابی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{5}{2}$

۱۵- مجموع همه‌ی اعداد طبیعی سه رقمی که مضرب ۶ هستند، چقدر است؟

- (۱) ۸۱۷۸۱ (۲) ۸۱۸۰۱ (۳) ۸۲۱۵۰ (۴) ۸۲۳۵۰



۱۶- در یک دنباله با جمله عمومی $a_n = n^2 - (n+1)^2$ ، مجموع ۱۹ جمله اول کدام است؟

- (۱) -۴۰۲ (۲) -۴۰۱ (۳) -۴۰۰ (۴) -۳۹۹

۱۷- در یک دنباله هندسی با قدرنسبت ۲ مجموع ۶ جمله اول چند برابر مجموع ۳ جمله اول است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۱۸- مجموع چند جمله‌ی دنباله هندسی $6, -12, 24, \dots$ برابر ۱۰۲۶ است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

۱۹- حاصل $(1-x+x^2-x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4)$ به ازای $x = \sqrt{3}$ کدام است؟

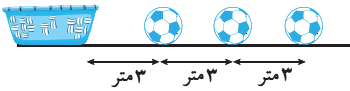
- (۱) ۱۳۱ (۲) ۱۲۸ (۳) ۱۲۴ (۴) ۱۲۱

۲۰- در یک دنباله‌ی هندسی، $a_1 + a_p = 1$ و $S_p = 3$ است. S_q کدام است؟

- (۱) ۱۱/۸ (۲) ۱۲/۲ (۳) ۱۲/۴ (۴) ۱۲/۶

۲۱- مجموع ۶ جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی $4, a, 9, b, \dots$ با قدرنسبت مثبت، کدام است؟

- (۱) $81\frac{3}{8}$ (۲) $81\frac{1}{8}$ (۳) $83\frac{3}{8}$ (۴) $83\frac{1}{8}$



۲۲- در شکل زیر، دونه‌ای باید از کنار سید شروع کرده و هر توپ را برداشته و به سید بیندازد و مجدداً به طرف توپ بعدی بدود و آن را تا سید حمل کند و به داخل آن بیندازد، اگر این دونه مجموعاً ۷۲ متر دیده باشد، او چند توپ در سید انداخته است؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴) ۱۷

۲۳- در یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت منفی، مجموع شش جمله اول ۲۱ برابر مجموع دو جمله اول است. قدرنسبت دنباله کدام است؟ ($q \neq -1$)

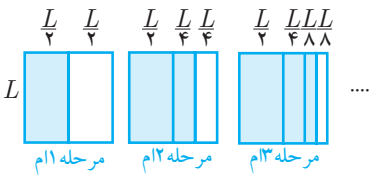
- (۱) -۴ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) -۲ (۴) -۳

۲۴- در یک دنباله‌ی حسابی جمله‌ی هشتم از پنج برابر جمله‌ی ششم ۴۰ واحد کم‌تر است. مجموع ده جمله اول کدام است؟

- (۱) ۱۰۸ (۲) ۱۱۹ (۳) ۱۰۹ (۴) ۱۰۰

۲۵- دایره‌ای به شعاع R را در نظر بگیرید. نیمی از مساحت دایره را رنگ می‌زنیم، سپس نیمی از قسمت باقی مانده را رنگ می‌زنیم. این عمل را چند بار تکرار کنیم تا حداقل ۹۹٪ سطح دایره‌ی اصلی رنگ زده شود؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸



۲۶- در شکل زیر در مرحله‌ی ۱۷م چند درصد از مربع به ضلع L رنگ شده است؟

- (۱) ۹۳٪ (۲) ۹۵٪ (۳) ۹۷٪ (۴) ۹۹٪

۲۷- در دنباله‌ی حسابی $2a+1, a-1, \dots$ داریم: $S_8 = 60$. قدرنسبت دنباله کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴) ۶

۲۸- مجموع سه جمله اول یک دنباله‌ی هندسی برابر ۲۷ و مجموع سه جمله دوم آن برابر ۶۴ است. قدرنسبت دنباله کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{64}{27}$ (۴) $\frac{125}{64}$

