هندسه (۳)

پایه دوازدهم

مؤلفان:

نادر حاجی‌زاده، محمدجمال صادقی

انتشارات خوشخوان

پیشگفتار ناشر

خنده و گریه

تا حالا شده توی یه مکان عمومی مثل رستوران، بانک و ... یه موضوع خنده‌داری براتون اتفاق بیفته بخواید از ته دل بخندید، اونم در حد انفففجار؟!!! چی کار می‌کنید؟ خجالت رو می‌ذارید کنار و از ت دل می‌خندید اونم طوری‌که همه با خنده‌تون بخندن یا نه، یکم چاشنی شو می‌آرید پایین طوری‌که چند نفر اطرافتون بفهمن یا فقط به یه لبخد کوچک بسنده می‌کنید؟!

حالا اگر یه اتفاق ناراحت‌کننده افتاده باشه چی؟ گریه‌تونو پنهون می‌کنید، با به چند قطره اشک اکتفا می‌کنید، یا نه بیشتر، با چشمای گریون شروع می‌کنید تو خیابون قدم زدن؟!

نمی‌دونم کدموشون منطقی به نظر میاد!!

از نظر شما کدومش درسته؟! خنده‌ای که باعث خنده دیگران بشه یا گریه‌ای که غم رو تو دل دیگران راه بده.

اگر خنده‌تون باعث شه که یه لحظه یه نفر از غم های دنیا رها شه باید این کار رو بکنید یا نکنید؟! من که باشم می‌کنم (البته طوری‌که لودگی به نظر نیاد). اگر گریه‌تون باعث بشه بغض دل یه نفر دیگه بترکه و اونم شروع کنه به گریه، باید این کار رو بکنید یا نکنید؟! من که باشم می‌کنم.

خب شاید بگید که چی؟!

احتمالا هر کدوم از ما لذت خنده‌هایی که با خنده‌ی خودمون ایجاد کردیم رو تجربه کردیم. چه حس جالبی داره، وقتی بلند می‌خندی و همه به صدای خنده‌ی تو می خندن، یکی از ته دل و بدون قضاوت تو، یکی با دلیل اینکه چه خوب! دلش شاده و یکی با این فکر که بابا اینم رد داده. ولی هر کدوم با هر دیدی با تو همراه می‌شن شروع می کنن به خندیدن.

حس جالبیه اگر تجربه نکردید حتما تو یه مکان و فضای مناسب امتحان کنید (نرید وسط مراسم عزاداری بعد بگید حرفت جواب نداد).

هر کاری توش یه لذتی داره. اگر آدم ته دلش صاف و صادق باشه شاید کوچک‌ترین کارش هم همراه با لذت باشه.

شما تو چه چیزی استعداد دارید؟

من یکی از استعدادهامو تو ریاضی پیدا کردم، همه یه استعداد یا توانایی ندارن، به قول اساتید علوم تربیتی و اجتماعی، سی و چند شاخه‌ی توانایی و استعداد داریم که هر فردی می‌تونه توی چندتا از شاخه‌ها استعداد داشته باشه و هیچ کسی هم نیست که توی تمام شاخه‌ها توانایی داشته باشه. یکی استعداد ورزشی داره اونم نه تو همه‌ی رشته‌ها یکی شناگر خوبیه، یکی فوتبالیست، یکی ژیمناست، یکی تنیسور و ....، یکی استعداد تو هنر نقاشی‌داره، یکی مجسمه‌سازی، یکی بازیگری، یکی گلدوزی، یکی فرشبافی و ... ، یکی استعداد ریاضی داره، یکی فیزیک، یکی تاریخ، یکی ادبیات و ...

گفتم یه انسان تک بعدی نیست ممکنه یه تاجرِ ورزشکارِ مهندس باشی مثل علی دایی یا پزشکِ آهنگسازِ خواننده باشی مثل محمد اصفهانی یا استادِ مجریِ برنامه‌سازِ مهندس باشی مثل عادل فردوسی‌پور یا ...

حالا اگر بپرسید چطور باید استعدادهاتونو بشناسید می‌گم یکی از راهاش مدرسه است که به دلیل سیستم آموزشی نادرست یا ناقص ممکنه نتونه کمک لازم رو بهتون بکنه. ولی شما می‌تونید استعدادتونو با مطالعه، مشاوره، روابط اجتماعی، علایق و ... پیدا کنید.

خب یکی از توانایی‌ها و استعدادهایی که من در دوران مدرسه در خودم پیدا کردم ریاضیه، عاشق ریاضی‌ام شاید بهتر بگم گاهی دیوووونه‌شم. خب بر طبق یه قاعده‌ی روانشناسی باید دوست و همکاریی داشته باشم که اون‌ها هم عاشق یا دیووونه‌ی یه شاخه علمی باشن (بازم می‌گم صددرصد نیست). اونا هم علاقه، استعداد و آرامششون رو تو ریاضی، فیزیک، شیمی، هنر، ادبیات و ... یافتن. باز هم می‌گم ممکنه من همین آرامش، هیجان، عشق و ... رو تو گفتن شعر یا نوشتن متنی مثل همین متن هم داشته باشم (فکر نکنین یه آدم تک بعدی هستین هیچ آدمی تک بعدی نیست).

خوشخوان انتشاراتی ویژه‌ی دانش آموزان ممتاز

آره این شعار ما در بدو تاسیس بود؛ وقتی که کسی زیاد به ممتازها اهمیت نمی داد! اگر هم بود در حد چند مدرسه و چند کتاب خاص. ما اومدیم که بگیم تو همه‌ی کشور ممتاز داریم نه فقط شهرهای بزرگ. خواستیم بگیم ممتازهایی که توی روستای گرمسیر و سردسیر هستین ما هواتونو داریم، چون خودمون هم از همون ریشه‌ایم. خب به مرور مثل هر شغل و حرفه‌ای دوستان دیگه هم وارد زمینه‌ی توجه به دانش‌آموزان ممتاز شدن (ما با ممتازها بودیم وقی ممتاز بودن مد نبود).

ما می‌نوشتیم تا اونی که مثل خودمون عاشق درس و مبحث خاصیه سیرآب بشه. ما تالیف می‌کردیم تا دانش‌آموزهای خوبمون هی دنبال این کتاب اون کتاب نرن و گذشت ...

ما به هدفمون رسیدیم، شدیم ویژه‌ی ویژه ... . ولی همین ویژه بودن به روزایی شد دردسر، روزایی که به دلیل تغییر فرهنگ و شرایط درس خوندن (گاهی بی‌ارزش شدن ادامه تحصیل و کم علاقگی به علم و بی‌ارزش شدن مدارج تحصیلی)، دانشگاه رفتن ساده‌تر از گذشته شد و کم بهاتر (که چه خوب) و شکر که استرس کمتر شد وای کاش کمتر بشه و روزی برسه که روی دوش هیچ جوووونی استرس کنکور نباشه تا راحت به پرورش استعدادهای واقعیش فکر کنه و اون‌ها روفدای کنکور نکنه (ولی هنوز تشنه‌ها هستن).

بگذریم، پس از ۱۷ سال می‌خواهیم بگیم که ما نه تنها علاقه‌مندان هر شاخه‌ی علمی خاص مختص به دبیرستان رو رها نکردیم بلکه می‌خواهیم روش آموزشی رو ارائه بدیم تا هر دانش‌آموزشی با هر استعدادی بتونه در زمینه‌ی خاص در حد توانش (تاکید می‌کنم در حد ظرفش و نه بیشتر) رشد کنه تا علاوه بر ایجاد علاقه در زمینه‌ی‌علمی مورد نظر، بتونیم راهی رو برای رسیدن به اهداف آینده‌اش باز کنیم. شاید ریاضی برای من شیرین باشه و برای شما سخت، فیزیک برای یکی شیرین باشه و برای دیگری سخت، ولی مهم این‌که یاد بگیریم رشد کنیم و راه رشد کردن رو یاد بگیریم. به قول یه جمله معروف ما می‌خواهیم به‌جای ماهی، ماهیگیری (روش حل، لذت بردن و فکر کردن) رو به شما یاد بدیم تا هر کسی به اندازه‌ی توانش بتونه از دریای بزرگ جلوی روش ماهی بگیره. یکی با یه ماهی خودشو سیر می‌کنه، یکی با چند تا خانواده شو و یکی با ماهی‌های بیشتری جامعه و فرهنگشو.

امیدوارم در سالی که پیش رو دارید کلی ماهی از دریای موفقیت بگیرید، کنکور آینده‌ی کسی رو نمی‌سازه شمایید که آینده رو می‌سازید.

ساختار

کتاب‌های دوازدهمی که از انتشارات به چاپ رسیده، به شکل زیرند:

درس‌نامه: درسنامه‌ی هر فصل به‌صورت جلسه‌بندی به همراه مثال‌ها و تست‌های متنوع ارائه شده، تا ضمن عمق بخشی به مطالب موجود در کتاب درسی، دانش‌آموزهای عزیز رو برای امتحان‌های مختلف از جمله امتحان نهایی آماده کنن.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای: پرسش‌ها چهار دسته دارن:

۱. سطح ساده ۲. سطح متوسط ۳. سطح دشوار ۴. ترکیب سطوح

برای این‌که کتاب، برای بیشتر دانش‌آموزان قابل استفاده باشه، پرسش‌ها سطح‌بندی شده‌اند تا دانش‌آموزان متوسط به پایین لزوما دنبال پرسش‌های سطح سخت نرن و دانش‌آموزهای متوسط به بالا وقت خودشونو برای پرسش‌های ساده خیلی سپری نکنن. برای این‌که مهارت دوستای عزیز رو در تشخیص سوالات ساده، متوسط و سخت بالا ببریم، پرسش‌های ترکیب سطوح رو آوردیم تا هر دانش‌آموزی بتونه متناسب با سطح تواناییش سوالات مربوط به سطحشو تشخیص بده.