۲۹- در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع پنج جمله دوم برابر ۶۰ و تفاضل مجموع ۵ جمله اول از مجموع ۵ جمله سوم نیز ۴۰ است. جمله اول کدام است؟

- (۱) $3/7$ (۲) $7/3$ (۳) $6/4$ (۴) $4/6$

۳۰- در یک دنباله‌ی هندسی مجموع چهار جمله اول ۵۲ و مجموع هشت جمله اول ۶۵ است. جمله سوم چند برابر جمله هفتم است؟

- (۱) ۴ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) $\frac{1}{4\sqrt{2}}$





۳۱- در یک دنباله هندسی با جمله اول ۳ جمله هشتم مربع جمله پنجم است. مجموع ۴ جمله اول دنباله کدام است؟

- (۱) $\frac{40}{9}$ (۲) $\frac{30}{7}$ (۳) $\frac{51}{8}$ (۴) $\frac{37}{8}$

۳۲- مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی از رابطه $S_n = an^2 + 3n + a - 2$ به دست می‌آید. جمله هفتم این دنباله کدام است؟

- (۱) ۲۸ (۲) ۲۹ (۳) ۳۰ (۴) ۳۱

۳۳- مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی $S_n = 4 - 2^{2-n}$ است. جمله عمومی دنباله کدام است؟

- (۱) $4 \times 2^{2-n}$ (۲) $3 \times 2^{1-n}$ (۳) 2^{1-n} (۴) 2^{2-n}

۳۴- یک دنباله حسابی ۱۹ جمله دارد و مجموع سه جمله وسط آن ۲۱ است. مجموع این ۱۹ جمله کدام است؟

- (۱) ۱۲۷ (۲) ۱۲۹ (۳) ۱۳۳ (۴) ۱۳۵

۳۵- حاصل $\frac{1-x+x^2-x^3+\dots+x^8}{1-x^3+x^6}$ به ازای $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۳۶- در یک دنباله حسابی جمله نهم برابر ۸ است. مجموع ۱۷ جمله اول این دنباله کدام است؟

- (۱) ۶۸ (۲) ۱۳۶ (۳) ۲۷۲ (۴) ۵۴۴

۳۷- جملات اول و دوم یک دنباله حسابی و یک دنباله هندسی با هم برابرند. مجموع سه جمله اول دنباله حسابی ۱۸ و قدرنسبت دنباله هندسی $\frac{2}{3}$ است. جمله اول دنباله کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۳۸- در یک دنباله حسابی می‌دانیم $a_{11} + a_{15} = 36$ است. مجموع ۳۵ جمله اول این دنباله کدام است؟

- (۱) ۳۶۰ (۲) ۳۵۰ (۳) ۶۳۰ (۴) ۵۳۰

۳۹- در یک دنباله هندسی با قدرنسبت مثبت: مجموع ۳ جمله اول ۲۱ و مجموع جملات چهارم تا نهم برابر ۱۵۱۲ است. قدرنسبت دنباله کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) ۳ (۴) ۲

۴۰- شدت تابش پس از عبور از یک لایه محافظتی نصف می‌شود. اگر از ۶ لایه محافظتی استفاده کنیم، شدت تابش تقریباً چند درصد کاهش می‌یابد؟

- (۱) ۸۹ (۲) ۹۲ (۳) ۹۵ (۴) ۹۸

۴۱- در یک دنباله حسابی ۲ واحد به قدرنسبت اضافه می‌کنیم، به مجموع n جمله اول چقدر اضافه می‌شود؟

- (۱) $n^2 + n$ (۲) $2n^2 + n$ (۳) $n^2 - n$ (۴) $2n^2 - n$

۴۲- مجموع اعداد دو رقمی که در تقسیم بر ۷ باقی‌مانده‌ی ۴ دارند، کدام است؟

- (۱) ۵۸۲ (۲) ۶۸۹ (۳) ۶۸۶ (۴) ۵۷۵

۴۳- بر محیط دایره‌ای ۱۲ نقطه‌ی متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای متمایز کدام است؟

- (۱) ۵۵ (۲) ۶۶ (۳) ۷۸ (۴) ۱۳۲

۴۴- در یک دنباله حسابی مجموع ۴ جمله اول و مجموع ۴ جمله آخر برابر ۴۲ و ۱۷۰ است. اگر مجموع تمام جملات ۵۳۰ باشد، تعداد جملات کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۲۲

۴۵- حاصل $\frac{1+a+a^2+a^3+\dots+a^{10}}{1-a+a^2-a^3+\dots+a^{10}}$ به ازای $a = 2$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{2047}{683}$ (۲) $\frac{3069}{1025}$ (۳) $\frac{3069}{342}$ (۴) $\frac{2047}{1025}$

۴۶- در یک دنباله هندسی با قدرنسبت q و تعداد جملات زوج، مجموع جملات ردیف فرد S است. مجموع جملات دنباله کدام است؟

- (۱) $2S$ (۲) qS^2 (۳) qS (۴) $(1+q)S$

۴۷- اگر دنباله $3, 2a+1, 2b+3, \dots$ حسابی و دنباله $1, 8, 4b, \dots$ هندسی باشد، مجموع ده جمله اول دنباله حسابی کدام است؟ ($a \geq 1$)

- (۱) 150 (۲) 180 (۳) $30 + 180\sqrt{2}$ (۴) $40 + 120\sqrt{2}$

۴۸- جملات دوم، پنجم و یازدهم یک دنباله حسابی، سه جمله متوالی یک دنباله هندسی اند. مجموع شش جمله اول دنباله هندسی، چند برابر جمله اول آن است؟

- (۱) 33 (۲) 31 (۳) 63 (۴) 65

۴۹- مجموع جملات مشترک و دو رقمی دو دنباله حسابی $a_n: 2, 5, 8, \dots$ و $b_n: -1, 3, 7, \dots$ کدام است؟

- (۱) 424 (۲) 412 (۳) 400 (۴) 388

۵۰- اعداد طبیعی را به طریقی دسته بندی می کنیم که آخرین جمله هر دسته، مجذور کامل باشد: $(1), (2, 3, 4), (5, 6, 7, 8, 9), \dots$ مجموع جملات در دسته دهم کدام است؟

- (۱) 1691 (۲) 1710 (۳) 1729 (۴) 1748

۵۱- در یک دنباله حسابی، جمله هفتم نصف جمله سوم است. مجموع چند جمله اول از این دنباله برابر صفر است؟ (سراسری-۸۸)

- (۱) 18 (۲) 19 (۳) 20 (۴) 21

۵۲- بین دو عدد 2 و $16\sqrt{2}$ ، شش عدد چنان درج شده اند که هشت عدد حاصل، تصاعد هندسی تشکیل داده اند. مجموع این هشت عدد کدام است؟ (سراسری-۸۸)

- (۱) $30(2 + \sqrt{2})$ (۲) $48\sqrt{2}$ (۳) $30(\sqrt{2} + 1)$ (۴) $36(\sqrt{2} + 1)$

۲۵

۵۳- در یک دنباله هندسی صعودی به صورت $4, a, 9, b, \dots$ ، مجموع شش جمله اول کدام است؟ (سراسری-۸۹)

- (۱) $81\frac{3}{8}$ (۲) $81\frac{7}{8}$ (۳) $82\frac{3}{8}$ (۴) $83\frac{1}{8}$

۵۴- در یک دنباله حسابی مجموع بیست جمله اول سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد، جمله دهم کدام است؟ (سراسری-۹۰)

- (۱) 32 (۲) 34 (۳) 36 (۴) 38

۵۵- در دنباله هندسی $1, 2, 4, \dots$ مجموع چهارده جمله اول چند برابر مجموع هفت جمله اول آن است؟ (سراسری-۹۰)