پرسش‌های تکمیلی فصل: چون بعد از تموم شدن هر جلسه دانش‌آموز با ذهنیت نکات همون بخش شروع به حل کردن سوالات می‌کنه، شاید این موضوع در نهایت ایده‌آل نباشه، چون هنر شما زمانی نشون داده می‌شه که بتونید تشخیص بدید هر سوال برای کدوم مبحثه، پس با آوردن سوالات ترکیبی با یه تیر دو نشون زدیم یکی بالا بردن قدرت تشخیص مبحث مرتبط با سوال و دوم مرور فصل.

سوالات کنکور مرتبط با فصل: سعی کردیم سوالات کنکور داخل و خارج سال‌های اخیر مربوط به هر فصل رو برای شما جمع کنیم تا با شکل سوالات کنکور هم آشنا بشید.

پاسخ کلیدی و تشریحی پرسش‌ها: هم پاسخ‌نامه‌ی کلیدی و هم تشریحی‌سوالات رو بعد از اتمام فصل آوردیم، حتی برای بعضی از سوالات بیشتر از یک راه‌حل آوردیم. راستی، همه به پاسخ‌نامه‌ی تشریحی حتما سر بزنن!!!!!!!

آزمون‌های سه گانه: در آخر هر فصل سه آزمون استاندارد برای کنکوریای عزیز آوردیم تا سطح یادگیری مطالب رو برای خودشون بسنجن. راستی فقط جواب کلیدی رو داخل کتاب قرار دادیم تا خدایی نکرده اگر تو سوالی مشکل داشتید سعی کنید با جست‌وجو داخل کتاب یا مراجعه به دبیرتون به اون بخش مسلط بشین. (البته سعی می‌کنیم جوابا رو داخل سایت قرار بدیم تا دوستایی که احیانا مراجعه به دبیر براشون سخته دچار مشکل نشن).

آخر

با تشکر از تمام دوستانی که ما رو در تالیف و چاپ این کتاب یاری کردند و با طلب عفو و بخشش برای نواقص و کاستی‌ها از شما، برای همه‌ی شما در زندگی موفقیت و سربلندی رو از خداوند متعال خواستارم.

رسول حاجی‌زاده

مدیر انتشارات خوشخوان

مقدمه مؤلفین

دیدی ای دل که غم عشق دگربار چه کرد / چون بشد دلبر و با یار وفادار چه کرد
آه از آن نرگس جادو که چه بازی انگیخت / آه ز آن مست که با مردم هشیار چه کرد
اشک من رنگ شفق یافت ز بی‌مهری یار / طالع بی‌شفقت بین که در این کار چه کرد
برقی از منزل لیلی بدرخشید سحر / وه که با خرمن مجنون دل افگار چه کرد
ساقیا جام می‌ام ده که نگارنده غیب / نیست معلوم که در پرده اسرار چه کرد
آن که پرنقش زد این دایره مینایی / کس ندانست که در گردش پرگار چه کرد
فکر عشق آتش غم در دل حافظ زد و سوخت / یار دیرینه ببینید که با یار چه کرد

" غزلیات حافظ "

مهم‌ترین هدف آموزش ریاضی پرورش تفکر ریاضی است. در کتاب هندسه ۳ علاوه بر رسیدن به تفکر ریاضی، کاربردی کردن مفاهیم هندسی در ریاضی در عمل مورد توجه قرار گرفته است. در واقع با یادگیری مطالب جدید کاربرد آنها را در عمل می‌بینید در فصل اول این کتاب استفاده از ماتریس‌ها در حل دستگاه معادلات و دترمینان در حل و بحث دستگاه‌ها مطرح شده است.

و در فصل دوم کتاب به مقاطع مخروطی از جمله دایره، بیضی و سهمی و ویژگی‌های آنها پرداخته شده است. و در فصل سوم کتاب فضای سه بعدی، نقاط و بردارها و استفاده از بردار در محاسبه‌ی مساحت و حجم بررسی شده‌اند.

بالغ بر ۱۰ ماه گروه هندسه انتشارات خوشخوان کتاب هندسه ۳ را مورد بررسی قرار داده و با در نظر گرفتن کلیه مطالب و مفاهیم و نکات درسی سعی کردیم به دقت به همه‌ی آنها پرداخته و با حل و بحث مسائل و پرسش‌های چهارگزینه‌ای و عمق بخشیدن به آنها، یادگیری این کتاب را ساده‌تر کنیم.

در هر فصل ابتدا با تدریس مطالب درسی و پرداختن‌همه جانبه به تدریس آنها، در چند سطح ساده، متوسط، دشوار و ترکیبی سؤالات را طبقه‌بندی کرده‌ایم، تا دانش‌آموزان با توجه به آنچه خوانده‌اند به سراغ سطح مورد نظر رفته و با حل تست‌های مطرح شده خود را برای سطح بعدی آماده کنند.

در ضمن انتهای هر فصل ۳ آزمون برای تکرار و تمرین بیشتر آن فصل آماده شده است تا دانش‌آموزان عزیز با بررسی آنها فصل مورد نظر را کامل کنند.

گروه مؤلفان این کتاب امیدوارند این اثر گامی هر چند کوچک در جهت ارتقای علمی دانش‌آموزان عزیز میهن اسلامی‌مان باشد.

لازم است از آقایان ناظم‌بوشهری و وطن‌پرست و خانم‌ها محمدخانی و احمدخانی که زحمت ویرایش و نسخه‌خوانی را بر عهده داشتند و مدیریت محترم انتشارات خوشخوان آقای رسول حاجی‌زاده تشکر کنیم.

در انتها از همکاران و دانش‌آموزان محترم خواهشمندیم نظرات اصلاحی خود را به انتشارات در خصوص این کتاب ارسال فرمایید، تا در چاپ‌های بعدی از این نظرات استفاده شود.

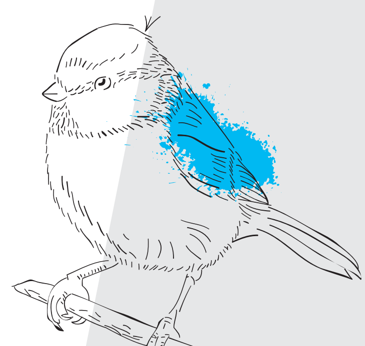
من ا... توفیق

گروه مؤلفان - پاییز ۱۳۹۷

فهرست مطالب

فصل اول

ماتریس و کاربردها



درس اول

ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

تعریف ماتریس

مفهوم ماتریس نخستین بار در کارهای ویلیام هامیلتون ریاضی‌دان ایرلندی و کیلی ریاضی‌دان انگلیسی در نیمه‌ی اول قرن نوزدهم مطرح شد. یکی از کاربردهای مهم ماتریس در فیزیک کوانتُم است. هایزنبرگ، اولین کسی که در فیزیک ماتریس‌ها را به‌کار برد جمله‌ی معروفی دارد که می‌گوید: «تنها ابزار ریاضی که من در مکانیک کوانتم به آن احتیاج دارم، ماتریس‌ها است.»

فرض کنید نمرات دروس ریاضی، فیزیک، شیمی و ادبیات آرش، نادر و فرشید به‌ترتیب از راست به چپ «۲۰، ۱۸/۵، ۱۷ و ۱۹»، «۱۹، ۱۶، ۱۴/۵ و ۱۸/۵» و «۱۶، ۱۵/۵، ۱۹ و ۲۰» باشند. می‌توانیم این نمرات را به یکی از دو صورت زیر نشان دهیم:

الف)

ستون‌ها

سطرها

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}\text{ریاضی} & \text{فیزیک} & \text{شیمی} & \text{ادبیات}\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{آرش}\\ \text{نادر}\\ \text{فرشید}\end{array} & \begin{bmatrix} ۲۰ & ۱۸/۵ & ۱۷ & ۱۹ \\ ۱۹ & ۱۶ & ۱۴/۵ & ۱۸/۵ \\ ۱۶ & ۱۵/۵ & ۱۹ & ۲۰ \end{bmatrix}\end{array}$$

در این‌جا از یک ماتریس با ۳ سطر و ۴ ستون استفاده کردیم.

ب)

ستون‌ها

سطرها

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\text{آرش} & \text{نادر} & \text{فرشید}\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{ریاضی}\\ \text{فیزیک}\\ \text{شیمی}\\ \text{ادبیات}\end{array} & \begin{bmatrix} ۲۰ & ۱۹ & ۱۶ \\ ۱۸/۵ & ۱۶ & ۱۵/۵ \\ ۱۷ & ۱۴/۵ & ۱۹ \\ ۱۹ & ۱۸/۵ & ۲۰ \end{bmatrix}\end{array}$$

و در این‌جا اطلاعات را در یک ماتریس با ۴ سطر و ۳ ستون مرتب کردیم.

تعریف: هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون یک «ماتریس» نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در ماتریس را «**درایه‌ی**» آن ماتریس می‌نامیم.

معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند A، B، C و ... نام‌گذاری می‌کنیم.

مثال: ماتریسی با ۳ سطر و ۴ ستون مثال بزنید.

حل: برای نمونه به دو ماتریس زیر توجه کنید:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \pi & ۴ \\ -۱ & ۷ & \sqrt{۲} & ۳ \\ ۵ & -۳ & ۰ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & -۲ & ۷ \\ ۱/۵ & ۰ & ۴ & -۱ \\ ۶ & -۶ & -۷ & \sqrt{۳} \end{bmatrix}$$

به هرکدام از ماتریس‌های A و B ماتریسی از مرتبه ۳×۴ (۳ در ۴) گوییم. این ماتریس دارای $۳\times۴=۱۲$ درایه است.