- (۱) 65 (۲) 63 (۳) 127 (۴) 129

۵۶- در یک دنباله هندسی مجموع سه جمله متوالی ۱۹ و حاصل ضرب آن ها ۲۱۶ است. تفاضل کوچک ترین و بزرگ ترین این سه عدد کدام است؟ (سراسری-۹۰)

- (۱) 4 (۲) 5 (۳) 6 (۴) 7

۵۷- مجموع n جمله اول از یک دنباله عددی به صورت $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ است. در این دنباله مجموع جملات با شروع از جمله هفتم و ختم به جمله هجدهم، کدام است؟ (سراسری-۹۰)

- (۱) 9 (۲) $\frac{29}{3}$ (۳) $\frac{49}{3}$ (۴) 18

۵۸- بین دو عدد 224 و 4 سه عدد چنان درج شده است که پنج عدد حاصل تشکیل یک دنباله هندسی دهند، مجموع این ۵ عدد مثبت کدام است؟ (سراسری-۹۱)

- (۱) 428 (۲) 484 (۳) 486 (۴) 488





۵۹- در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع ۵ جمله‌ی اول آن، $\frac{1}{3}$ مجموع پنج جمله‌ی بعدی است. جمله‌ی دوم چند برابر جمله‌ی اول است؟ (سراسری-۹۱)

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) ۳ (۴) ۴

(سراسری-۹۳)

۶۰- حاصل عبارت $\frac{t^8 - t^7 + t^6 - \dots - t + 1}{t^6 - t^3 + 1}$ ، به ازای $t = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

(سراسری-۹۸)

۶۱- مجموع تمام اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۷ کدام است؟

- (۱) ۷۲۱ (۲) ۷۲۸ (۳) ۷۳۵ (۴) ۷۴۲

↔ معادله‌ی درجه دوم (ریشه‌یابی و روابط بین ریشه‌ها)

۶۲- معادله‌ی $2x^2 + 12x + m = 0$ ریشه‌ی مضاعف دارد. یک ریشه‌ی معادله‌ی $3x^2 = 3x + m$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) ۲

۶۳- معادله‌ی $kx^2 - 3kx + (k + 5) = 0$ دارای ریشه‌ی مضاعف است. k کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۶۴- به ازای کدام مقادیر a معادله‌ی $4x^2 + 2ax + 2a - 3 = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است؟

- (۱) $a > 6$ یا $a < 2$ (۲) $a > 4$ یا $a < 3$ (۳) $2 < a < 6$ (۴) $3 < a < 4$

۶۵- طول یک آجر یک سانتی‌متر بلندتر از ۶ برابر عرض آن است. برای فرش کردن زمینی به مساحت ۳۱ مترمربع، دو هزار آجر لازم است. طول هر آجر چند سانتی‌متر است؟

- (۱) ۲۹ (۲) ۳۰ (۳) ۳۱ (۴) ۳۲

۶۶- به ازای تمام مقادیر a معادله‌ی $x^2 + ax + a - 1 = 0$ دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد. به جز:

- (۱) $a = 1$ (۲) $a = 2$ (۳) $a = -1$ (۴) $a = -2$

۶۷- در شکل زیر ابعاد استخر ۳ و ۱۰ متر و مساحت آبراه بتنی اطرافش، ۳۰ مترمربع است. پهنای آبراه بتنی چقدر است؟

- (۱) ۱ متر (۲) $\frac{2}{3}$ متر (۳) $\frac{5}{5}$ متر (۴) $\frac{75}{5}$ متر



۶۸- در معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ ، رابطه‌ی $9a + c = 3b$ برقرار است. یکی از ریشه‌ها کدام است؟

- (۱) $-\frac{2a+b}{a}$ (۲) $\frac{2a+b}{a}$ (۳) $\frac{c}{3a}$ (۴) $-\frac{c}{3a}$

۶۹- با فرض آن که α ریشه‌ی معادله‌ی $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشد، حاصل $(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 5)$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۴ (۴) -۴

۷۰- معادله‌ی درجه دوم $(a + b + c)x^2 - 2(b + c)x - a + b + c = 0$:

- (۱) همواره دو ریشه‌ی متمایز دارد. (۲) ریشه‌ی حقیقی ندارد.
(۳) اگر $a \neq 0$ ، دارای دو ریشه‌ی متمایز است. (۴) ریشه‌ی مضاعف دارد.

۷۱- ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ برابر $\begin{cases} a+b+c \\ a-b+c \end{cases}$ هستند. Δ کدام است؟

- (۱) $4a^2b^2$ (۲) $4a^2c^2$ (۳) $4b^2c^2$ (۴) $4a^2b^2c^2$

۷۲- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 7x + 2 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^2 + \beta^2$ کدام است؟

- (۱) ۵۳ (۲) ۴۵ (۳) ۴۲ (۴) ۵۶

۷۳- مجموع معکوس‌های ریشه‌های معادله‌ی $x(x + 3) = m$ برابر یک است. مقدار m کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۱ (۴) -۱

۷۴- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 11x + 9 = 0$ باشند، حاصل $|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}|$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) $\sqrt{7}$

۷۵- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 4x = m$ و $\frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} = 98$ باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) -۳

۷۶- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند، حاصل $x_1\sqrt{x_2} + x_2\sqrt{x_1}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) $\sqrt{7}$ (۴) $\sqrt{6}$

۷۷- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - x - 3 = 0$ باشند، حاصل $(x_1^2 - 3)(x_2^2 - 3)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۳ (۳) ۹ (۴) $\frac{1}{3}$

۷۸- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x - 7 = 0$ باشند، حاصل $x_1^2(3x_2 + 7)$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۹ (۳) ۷ (۴) ۴۹

۷۹- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 7x - 8 = 0$ باشند، حاصل $\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۷

۸۰- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 14x - 51 = 0$ باشند، $\alpha + \beta^2$ کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۲۶ (۲) -۱۷ (۳) $-\frac{17}{3}$ (۴) $-\frac{3}{17}$

۸۱- اگر α یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + 3x + 1 = 0$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\alpha^2 + 6\alpha + 2}{\alpha^2}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$ (۳) -۱ (۴) $\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$

۸۲- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $x^2 - 3x + c = 0$ باشند و $\alpha^2 + \beta^2 = -18$ ، مقدار c کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۸۳- به ازای کدام مقدار c ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $2x^2 + 3x + c = 0$ ، سینوس و کسینوس یک زاویه‌اند؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{7}{2}$ (۴) هیچ مقدار c

۸۴- اختلاف ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + ax + 3 = 0$ برابر b است. حاصل $a^2 - b^2$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

۸۵- یکی از ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx - 2 = 0$ برابر ۲- است. ریشه‌ی دیگر این معادله کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{a}$ (۲) $-\frac{1}{a}$ (۳) $\frac{b}{a}$ (۴) $-\frac{b}{a}$

۸۶- به ازای کدام مقدار m در معادله‌ی $4x^2 - 8x + m = 0$ یکی از ریشه‌ها ۳ واحد بزرگ‌تر از ریشه‌ی دیگر است؟

- (۱) -۵ (۲) -۴ (۳) -۳ (۴) -۶

۸۷- اگر ریشه‌های معادله‌ی $(2 - 3m)x^2 + x + (\Delta m - 4) = 0$ وارون یکدیگر باشند، m کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $-\frac{4}{3}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۸۸- به ازای کدام مقدار m ، معادله‌ی $3x^2 + (m^2 - 16)x + m + 3 = 0$ دو ریشه‌ی قرینه دارد؟

- (۱) فقط -۳ (۲) فقط -۴ (۳) ± 4 (۴) ± 3





۸۹- به ازای کدام مقدار a ، یک ریشه‌ی معادله‌ی $(a+1)x^2 - 3x + a = 0$ دو برابر دیگری است؟