در ماتریس A درایه‌ی $\sqrt{۲}$ در سطر دوم و ستون سوم قرار دارد. و در ماتریس B درایه‌ی ۷ در سطر اول و ستون چهارم قرار دارد.

نکته

اگر ماتریس A دارای m سطر و n ستون باشد آن را ماتریس از مرتبه‌ی $\underbrace{m}_{\text{سطر}}\times\underbrace{n}_{\text{ستون}}$ گوییم و به صورت $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ نشان می‌دهیم.

a_{ij} را «درایه‌ی عمومی» ماتریس A می‌نامیم که $۱\le i\le m$ و $۱\le j\le n$ تغییر می‌کنند.

مثال: ماتریس‌های $A=[a_{ij}]_{۳\times۲}$ و $B=[b_{ij}]_{۲\times۴}$ را با درایه‌هایشان نشان دهید.

حل: ماتریس A دارای ۳ سطر و ۲ ستون و ماتریس B دارای ۲ سطر و ۴ ستون است:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & b_{۱۳} & b_{۱۴} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & b_{۲۳} & b_{۲۴} \end{bmatrix}$$

همان‌طور که متوجه شدید به‌عنوان مثال درایه‌ی $a_{۲۱}$ یعنی درایه‌ای از ماتریس A که در سطر دوم و ستون اول قرار دارد.

پس در حالت کلی درایه‌ی a_{ij} از ماتریس A در سطر i اُم و ستون j اُم قرار دارد.

مثال: اگر در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$ برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=۵$، برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=-۲$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=۰$. در این صورت A را با درایه‌هایش نشان دهید.

حل: ماتریس A به‌صورت $A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix}$ است. در درایه‌های $a_{۱۱}$ و $a_{۲۲}$ داریم $i=j$ پس مقدار آن‌ها برابر ۵ است.

در درایه‌ی $a_{۱۲}$ داریم $i<j$ پس طبق فرض $a_{۱۲}=۰$ و در درایه‌ی $a_{۲۱}$ داریم $i>j$ پس طبق فرض $a_{۲۱}=-۲$.

بنابراین ماتریس A به‌صورت مقابل است:

$$A=\begin{bmatrix} ۵ & ۰ \\ -۲ & ۵ \end{bmatrix}$$

مثال: درایه‌های ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۴}$ را با تعریف زیر به‌دست آورید:

$$a_{ij}=\begin{cases} i-۲j & ; \quad i=j \\ \dfrac{i+j}{۲} & ; \quad i>j \\ ۰ & ; \quad i<j \end{cases}$$

حل: ماتریس A به صورت زیر است:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & a_{۱۴} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & a_{۲۴} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} & a_{۳۴} \end{bmatrix}$$

طبق فرض داریم:

$$\left.\begin{aligned} a_{۲۱} &= \frac{۲+۱}{۲}=۱/۵ \\ a_{۳۱} &= \frac{۳+۱}{۲}=۲ \\ a_{۳۲} &= \frac{۳+۲}{۲}=۲/۵ \end{aligned}\right\}$$

در این درایه‌ها داریم $i>j$ پس از قانون دوم استفاده می‌کنیم

$$a_{۱۲}=a_{۱۳}=a_{۱۴}=a_{۲۳}=a_{۲۴}=a_{۳۴}=۰$$

در این درایه‌ها داریم $i<j$ پس از قانون سوم استفاده می‌کنیم

$$\left.\begin{aligned} a_{۱۱} &= ۱-۲(۱)=-۱ \\ a_{۲۲} &= ۲-۲(۲)=-۲ \\ a_{۳۳} &= ۳-۲(۳)=-۳ \end{aligned}\right\}$$

در این درایه‌ها داریم $i=j$ پس از قانون اول استفاده می‌کنیم.

پس ماتریس A به‌صورت زیر است:

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱/۵ & -۲ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۲/۵ & -۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

مثال: در ماتریس $A=[i+۲j]_{۲\times۴}$ مجموع درایه‌های ستون سوم چقدر است؟

حل: ماتریس A به‌صورت مقابل است:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & a_{۱۴} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & a_{۲۴} \end{bmatrix}$$

ستون سوم دارای درایه‌های $a_{۱۳}$ و $a_{۲۳}$ است.

طبق فرض:

$$a_{۱۳}=۱+۲(۳)=۷ \quad , \quad a_{۲۳}=۲+۲(۳)=۸$$

بنابراین مجموع درایه‌های ستون سوم برابر $۷+۸=۱۵$ است.

تست: ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۲}$ با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases} ۲i-j & i>j \\ i+۳j & i=j \\ i^۲-j & i<j \end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های ماتریس A برابر کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۳ ۳) ۲۱ ۴) ۲۰

حل: درایه‌های ماتریس A را با توجه به تعریف a_{ij} می‌نویسیم:

$$a_{۱۱}=۱+۳=۴ \quad , \quad a_{۱۲}=۱^۲-۲=-۱$$
$$a_{۲۱}=۴-۱=۳ \quad , \quad a_{۲۲}=۲+۶=۸$$
$$a_{۳۱}=۶-۱=۵ \quad , \quad a_{۳۲}=۶-۲=۴$$

بنابراین $A=\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ ۳ & ۸ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix}$. در نتیجه مجموع درایه‌های ماتریس A برابر $۴-۱+۳+۸+۵+۴=۲۳$ است. پس گزینه‌ی «۲» درست است.

معرفی چند ماتریس خاص

۱ **ماتریس مربعی:** اگر در ماتریس A تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها با هم برابر و مساوی n باشد، A را ماتریس «مربعی» از مرتبه‌ی n ($n\times n$) می‌نامیم. مانند ماتریس‌های زیر:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & -۴\end{bmatrix}\ \text{(ماتریس مربعی از مرتبه ۲)}\qquad B=\begin{bmatrix}b_{۱۱} & b_{۱۲} & b_{۱۳}\\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & b_{۲۳}\\ b_{۳۱} & b_{۳۲} & b_{۳۳}\end{bmatrix}\ \text{(ماتریس مربعی از مرتبه ۳)}$$

در ماتریس‌های مربعی درایه‌هایی که شماره‌ی سطر و ستون آن‌ها برابر است روی «قطر اصلی» قرار دارند. قطر دیگر این ماتریس را «قطر فرعی» می‌گوییم. (مجموع شماره‌ی سطر و ستون درایه‌هایی که روی قطر فرعی هستند برابر است با $n+۱$)

$$A=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

قطر فرعی   قطر اصلی

در ضمن در ماتریس مربعی در درایه‌های بالای قطر اصلی شماره‌ی سطر از ستون کمتر است و در درایه‌های پایین قطر اصلی شماره‌ی سطر از ستون بیشتر است. به‌عبارت دیگر اگر $i<j$ آن‌گاه a_{ij} درایه‌ی بالای قطر اصلی است و اگر $i>j$ آن‌گاه a_{ij} درایه‌ی پایین قطر اصلی است.

۲ **ماتریس سطری:** اگر ماتریس A فقط از یک سطر تشکیل شده باشد آن را یک ماتریس «سطری» می‌نامیم. مانند ماتریس‌های زیر:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۳\end{bmatrix}_{۱\times ۲}\quad ,\quad B=\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & ۴\end{bmatrix}_{۱\times ۳}\quad ,\quad C=\begin{bmatrix}۹\end{bmatrix}_{۱\times ۱}=۹$$

پس مرتبه‌ی هر ماتریس سطری به صورت $۱\times n$ است.

توجه کنید که هر ماتریس ۱×۱ مانند $A=[a]_{۱\times ۱}$ را مساوی با عدد حقیقی a تعریف می‌کنیم.

۳ **ماتریس ستونی:** اگر ماتریس فقط دارای یک ستون باشد آن را ماتریس «ستونی» می‌نامیم. مانند ماتریس‌های زیر:

$$A=\begin{bmatrix}۱\\ ۲\end{bmatrix}_{۲\times ۱}\quad ,\quad B=\begin{bmatrix}۰\\ -۱\\ \sqrt{۲}\\ ۷\end{bmatrix}_{۴\times ۱}\quad ,\quad C=\begin{bmatrix}۹۰\end{bmatrix}_{۱\times ۱}=۹۰$$

پس مرتبه‌ی هر ماتریس ستونی به‌صورت $m\times ۱$ است.

۴ **ماتریس‌های بالامثلثی و پایین‌مثلثی:** اگر A ماتریس مربعی باشد به‌طوری که همه‌ی درایه‌های زیر قطر اصلی آن برابر صفر باشند آن‌گاه A را ماتریس «بالامثلثی» می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی بالا مثلثی‌اند.

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & -۲\\ ۰ & \frac{۱}{۲} & ۴\\ ۰ & ۰ & ۵\end{bmatrix}\ ,\ C=\begin{bmatrix}-۱ & -۲ & ۴\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴\end{bmatrix}\ ,\ D=\begin{bmatrix}a & b & c\\ ۰ & d & e\\ ۰ & ۰ & f\end{bmatrix}$$

به عبارت دیگر اگر $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ بالامثلثی باشد آن‌گاه به ازای هر $i>j$ درایه‌ی a_{ij} صفر است. توجه داشته باشید در ماتریس بالامثلثی درایه‌های بالا و روی قطر اصلی هم می‌توانند صفر باشند.

به همین ترتیب اگر A یک ماتریس مربعی باشد به‌طوری که همه‌ی درایه‌های بالای قطر اصلی آن برابر صفر باشند آن‌گاه A را ماتریس «پایین‌مثلثی» می‌نامیم. مانند ماتریس‌های زیر:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۲ & ۵\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}-۲ & ۰ & ۰\\ ۴ & -۱ & ۰\\ ۷ & \sqrt{۲} & ۵\end{bmatrix}\ ,\ C=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۹ & -۲ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۰\end{bmatrix}\ ,\ D=\begin{bmatrix}a & ۰ & ۰\\ b & c & ۰\\ d & e & f\end{bmatrix}$$

به عبارت دیگر اگر $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ پایین مثلثی باشد آن‌گاه به ازای هر $i<j$ درایه‌ی a_{ij} صفر است. توجه داشته باشید در ماتریس پایین مثلثی درایه‌های روی قطر اصلی و زیر قطر اصلی هم می‌توانند صفر باشند.

مثال: ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases}۰ & i>j\\ -۲ & i=j\\ ۲i+۱ & i<j\end{cases}$ مفروض است، نوع این ماتریس را مشخص کنید.

حل: ابتدا با تعریف داده شده برای a_{ij} درایه‌های این ماتریس را به‌دست می‌آوریم:

$$a_{۱۱}=-۲\quad,\quad a_{۱۲}=۲+۱=۳\quad,\quad a_{۱۳}=۲+۱=۳$$
$$a_{۲۱}=۰\quad,\quad a_{۲۲}=-۲\quad,\quad a_{۲۳}=۴+۱=۵$$
$$a_{۳۱}=۰\quad,\quad a_{۳۲}=۰\quad,\quad a_{۳۳}=-۲$$

بنابراین ماتریس A به‌صورت مقابل است.

$$A=\begin{bmatrix}-۲ & ۳ & ۳\\ ۰ & -۲ & ۵\\ ۰ & ۰ & -۲\end{bmatrix}$$

درایه‌های زیر قطر اصلی ماتریس مربعی A صفر است پس A ماتریس بالامثلثی است.

تست: ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ را درنظر بگیرید. با کدام تعریف برای a_{ij} ماتریس A پایین مثلثی است؟ (در گزینه‌ها [ ] نماد جزءصحیح است.)

۱) $\begin{cases}\left[\dfrac{i+j}{۲}\right]-۲ & i>j\\ i-j & i\le j\end{cases}$
۲) $\begin{cases}\left[\dfrac{i-j}{۲}\right]-۲ & i>j\\ i+j & i\le j\end{cases}$
۳) $\begin{cases}\left[\dfrac{i+j}{۳}\right]-۱ & i<j\\ i-j & i\ge j\end{cases}$
۴) $\begin{cases}\left[\dfrac{i-j}{۳}\right]-۲ & i<j\\ i+j & i\ge j\end{cases}$

حل: ماتریس مربعی A در صورتی پایین‌مثلثی است که درایه‌های بالای قطر اصلی برابر با صفر باشند. پس به‌ازای هر $i<j$ باید $a_{ij}=۰$ باشد. در گزینه‌ی «۳» به‌ازای $i<j$ مقدار $\dfrac{i+j}{۳}$ بین اعداد ۱ و ۲ قرار دارد (اگر $i=۱$ و $j=۲$ باشد $\dfrac{i+j}{۳}$ دقیقاً ۱ می‌شود.) پس $\left[\dfrac{i+j}{۳}\right]=۱$ در نتیجه $\left[\dfrac{i+j}{۳}\right]-۱=۰$ پس با این تعریف ماتریس A پایین‌مثلثی است. (اگر $i=۱$ و $j=۳$ را درنظر بگیرید در گزینه‌های «۱»، «۲» و «۴» درایه‌ی $a_{۱۳}$ مخالف صفر می‌شود، پس پایین‌مثلثی نیستند.)

۵ **ماتریس قطری:** ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند. توجه کنید که درایه‌های واقع بر قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند. مانند ماتریس‌های زیر:

$$A=\begin{bmatrix}-۲ & ۰\\ ۰ & ۴\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۴ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}\quad,\quad C=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}\quad,\quad D=\begin{bmatrix}a & ۰ & ۰\\ ۰ & b & ۰\\ ۰ & ۰ & c\end{bmatrix}$$

پس ماتریس قطری هم ماتریس بالامثلثی و هم ماتریس پایین‌مثلثی محسوب می‌شود.

۶ **ماتریس اسکالر:** اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند آن را یک ماتریس «اِسکالر» می‌نامیم. مانند ماتریس‌های زیر:

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\quad,\quad C=\begin{bmatrix}\sqrt{۲} & ۰ & ۰\\ ۰ & \sqrt{۲} & ۰\\ ۰ & ۰ & \sqrt{۲}\end{bmatrix}\quad,\quad D=[۷]=۷\quad,\quad E=\begin{bmatrix}x & ۰ & ۰\\ ۰ & x & ۰\\ ۰ & ۰ & x\end{bmatrix}$$

می‌توان گفت: هر ماتریس اسکالر ماتریس قطری است ولی هر ماتریس قطری ممکن است ماتریس اسکالر نباشد.

مثال: ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ اسکالر است. اگر مجموع تمام درایه‌های آن برابر ۱۸ باشد، آن‌گاه حاصل‌ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن چند است؟

حل: طبق تعریف ماتریس اسکالر، A به‌صورت مقابل است:

$$A=\begin{bmatrix}x & ۰ & ۰\\ ۰ & x & ۰\\ ۰ & ۰ & x\end{bmatrix}$$

بنابراین طبق فرض مسأله: $x+x+x=۱۸\Rightarrow x=۶$

پس: $(x)(x)(x)=۶^۳=۲۱۶$

۷ **ماتریس همانی (واحد):** اگر ماتریس A اسکالر باشد و همه‌ی درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن یک باشد آن را ماتریس «همانی» می‌نامیم.

معمولاً ماتریس همانی را با I_n نمایش می‌دهیم که در آن n مرتبه‌ی ماتریس است. مانند ماتریس‌های زیر:

$$I_1=[1] \quad , \quad I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \quad , \quad I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

به‌عبارت دیگر می‌توان درایه‌های ماتریس همانی $I_n=[a_{ij}]_{n\times n}$ را به صورت زیر تعریف کرد.

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

۸ **ماتریس صفر:** ماتریسی است که همه‌ی درایه‌های آن صفر باشند. ماتریس صفر را با نماد $\bar{O}$ نشان می‌دهیم. مانند ماتریس‌های زیر:

$$\bar{O}=[0]_{1\times 1} \quad , \quad \bar{O}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}_{2\times 2} \quad , \quad \bar{O}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}_{3\times 2} \quad , \quad \bar{O}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

توجه کنید ماتریس صفر می‌تواند مربعی یا غیرمربعی باشد.

مثال: اگر ماتریس $\begin{bmatrix}1+x & z^3+y\\ 2y-2x & z^2+t\end{bmatrix}$ ماتریس صفر باشد آن‌گاه مقدار $2t^2-3x^3$ را به‌دست آورید.

حل: در ماتریس صفر همه‌ی درایه‌ها صفر است. بنابراین:

$$1+x=0\Rightarrow x=-1 \quad , \quad 2y-2x=0 \overset{x=-1}{\Rightarrow} y=-1 \quad , \quad z^3+y=0 \overset{y=-1}{\Rightarrow} z=1 \quad , \quad z^2+t=0 \overset{z=1}{\Rightarrow} t=-1$$

در نتیجه مقدار خواسته شده برابر است با:

$$2t^2-3x^3=2(-1)^2-3(-1)^3=2+3=5$$

تساوی دو ماتریس

دو ماتریس هم‌مرتبه‌ی $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ را مساوی می‌گوییم هرگاه درایه‌های آن‌ها نظیر به نظیر با هم برابر باشند. به عبارت دیگر:

$$\forall i\,,\,j \quad ; \quad a_{ij}=b_{ij} \Leftrightarrow [a_{ij}]=[b_{ij}]$$

یعنی:

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}_{2\times 3}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\end{bmatrix}_{2\times 3} \Leftrightarrow \begin{cases}a_{11}=b_{11}\\a_{12}=b_{12}\\a_{13}=b_{13}\\a_{21}=b_{21}\\a_{22}=b_{22}\\a_{23}=b_{23}\end{cases}$$

مثال: دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}2x-y&3&4\\1&2z&2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}4&x-y+1&4\\1&10&x-2y\end{bmatrix}$ با هم برابرند. $x+y+z$ چقدر است؟

حل: طبق تعریف دو ماتریس مساوی داریم:

$$\begin{cases}\left.\begin{matrix}4=2x-y\\ x-y+1=3\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}2x-y=4\\-x+y=-2\end{cases}\Rightarrow x=2\Rightarrow y=0\\ 10=2z\Rightarrow z=5 \qquad\qquad \Rightarrow x+y+z=7\\ x-2y=2\Rightarrow 2-2(0)=2\ \checkmark\end{cases}$$

تست: اگر دو ماتریس $\begin{bmatrix} 1+2x & y+x \\ 1-z & x^2+y \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} x-y & 3y-1 \\ 3 & k \end{bmatrix}$ مساوی باشند، آن‌گاه حاصل $z+k$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۱- ۴) ۲

حل: هر دو ماتریس ۲×۲ بوده پس هم‌مرتبه هستند. بنابراین مساوی‌اند هرگاه درایه‌های نظیر آن‌ها برابر هم باشند. بنابراین:

$$\begin{cases} \begin{cases} x-y=1+2x \\ 3y-1=y+x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ x-2y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases} \\ 1-z=3 \Rightarrow z=-2 \\ x^2+y=k \underset{y=0}{\overset{x=-1}{\Longrightarrow}} k=1 \end{cases}$$

در نتیجه حاصل $z+k$ برابر $-1=1+2-$ است. پس گزینه‌ی «۳» درست است.