- (۱) 3 و -2 (۲) 2 و -3 (۳) 1 و -2 (۴) 4 و -2

۹۰- به ازای کدام مقدار m ، یک ریشه‌ی معادله‌ی $x^2 - 6x + m + 5 = 0$ مربع دیگری است؟

- (۱) 3 (۲) -5 (۳) -21 (۴) -32

۹۱- اگر یکی از ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(x+2)(x+4) = m$ از دو برابر ریشه‌ی دیگر سه واحد کم‌تر باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۹۲- به ازای کدام مقدار a ، مجموع مربع‌های ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - ax - a + 1 = 0$ برابر یک است؟

- (۱) فقط 1 (۲) فقط -3 (۳) 3 و -1 (۴) 3 و -1

۹۳- به ازای کدام مقدار m ، ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 8x + 4m - 1 = 0$ دو عدد صحیح فرد متوالی‌اند؟

- (۱) 4 (۲) -4 (۳) 8 (۴) -8

۹۴- تفاضل ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - (2a-1)x + a = 0$ برابر یک است. a کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴) 5

۹۵- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 2x + c - 1 = 0$ باشند و رابطه‌ی $x_1^2 + x_2^2 = 4$ برقرار باشد، c کدام است؟

- (۱) 0 (۲) 1 (۳) 2 (۴) 3

۹۶- اگر a و b ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + ax + b = 0$ باشند، حاصل $a-b$ کدام است؟ ($b \neq 0$)

- (۱) 1 (۲) -1 (۳) -3 (۴) 3

۹۷- به ازای کدام مقدار m ، رابطه‌ی $\alpha + 2\beta = -6$ بین ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 - 6x + 3 - 5m = 0$ برقرار است؟ (α و β ریشه‌های معادله‌اند)

- (۱) 5 (۲) $\frac{27}{5}$ (۳) 15 (۴) $\frac{48}{5}$

۹۸- اگر $\frac{m^2}{2}$ واسطه‌ی حسابی بین ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 - (1-2m)x - 5 = 0$ باشد، m کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}, -1$ (۲) $-\frac{1}{3}, 1$ (۳) $-\frac{1}{3}, -1$ (۴) $\frac{1}{3}, 1$

۹۹- معادله‌ی درجه دومی که $1 + \sqrt{2}$ و $1 - \sqrt{2}$ ریشه‌های آن باشند، کدام است؟

- (۱) $x^2 + 2x - 1 = 0$ (۲) $x^2 + 2x + 1 = 0$ (۳) $x^2 - 2x - 1 = 0$ (۴) $x^2 - 2x + 1 = 0$

۱۰۰- اگر $2 + \sqrt{3}$ ریشه‌ی معادله‌ی $x^2 + bx + c = 0$ و b و c اعداد گویا باشند، حاصل bc کدام است؟

- (۱) -6 (۲) 6 (۳) -4 (۴) 4

۱۰۱- مجموع دو عدد $\frac{17}{12}$ و حاصل ضرب آن‌ها $\frac{1}{4}$ است. نسبت این عدد کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{8}$ (۲) $\frac{8}{7}$ (۳) $\frac{6}{5}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۱۰۲- هر یک از ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + 14x + m = 0$ از دو برابر ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + 4x - 2 = 0$ سه واحد کم‌تر است. m کدام است؟

- (۱) 15 (۲) -15 (۳) 25 (۴) -25

۱۰۳- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 3x - 1 = 0$ باشند، مجموعه‌ی جواب‌های کدام معادله به صورت $\left\{ \frac{1}{\alpha} - 2, \frac{1}{\beta} - 2 \right\}$ است؟

- (۱) $x^2 - 7x + 8 = 0$ (۲) $x^2 + 7x + 8 = 0$ (۳) $x^2 - 7x - 8 = 0$ (۴) $x^2 + 7x - 8 = 0$

۱۰۴- مساحت زمین مستطیل شکلی ۱۸ مترمربع و محیط آن ۱۷ متر است. اختلاف طول و عرض آن کدام است؟