جمع ماتریس‌ها

اگر دو ماتریس هم‌مرتبه‌ی A و B مفروض باشند برای جمع یا تفاضل آن‌ها کافی است درایه‌های دو ماتریس را نظیر به نظیر با هم جمع یا از هم کم کنیم که حاصل مجموع یا تفاضل A و B ماتریسی مانند C است که با A و B هم‌مرتبه است.

$$A=[a_{ij}]_{m\times n} \quad , \quad B=[b_{ij}]_{m\times n} \quad \Rightarrow \begin{cases} A+B=[a_{ij}]+[b_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}] \\ A-B=[a_{ij}]-[b_{ij}]=[a_{ij}-b_{ij}] \end{cases}$$

مثال: دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 7 \\ 9 & -4 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. ماتریس‌های $A+B$ و $B-A$ را تشکیل دهید.

حل:

$$B-A=\begin{bmatrix} 4-1 & -2-2 \\ 7-(-1) & -2-4 \\ -4-0 & 9-5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 8 & -6 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} 1+4 & 2+(-2) \\ -1+7 & 4+(-2) \\ 0+(-4) & 5+9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 2 \\ -4 & 14 \end{bmatrix}$$

مثال: دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. ماتریس $C=[c_{ij}]_{3\times 3}$ را چنان تشکیل دهید که تساوی $A+C=B$ برقرار باشد.

حل:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2+c_{11} & 3+c_{12} & 4+c_{13} \\ -1+c_{21} & 2+c_{22} & 0+c_{23} \\ 4+c_{31} & -1+c_{32} & 5+c_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} c_{11}=-1 & , & c_{12}=-3 & , & c_{13}=-6 \\ c_{21}=5 & , & c_{22}=-5 & , & c_{23}=1 \\ c_{31}=-3 & , & c_{32}=3 & , & c_{33}=-2 \end{matrix} \Rightarrow C=\begin{bmatrix} -1 & -3 & -6 \\ 5 & -5 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

بنابراین از تساوی $A+C=B$ می‌توان تساوی $C=B-A$ را نتیجه گرفت.

تست: اگر $A=[ij]_{2\times 3}$ و $B=[j-3i]_{2\times 3}$ دو ماتریس باشند، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $A+B$ برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) ۵ ۳) ۱ ۴) ۳

حل: از آن‌جایی که این دو ماتریس هم‌مرتبه هستند، درنتیجه می‌توان آن‌ها را جمع کرد. ابتدا درایه‌های هر دو ماتریس A و B را به‌دست می‌آوریم. در ماتریس A درایه‌ها به صورت $a_{ij}=ij$ تعریف شده از پس:

$$\begin{matrix} a_{11}=1 & , & a_{12}=2 & , & a_{13}=3 \\ a_{21}=2 & , & a_{22}=4 & , & a_{23}=6 \end{matrix}$$

در نتیجه $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

از طرف دیگر در ماتریس B درایه‌ها به‌صورت $b_{ij}=j-3i$ تعریف شده‌اند. پس:

$$b_{11}=1-3=-2 \quad , \quad b_{12}=2-3=-1 \quad , \quad b_{13}=3-3=0$$
$$b_{21}=1-6=-5 \quad , \quad b_{22}=2-6=-4 \quad , \quad b_{23}=3-6=-3$$

در نتیجه $B=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 0\\ -5 & -4 & -3\end{bmatrix}$.

بنابراین ماتریس $A+B$ برابر است با:

$$A+B=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 3\\ -3 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس $A+B$ برابر ۳ است. بنابراین گزینه‌ی «۴» درست است.

ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس

برای ضرب یک عدد حقیقی در ماتریسی مانند A آن عدد را در تمام درایه‌های ماتریس ضرب می‌کنیم. یعنی:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n} \quad , \quad r\in\mathbb{R} \Rightarrow rA=r[a_{ij}]_{m\times n}=[ra_{ij}]_{m\times n}$$

اگر $r=-1$ آن‌گاه $(-1)A=-A$.

در این حالت $-A$ را قرینه‌ی ماتریس A می‌نامیم و اگر $r=0$ آن‌گاه $(0)A=\bar{O}$. هم‌چنین اگر k عددی حقیقی و دلخواه باشد، آن‌گاه:

$$k\bar{O}_{m\times n}=\bar{O}_{m\times n}$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\\ 7 & 6\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}2 & -7\\ -3 & 0\\ 4 & -5\end{bmatrix}$ آن‌گاه ماتریس $2A-3B$ را تشکیل دهید.

حل:

$$2A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -6 & 8\\ 14 & 12\end{bmatrix} \quad , \quad 3B=\begin{bmatrix}6 & -21\\ -9 & 0\\ 12 & -15\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$2A-3B=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -6 & 8\\ 14 & 12\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6 & -21\\ -9 & 0\\ 12 & -15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 25\\ 3 & 8\\ 2 & 27\end{bmatrix}$$

تست: ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases}j-2i & i\le j\\ i-j & i>j\end{cases}$ و ماتریس $B=[b_{ij}]_{3\times 3}$ با درایه‌های $b_{ij}=\begin{cases}i-2j & i<j\\ j-i & i\ge j\end{cases}$ مفروض‌اند. ماتریس $2A+2B$ چگونه است؟

۱) قطری　　۲) اسکالر　　۳) بالامثلثی　　۴) پایین‌مثلثی

حل: ابتدا درایه‌های ماتریس‌های A و B را با توجه به تعریف آن‌ها به‌دست می‌آوریم:

$$a_{11}=1-2=-1 \quad , \quad a_{12}=2-2=0 \quad , \quad a_{13}=3-2=1$$
$$a_{21}=2-1=1 \quad , \quad a_{22}=2-4=-2 \quad , \quad a_{23}=3-4=-1$$
$$a_{31}=3-1=2 \quad , \quad a_{32}=3-2=1 \quad , \quad a_{33}=3-6=-3$$

پس ماتریس A به‌صورت مقابل است:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & 1 & -3\end{bmatrix}$$

از طرف دیگر برای ماتریس B داریم:

$$b_{11}=1-1=0 \quad , \quad b_{12}=1-4=-3 \quad , \quad b_{13}=1-6=-5$$
$$b_{21}=1-2=-1 \quad , \quad b_{22}=2-2=0 \quad , \quad b_{23}=2-6=-4$$
$$b_{31}=1-3=-2 \quad , \quad b_{32}=2-3=-1 \quad , \quad b_{33}=3-3=0$$

پس:

$$B=\begin{bmatrix}0 & -3 & -5\\ -1 & 0 & -4\\ -2 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$2A+2B=2\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & -1\\ 2 & 1 & -3\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0 & -3 & -5\\ -1 & 0 & -4\\ -2 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -6 & -8\\ 0 & -4 & -10\\ 0 & 0 & -6\end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $2A+2B$ ماتریس بالامثلثی است. پس گزینه‌ی «۳» درست است. (با توجه به گزینه‌ها می‌توان فقط مثلاً درایه‌ی ۱۲ را به‌دست آورد و گزینه‌ی صحیح را انتخاب کرد.)

خواص مهم جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس

فرض کنید A، B و C ماتریس‌های هم مرتبه و $m\times n$ و r و s دو عدد حقیقی باشند. خواص زیر به راحتی با توجه به تعریف جمع ماتریس‌ها و تعریف ضرب عدد در ماتریس قابل اثبات‌اند:

الف) خاصیت جابه‌جایی جمع $A+B=B+A$

ب) خاصیت شرکت‌پذیری جمع $A+(B+C)=(A+B)+C$

پ) خاصیت عضو خنثی برای عمل جمع ماتریس $A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$

ت) خاصیت عضو قرینه $A+(-A)=(-A)+A=A-A=\bar{O}$

ث) $r(A\pm B)=rA\pm rB$

ج) $(r\pm s)A=rA\pm sA$

چ) $rA=rB \quad , \quad r\neq 0 \Rightarrow A=B$

ح) $A=B\Rightarrow rA=rB$

خ) $(rs)A=r(sA)=s(rA)$

مثال: به‌عنوان نمونه خاصیت «ث» را اثبات کنید.

حل: فرض کنید $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ در این صورت اگر $r\in\mathbb{R}$ آن‌گاه خواهیم داشت:

$$r(A\pm B)=r([a_{ij}]_{m\times n}\pm[b_{ij}]_{m\times n})=r[a_{ij}\pm b_{ij}]_{m\times n}=[r(a_{ij}\pm b_{ij})]$$

$=[ra_{ij}\pm rb_{ij}]$ (توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع یا تفریق در $\mathbb{R}$)

$=[ra_{ij}]\pm[rb_{ij}]$ (تعریف جمع یا تفاضل دو ماتریس)

$=r[a_{ij}]\pm r[b_{ij}]$ (تعریف ضرب عدد در ماتریس)

$=rA\pm rB$

مثال: ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}0 & -4 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}$ در تساوی $2(A+\frac{3}{2}C)=3(2B-C)$ صدق می‌کنند، درایه‌های ماتریس C را به‌دست آورید.

حل: با استفاده از ویژگی‌های جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس تساوی داده‌شده در مسئله را ساده می‌کنیم.

$$2(A+\frac{3}{2}C)=3(2B-C)\Rightarrow 2A+3C=6B-3C\Rightarrow 6C=6B-2A\overset{\text{تقسیم بر ۲}}{\Rightarrow} 3C=3B-A$$

بنابراین:

$$3C=3\begin{bmatrix}0 & -4 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -11 & 2\\ 3 & -7 & 4\end{bmatrix}$$

درنتیجه:

$$C=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2 & -11 & 2\\ 3 & -7 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & -\frac{11}{3} & \frac{2}{3}\\ 1 & -\frac{7}{3} & \frac{4}{3}\end{bmatrix}$$

ضرب یک ماتریس سطری در یک ماتریس ستونی

قبل از تعریف ضرب یک ماتریس سطری در یک ماتریس ستونی به مثال زیر توجه کنید.

مثال: اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times۳}$ و $B=[b_{ij}]_{۳\times۴}$ آن‌گاه هریک از عبارات زیر را توصیف کنید. به‌طوری که k عدد طبیعی در فاصله‌ی $۱\le k\le ۳$ باشد.

۱) $a_{۲k}$ ۲) $\sum_{k=۱}^{۳} a_{۲k}$ ۳) $\sum_{k=۱}^{۳} a_{۲k}b_{k۳}$

حل: ۱) عبارت $a_{۲k}$ با تغییر k مشخص کننده‌ی درایه‌های سطر دوم ماتریس A است به عبارتی $a_{۲k}$ نمایشگر درایه‌های $a_{۲۱}$ و $a_{۲۲}$ و $a_{۲۳}$ در ماتریس A است.

۲) عبارت $\sum_{k=۱}^{۳} a_{۲k}$ بنا به تعریف سیگما مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس A است. یعنی:

$$\sum_{k=۱}^{۳} a_{۲k} = a_{۲۱}+a_{۲۲}+a_{۲۳}$$

۳) عبارت $\sum_{k=۱}^{۳} a_{۲k}b_{k۳}$ درایه‌های سطر دوم ماتریس A را در درایه‌های ستون سوم B نظیر به نظیر ضرب کرده و جواب‌های آن‌ها را جمع می‌کند. یعنی:

$$\sum_{k=۱}^{۳} a_{۲k}b_{k۳} = a_{۲۱}b_{۱۳}+a_{۲۲}b_{۲۳}+a_{۲۳}b_{۳۳} = \begin{bmatrix} a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{۱۳}\\ b_{۲۳}\\ b_{۳۳}\end{bmatrix}$$

حال اگر A ماتریسی سطری و B ماتریسی ستونی باشد به‌طوری که تعداد ستون‌های A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشند در این صورت $A\times B$ تعریف می‌شود و برای ضرب کافی است هر درایه‌ی ماتریس A را در درایه‌ی نظیرش در B ضرب کرده و حاصل این ضرب‌ها را با هم جمع کنیم که در این صورت ماتریسی ۱×۱ یا یک عدد حقیقی به‌دست می‌آید.

به عنوان نمونه فرض کنید $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}_{۱\times۳}$ و $B=\begin{bmatrix} -۲\\ ۷\\ ۶\end{bmatrix}_{۳\times۱}$ در این صورت داریم:

$$A\times B = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} -۲\\ ۷\\ ۶\end{bmatrix} = ۲(-۲)+۰(۷)-\frac{۱}{۲}(۶) = -۷$$

ضرب ماتریس در ماتریس

اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ (تعداد ستون‌های A با تعداد سطرهای B برابر باشد.) در این صورت $A\times B$ قابل تعریف است. $A\times B$ ماتریسی مانند C بوده که مرتبه‌ی آن $m\times p$ است. هر درایه‌ای از C مانند c_{ij} از ضرب سطر i اُم ماتریس A در ستون j اُم ماتریس B به‌دست می‌آید.

به عبارت دیگر درایه‌های c_{ij} به‌صورت مقابل به‌دست می‌آیند.

$$c_{ij}=\sum_{k=۱}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

زیرا a_{ik} نمایشگر درایه‌های سطر i ام و b_{kj} نمایشگر درایه‌های ستون j ام B هستند و $\sum_{k=۱}^{n} a_{ik}b_{kj}$ نمایشگر ضرب سطر iام ماتریس A در ستون jام ماتریس B است.

به عنوان مثال فرض کنید $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳\\ -۳ & ۰\end{bmatrix}_{۲\times۲}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳\\ ۴ & ۵ & ۰\end{bmatrix}_{۲\times۳}$ می‌خواهیم $A\times B$ را تشکیل دهیم. $A\times B$ ماتریسی به صورت $C=[c_{ij}]_{۲\times۳}$ است.

$$A_{۲\times۲}\times B_{۲\times۳}=C_{۲\times۳} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & ۳\\ -۳ & ۰\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳\\ ۴ & ۵ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{۱۱} & c_{۱۲} & c_{۱۳}\\ c_{۲۱} & c_{۲۲} & c_{۲۳}\end{bmatrix}$$

$$c_{۱۱}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲\\ ۴\end{bmatrix}=۲(۲)+۳(۴)=۱۶ \quad , \quad c_{۲۱}=\begin{bmatrix} -۳ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲\\ ۴\end{bmatrix}=-۳(۲)+۰(۴)=-۶$$

$$c_{۱۲}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱\\ ۵\end{bmatrix}=۲(-۱)+۳(۵)=۱۳ \quad , \quad c_{۲۲}=\begin{bmatrix} -۳ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱\\ ۵\end{bmatrix}=-۳(-۱)+۰(۵)=۳ \quad \Rightarrow C=\begin{bmatrix} ۱۶ & ۱۳ & ۶\\ -۶ & ۳ & -۹\end{bmatrix}$$

$$c_{۱۳}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳\\ ۰\end{bmatrix}=۲(۳)+۳(۰)=۶ \quad , \quad c_{۲۳}=\begin{bmatrix} -۳ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳\\ ۰\end{bmatrix}=-۳(۳)+۰(۰)=-۹$$

مثال: دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ -۱ & ۳\\ ۷ & ۰\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۰ & ۴ & -۱\end{bmatrix}$ مفروض‌اند. $A\times B$ و $B\times A$ را به‌دست آورید.

حل: چون $A=[a_{ij}]_{۳\times ۲}$ و $B=[b_{ij}]_{۲\times ۳}$ پس $A\times B$ ماتریسی ۳×۳ است.

$$A\times B=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ -۱ & ۳\\ ۷ & ۰\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۰ & ۴ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳(۱)+۲(۰) & ۳(۲)+۲(۴) & ۳(۳)+۲(-۱)\\ -۱(۱)+۳(۰) & -۱(۲)+۳(۴) & -۱(۳)+۳(-۱)\\ ۷(۱)+۰(۰) & ۷(۲)+۰(۴) & ۷(۳)+۰(-۱)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۱۴ & ۷\\ -۱ & ۱۰ & -۶\\ ۷ & ۱۴ & ۲۱\end{bmatrix}$$

ماتریس $B\times A$ یک ماتریس ۲×۲ است.

$$B\times A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۰ & ۴ & -۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ -۱ & ۳\\ ۷ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱(۳)+۲(-۱)+۳(۷) & ۱(۲)+۲(۳)+۳(۰)\\ ۰(۳)+۴(-۱)+(-۱)(۷) & ۰(۲)+۴(۳)+(-۱)(۰)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲۲ & ۸\\ -۱۱ & ۱۲\end{bmatrix}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید لزومی ندارد که $A\times B$ با $B\times A$ برابر باشد. (از این پس $A\times B$ را به‌صورت AB نشان خواهیم داد.)

مثال: ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}۲ & -۱ & ۳\\ ۱ & ۴ & ۵\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & ۵\\ -۲ & ۷\end{bmatrix}$ مفروض‌اند. ماتریس‌های AB و BA را در صورت وجود تشکیل دهید.

حل: چون $A=[a_{ij}]_{۲\times ۳}$ و $B=[b_{ij}]_{۲\times ۲}$ بنابراین AB وجود ندارد زیرا تعداد ستون‌های A با تعداد سطرهای B برابر نیست. ولی BA وجود دارد.

$$BA=C\Rightarrow\begin{bmatrix}۱ & ۵\\ -۲ & ۷\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & -۱ & ۳\\ ۱ & ۴ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{۱۱} & c_{۱۲} & c_{۱۳}\\ c_{۲۱} & c_{۲۲} & c_{۲۳}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱(۲)+۵(۱) & ۱(-۱)+۵(۴) & ۱(۳)+۵(۵)\\ -۲(۲)+۷(۱) & -۲(-۱)+۷(۴) & -۲(۳)+۷(۵)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷ & ۱۹ & ۲۸\\ ۳ & ۳۰ & ۲۹\end{bmatrix}$$

تست: ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}۱۳ & ۱۲ & -۳\\ ۳ & ۱ & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & m & -۵\\ ۱۱ & ۵ & ۱ & ۱۹\\ ۲۱ & \sqrt{۷} & ۲ & -۲۳\end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر درایه‌ی سطر دوم، ستون سوم AB برابر ۹ باشد آن‌گاه m برابر کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۹

حل: برای پیدا کردن درایه سطر دوم ستون سوم ماتریس AB کافیست سطر دوم A را در ستون سوم B ضرب کنیم، به عبارت دیگر لازم نیست همه‌ی درایه‌های ماتریس AB را پیدا کنیم.

$$\text{درایه‌ی سطر دوم ستون سوم } AB=\begin{bmatrix}۳ & ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m\\ ۱\\ ۲\end{bmatrix}=۳m+۱+۲=۳m+۳$$

بنا به فرض سؤال داریم:

$$۳m+۳=۹\Rightarrow ۳m=۶\Rightarrow m=۲$$

پس گزینه‌ی «۲» درست است.

مثال: دو ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times ۳}$ با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases}i-j & i<j\\ i+j & i=j\\ i-۲j & i>j\end{cases}$ و $B=[i^{۲}-۲j]_{۳\times ۲}$ را درنظر بگیرید. درایه‌های ماتریس AB را به‌دست آورید.