- (۱) ۲/۵ (۲) ۵/۰ (۳) ۷/۵ (۴) ۱

۱۰۵- یکی از ریشه‌های کدام معادله‌ی زیر برابر با $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ است؟

- (۱) $x^2 + 4x - 1 = 0$ (۲) $x^2 + 4x + 1 = 0$ (۳) $x^2 - 4x - 1 = 0$ (۴) $x^2 - 4x + 1 = 0$

۱۰۶- معادله‌ی درجه دومی که ریشه‌هایش مربع ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$ باشد، کدام است؟

- (۱) $x^2 - 5x + 6 = 0$ (۲) $x^2 + 5x + \sqrt{6} = 0$ (۳) $x^2 + 5x + 6 = 0$ (۴) $x^2 + 5x + 4 = 0$

۱۰۷- معادله‌ی درجه دومی که ریشه‌هایش وارون ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشد، کدام است؟

- (۱) $4x^2 + 3x + 2 = 0$ (۲) $4x^2 + 3x - 2 = 0$ (۳) $4x^2 - 3x + 2 = 0$ (۴) $4x^2 - 3x - 2 = 0$

۱۰۸- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 4x - 2 = 0$ و $3 + \frac{1}{\alpha}$ و $3 + \frac{1}{\beta}$ ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + mx + n = 0$ باشند، حاصل $m + n$ کدام است؟

- (۱) $-13/5$ (۲) $13/5$ (۳) $1/5$ (۴) $-1/5$

۱۰۹- اگر a و b ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x - 7 = 0$ باشند، معادله‌ای که ریشه‌هایش a^2 و $3b + 7$ باشند، کدام است؟

- (۱) $x^2 + 23x + 49 = 0$ (۲) $x^2 + 23x - 49 = 0$ (۳) $x^2 - 23x - 49 = 0$ (۴) $x^2 - 23x + 49 = 0$

۱۱۰- اگر ریشه‌های معادله‌ی $(2m-1)x + 5 = 0$ قرینه‌ی ریشه‌های معادله‌ی $(1-n)x^2 + 7x + 5 = 0$ باشند، $m + n$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) -۲ (۳) -۴ (۴) ۲

۱۱۱- بین ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، رابطه‌ی $\alpha - \beta - \alpha\beta = 0$ برقرار است. یکی از ریشه‌های این معادله کدام است؟ ($a > 0, \alpha > \beta$)

- (۱) $\frac{b-c}{2a}$ (۲) $\frac{c-b}{2a}$ (۳) $\frac{a-b}{2c}$ (۴) $\frac{b-a}{2c}$

◀ معادله‌ی درجه دوم (معادلات قابل تبدیل به درجه ۲، نمودارهای سهمی و علامت ریشه‌ها)

۱۱۲- معادله‌ی $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ چند ریشه دارد؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۱۱۳- تعداد ریشه‌های معادله‌ی $(x^2 - 3x + 7)^2 - 4(x^2 - 3x + 7) - 21 = 0$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۱۱۴- قدرمطلق اختلاف صفرهای تابع $f(x) = (x^2 - 1)^2 + x^2 - 3$ چقدر است؟

- (۱) $4\sqrt{2}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) ۳ (۴) ۶

۱۱۵- به ازای کدام مقدار m معادله‌ی $x^4 + (2-3m)x^2 = 5$ چهار ریشه‌ی حقیقی دارد؟

- (۱) $m > 5$ (۲) $m < -5$ (۳) $-5 < m < 5$ (۴) هیچ مقدار m

۱۱۶- اگر $x = 2$ یکی از صفرهای تابع $P(x) = x^4 - 2x^2 + a$ باشد، حاصل ضرب صفرهای دیگر تابع کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۳۲ (۳) -۱۶ (۴) -۳۲

۱۱۷- مجموع مربعات صفرهای تابع $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۲۰ (۳) ۱۱ (۴) ۲۲

۱۱۸- تعداد جواب‌های متمایز معادله‌ی $8 = (x^2 + \frac{1}{x}) - 3(x + \frac{1}{x})$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