حل: ابتدا درایه‌های هر دو ماتریس را محاسبه می‌کنیم.

$$\left.\begin{matrix}a_{۱۱}=۱+۱=۲, & a_{۱۲}=۱-۲=-۱, & a_{۱۳}=۱-۳=-۲\\ a_{۲۱}=۲-۲=۰, & a_{۲۲}=۲+۲=۴, & a_{۲۳}=۲-۳=-۱\end{matrix}\right\}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۲ & -۱ & -۲\\ ۰ & ۴ & -۱\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix}b_{۱۱}=۱^{۲}-۲=-۱, & b_{۱۲}=۱^{۲}-۴=-۳\\ b_{۲۱}=۲^{۲}-۲=۲, & b_{۲۲}=۲^{۲}-۴=۰\\ b_{۳۱}=۹-۲=۷, & b_{۳۲}=۹-۴=۵\end{matrix}\right\}\Rightarrow B=\begin{bmatrix}-۱ & -۳\\ ۲ & ۰\\ ۷ & ۵\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$AB=\begin{bmatrix}۲ & -۱ & -۲\\ ۰ & ۴ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & -۳\\ ۲ & ۰\\ ۷ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱۸ & -۱۶\\ ۱ & -۵\end{bmatrix}$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$. مقادیر a و b را طوری به‌دست آورید که حاصل‌ضرب $A\times B$ ماتریسی قطری باشد.

حل: بنا بر فرض سؤال ماتریس AB باید ماتریسی قطری باشد. پس لازم است درایه‌های سطر اول ستون دوم و همچنین سطر دوم ستون اول AB برابر صفر باشد. پس ابتدا ماتریس AB را به‌دست می‌آوریم.

$$A\times B=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴+۳a & -۸+۲a\\ b-۳ & -۲b-۲\end{bmatrix}$$

چون AB قطری است بنابر آنچه گفته شد باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}-۸+۲a=۰\Rightarrow a=۴\\ b-۳=۰\Rightarrow b=۳\end{cases}$$

(البته نیازی به به‌دست آوردن $۴+۳a$ و $-۲b-۲$ نیست.)

مثال: ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}۳ & -۲ & ۵\\ ۴ & -۱ & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۴ & -۱\\ ۰ & ۶\\ ۲ & -۲\end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر درایه‌ی سطر اول و ستون دوم AB برابر x و درایه‌ی سطر دوم و ستون اول AB برابر y باشد، آن‌گاه $x+y$ را به‌دست آورید.

حل: به‌جای محاسبه‌ی ماتریس AB فقط دو درایه‌ی خواسته شده را پیدا می‌کنیم.

$$AB \text{ درایه‌ی سطر اول، ستون دوم } = (A \text{ سطر اول})\times(B \text{ ستون دوم})=\begin{bmatrix}۳ & -۲ & ۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱\\ ۶\\ -۲\end{bmatrix}=-۳-۱۲-۱۰=-۲۵\Rightarrow x=-۲۵$$

از طرف دیگر:

$$AB \text{ درایه‌ی سطر دوم و ستون اول } = (A \text{ سطر دوم})\times(B \text{ ستون اول})=\begin{bmatrix}۴ & -۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴\\ ۰\\ ۲\end{bmatrix}=۱۶+۰+۲=۱۸\Rightarrow y=۱۸$$

بنابراین $x+y=-۲۵+۱۸=-۷$

نکته

اگر A و B دو ماتریسی باشند که AB یا BA یا هر دو تعریف‌شده باشند آن‌گاه لزوماً AB با BA برابر نیست. ولی می‌توان مثال‌هایی یافت که $AB=BA$ باشد. در این صورت گوییم برای دو ماتریس A و B ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد و یا به طور اختصار «جابه‌جایی» است.

اگر $AB=BA$ آن‌گاه حتماً A و B مربعی بوده و مرتبه‌ی آن‌ها برابر است.

مثال: نشان دهید ضرب ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۷ & ۴\\ ۶ & ۳\end{bmatrix}$ دارای خاصیت جابه‌جایی است.

حل: AB و BA هر دو ماتریس‌های ۲×۲ هستند.

$$AB=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷ & ۴\\ ۶ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱(۷)+۲(۶) & ۱(۴)+۲(۳)\\ ۳(۷)-۱(۶) & ۳(۴)-۱(۳)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۹ & ۱۰\\ ۱۵ & ۹\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}۷ & ۴\\ ۶ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷(۱)+۴(۳) & ۷(۲)+۴(-۱)\\ ۶(۱)+۳(۳) & ۶(۲)+۳(-۱)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۹ & ۱۰\\ ۱۵ & ۹\end{bmatrix}$$

پس $AB=BA$.

تست: اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & -۳\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}m-n & n-۱\\ -۴ & -۳\end{bmatrix}$ و $AB=BA$. آن‌گاه مقدار $۳m-۲n$ برابر کدام است؟

۱) -۴　　۲) ۶　　۳) صفر　　۴) ۳

حل: می‌دانیم در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد. پس ماتریس‌های AB و BA را محاسبه کرده و بنابر فرض سؤال آن‌ها را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$AB=\begin{bmatrix}۲ & -۳\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m-n & n-۱\\ -۴ & -۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲m-۲n+۱۲ & ۲n-۲+۹\\ ۳m-۳n-۸ & ۳n-۳-۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲m-۲n+۱۲ & ۲n+۷\\ ۳m-۳n-۸ & ۳n-۹\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}m-n & n-۱\\ -۴ & -۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & -۳\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲m-۲n+۳n-۳ & -۳m+۳n+۲n-۲\\ -۸-۹ & ۱۲-۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲m+n-۳ & -۳m+۵n-۲\\ -۱۷ & ۶\end{bmatrix}$$

حال داریم:

$$AB = BA \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲m-۲n+۱۲ & ۲n+۷ \\ ۳m-۳n-۸ & ۳n-۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲m+n-۳ & -۳m+۵n-۲ \\ -۱۷ & ۶ \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} ۳n-۹=۶ \Rightarrow n=۵ \\ ۳m-۳n-۸=-۱۷ \Rightarrow ۳m-۱۵-۸=-۱۷ \Rightarrow m=۲ \end{cases}$$

(به راحتی می‌توان دید که $m=۲$ و $n=۵$ در شرایط دیگر برابری نیز صدق می‌کنند)

در نتیجه $۳m-۲n=۶-۱۰=-۴$ پس گزینه‌ی «۱» درست است.

مثال: برای ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & -۴ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ نشان دهید که ماتریس‌های AB و BA برابر نیستند.

حل: هر دو ماتریس AB و BA را تشکیل می‌دهیم:

$$AB=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & -۴ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱+۲ & -۴+۰ \\ ۱+۳ & ۴+۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & -۴ \\ ۴ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} -۱ & -۴ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱+۴ & -۲-۱۲ \\ ۱+۰ & ۲+۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & -۱۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

ملاحظه می‌کنید که دو ماتریس به‌دست آمده با هم برابر نیستند.

مثال: نشان دهید ماتریس‌های به فرم $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ خاصیت جابه‌جایی دارند. این موضوع را در مورد ماتریس به شکل $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ نیز بررسی کنید.

حل: دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}$ را درنظر می‌گیریم.

$$AB=\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ac+bd & ad+bc \\ bc+ad & bd+ac \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ac+bd & bc+ad \\ ad+bc & bd+ac \end{bmatrix}$$

بنابراین $AB=BA$.

به همین ترتیب برای ماتریس دیگر نیز می‌توان عمل کرد.

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & -۲ \\ -۱ & ۲ & -۲ \\ -۱ & ۲ & -۲ \end{bmatrix}$ آن‌گاه AB را تشکیل دهید.

حل: AB ماتریسی ۲×۳ خواهد بود.

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۲ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & -۲ \\ -۱ & ۲ & -۲ \\ -۱ & ۲ & -۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱(-۱)-۱(-۱)+۰(-۱) & ۱(۲)-۱(۲)+۰(۲) & ۱(-۲)-۱(-۲)+۰(-۲) \\ ۲(-۱)-۱(-۱)-۱(-۱) & ۲(۲)-۱(۲)-۱(۲) & ۲(-۲)-۱(-۲)-۱(-۲) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\bar{O}$$

ملاحظه می‌کنید $AB=\bar{O}$ ولی هیچ‌کدام از ماتریس‌های A یا B صفر نیستند.

نکته

اگر برای دو ماتریس A و B داشته‌باشیم $AB=\bar{O}$ آن‌گاه لزومی ندارد که یکی از ماتریس‌های A یا B حتماً ماتریس صفر باشند.

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$ آن‌گاه ماتریس مربعی مرتبه‌ی دوم X را چنان تعیین کنید که $AX=\bar{O}$ برقرار باشد.

حل: فرض کنید $X=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ در این صورت داریم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x+۲z & y+۲t \\ ۲x+۴z & ۲y+۴t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+۲z=۰ \Rightarrow x=-۲z \\ y+۲t=۰ \Rightarrow y=-۲t \\ ۲x+۴z=۰ \Rightarrow x=-۲z \\ ۲y+۴t=۰ \Rightarrow y=-۲t \end{cases} \Rightarrow X=\begin{bmatrix} -۲z & -۲t \\ z & t \end{bmatrix}$$

با انتخاب مقادیر مختلف برای z و t ماتریس‌های متنوعی برای X پیدا می‌شود. به‌عنوان مثال $X=\begin{bmatrix} -۲ & -۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $X=\begin{bmatrix} -۴ & ۰ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ می‌توانند جواب مسأله باشند.

خواص عمل ضرب ماتریس‌ها

۱ در حالت کلی AB و BA با هم برابر نیستند. (به بیان دیگر در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد)

۲ اگر ماتریس همانی (واحد) I_n را از چپ یا راست در $A_{n\times n}$ ضرب کنیم حاصل خود $A_{n\times n}$ می‌شود. یعنی: $A_{n\times n}\times I_n = I_n\times A_{n\times n} = A_{n\times n}$

I_n و $A_{n\times n}$ خاصیت جابه‌جایی دارند.

در واقع I_n مانند عدد ۱ در اعداد بوده و عضو خنثی برای عمل ضرب است. همچنین رابطه‌های زیر را برای ماتریس غیرمربعی A می‌توان نوشت:

$$I_n A_{n\times m} = A_{n\times m} \quad , \quad A_{n\times m}\times I_m = A_{n\times m}$$

۳ می‌توان عمل ضرب در ماتریس‌ها را در عمل جمع یا تفریق ماتریس‌ها پخش (توزیع) کرد. یعنی:

اگر $C=[c_{ij}]_{p\times n}$ ، $B=[b_{ij}]_{p\times n}$ و $A=[a_{ij}]_{m\times p}$ آن‌گاه: $A\times(B\pm C)=A\times B\pm A\times C$

و اگر $A=[a_{ij}]_{n\times m}$ آن‌گاه: $(B\pm C)A = BA\pm CA$

۴ اگر $A=[a_{ij}]_{m\times p}$ ، $B=[b_{ij}]_{p\times k}$ و $C=[c_{ij}]_{k\times n}$ آن‌گاه: $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$

به این خاصیت، «خاصیت شرکت‌پذیری ضرب» ماتریس‌ها می‌گوییم.

۵ اگر $\bar{O}$ ماتریس صفر باشد، آن‌گاه: $A_{m\times n}\times \bar{O}_{n\times p}=\bar{O}_{m\times p} \quad , \quad \bar{O}_{p\times m}\times A_{m\times n}=\bar{O}_{p\times n}$

یعنی ماتریس $\bar{O}$ هم مانند عدد صفر عمل می‌کند.

۶ اگر $r\in\mathbb{R}$ و $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ آن‌گاه: $r(AB)=(rA)B=A(rB)$

یعنی هروقت خواستیم می‌توانیم عدد r را در یکی از دو ماتریس ضرب کنیم.

۷ اگر $r, s\in\mathbb{R}$ و $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ آن‌گاه: $(rA)(sB)=(rs)(AB)$

دیدید ضرب ماتریس‌ها روی جمع و تفریق آن‌ها خاصیت پخشی دارد. ولی در فاکتور گرفتن از ماتریس‌ها باید دقت کرد به نمونه‌های زیر توجه کنید.

در عبارت $AB+BC$ از ماتریس B نمی‌توان فاکتور گرفت زیرا در AB ماتریس B از سمت راست در A ضرب شده و در BC ماتریس B از چپ در C ضرب شده است و ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد. بنابراین $AB+BC$ در حالت کلی مساوی $B(A+C)$ نیست. یا در عبارت $AB+۲A$ از ماتریس A می‌توان از سمت چپ فاکتور گرفت ولی $AB+۲A$ مساوی $A(B+۲)$ نیست زیرا $B+۲$ تعریف‌نشده است. نحوه‌ی درست نوشتن این فاکتورگیری به‌صورت زیر است:

$$AB+۲A=A(B+۲I)$$

مثال: ماتریس‌های A و B در تساوی $A\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ -۳ & ۵\end{bmatrix}B + A\begin{bmatrix}-۱ & -۲\\ ۳ & -۴\end{bmatrix}B=\begin{bmatrix}۵ & ۷\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$ صدق می‌کنند. مجموع درایه‌های ماتریس AB را به‌دست آورید.

حل: در تساوی داده‌شده در طرف اول از سمت چپ از A و از سمت راست از B فاکتور می‌گیریم، داریم:

$$A\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ -۳ & ۵\end{bmatrix}B + A\begin{bmatrix}-۱ & -۲\\ ۳ & -۴\end{bmatrix}B=\begin{bmatrix}۵ & ۷\\ -۱ & ۲\end{bmatrix} \Rightarrow A\left(\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ -۳ & ۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۱ & -۲\\ ۳ & -۴\end{bmatrix}\right)B=\begin{bmatrix}۵ & ۷\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A\underbrace{\left(\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\right)}_{I}B=\begin{bmatrix}۵ & ۷\\ -۱ & ۲\end{bmatrix} \Rightarrow AIB=\begin{bmatrix}۵ & ۷\\ -۱ & ۲\end{bmatrix} \Rightarrow AB=\begin{bmatrix}۵ & ۷\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس AB برابر $۵+۷-۱+۲=۱۳$ است.

مثال: ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۴ & ۴\\ ۰ & -۲\end{bmatrix}$ را درنظر گرفته و حاصل‌ضرب‌های AB و AC را به‌دست آورید.

حل: $AC=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴ & ۴\\ ۰ & -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸ & ۶\\ ۴ & ۳\end{bmatrix}$ و $AB=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸ & ۶\\ ۴ & ۳\end{bmatrix}$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید $AB = AC$ ولی $B \neq C$. یعنی نمی‌توانیم از طرفین ضرب ماتریس‌ها، ماتریس ثابتی را حذف کنیم. پس:

نکته
اگر ماتریس‌های A، B و C چنان باشند که داشته‌باشیم $AB = AC$ آن‌گاه لزوماً نمی‌توانیم نتیجه بگیریم $B = C$ یعنی عمل حذف از طرفین در ضرب ماتریس‌ها همواره برقرار نیست.

توان‌های طبیعی ماتریس‌های مربعی

اگر A یک ماتریس مربعی باشد در این صورت توان‌های طبیعی A به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A^1 = A \quad , \quad A^2 = A \times A \quad , \quad A^3 = A \times A^2 , \dots$$

در صورتی که مرتبه‌ی A برابر n باشد، حتماً مرتبه‌ی همه‌ی توان‌های طبیعی A نیز n خواهد بود. در ضمن فقط ماتریس‌های مربعی را می‌توان به توان رساند. به عنوان مثال $(A_{3\times2})^2$ تعریف‌نشده است، چون ضرب $(A_{3\times2})(A_{3\times2})$ معنی ندارد.

تذکر این نکته ضروری است که در ضرب توان‌های مختلف A خاصیت جابه‌جایی برقرار است، یعنی:

$$A^k A^m = A^m A^k = A^{m+k}$$

مثلاً:

$$A^2 A^3 = A^3 A^2 = A^5$$

هم‌چنین می‌توان نشان داد اگر A یک ماتریس مربعی، k یک عدد حقیقی و m و n اعداد طبیعی باشند آن‌گاه:

$$(kA)^n = k^n A^n \quad , \quad I^n = I \quad , \quad (A^m)^n = A^{mn}$$

نکته
اگر در مسأله‌ای توان‌های طبیعی یک ماتریس مشخص را خواسته باشند، باید چند توان اولیه‌ی آن را به‌دست آورده و با مشخص شدن یک فرمول کلی جواب مسأله را پیدا کنیم.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & k \\ \frac{1}{k} & 0 \end{bmatrix}$ آن‌گاه ماتریس A^{100} را بیابید.

حل: ابتدا ماتریس A^2 را محاسبه می‌کنیم.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 0 & k \\ \frac{1}{k} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & k \\ \frac{1}{k} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

بنابراین:

$$A^{100} = (A^2)^{50} = I^{50} = I$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ آن‌گاه A^{100} را بیابید.

حل: ابتدا چند توان اولیه را به‌دست می‌آوریم:

$$A^1 = A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 & 2 \times 2^1 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A \times A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^3 & 3 \times 2^2 \\ 0 & 2^3 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A \times A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 32 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^4 & 4 \times 2^3 \\ 0 & 2^4 \end{bmatrix}$$

بنابراین A^n به‌صورت $\begin{bmatrix} 2^n & n \times 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$ است. در نتیجه:

$$A^{100} = \begin{bmatrix} 2^{100} & 100 \times 2^{99} \\ 0 & 2^{100} \end{bmatrix}$$

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} \sqrt{۲} & ۰ \\ ۰ & -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه $A^{۹۹}$ برابر کدام است؟

۱) A ۲) I ۳) $-I$ ۴) $-A$

حل: ابتدا ماتریس $A^{۲}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$A^{۲} = A \times A = \begin{bmatrix} \sqrt{۲} & ۰ \\ ۰ & -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{۲} & ۰ \\ ۰ & -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} = -I$$

بنابراین ماتریس $A^{۹۹}$ را برحسب $A^{۲}$ به‌صورت مقابل می‌نویسیم:

$$A^{۹۹} = A^{۹۸} \times A = (A^{۲})^{۴۹} \times A = (-I)^{۴۹} \times A = -I \times A = -A$$

پس گزینه‌ی «۴» درست است.

مثال: اگر $A^{۲} = \lambda A$ که در آن A ماتریس مربعی و λ یک عدد حقیقی است آن‌گاه $A^{۱۳۹۷}$ را به‌دست آورید.

حل: چند توان اولیه‌ی A را نوشته و یک فرمول کلی به‌دست می‌آوریم:

$$A^{۲} = \lambda A^{۱}$$
$$A^{۳} = A \times A^{۲} = A \times (\lambda A^{۱}) = \lambda A^{۲} = \lambda(\lambda A^{۱}) = \lambda^{۲} A^{۱}$$
$$A^{۴} = A \times A^{۳} = A \times (\lambda^{۲} A^{۱}) = \lambda^{۲} A^{۲} = \lambda^{۲}(\lambda A) = \lambda^{۳} A$$

بنابراین با ادامه‌ی این روند خواهیم داشت:

$$A^{n} = \lambda^{n-۱} A$$

پس:

$$A^{۱۳۹۷} = \lambda^{۱۳۹۶} A$$

تست: در ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های $A^{۱۰}$ کدام است؟

۱) $۲^{۱۰}$ ۲) $۲^{۱۱}$ ۳) $۲^{۱۲}$ ۴) $۲^{۹}$

حل: ابتدا ماتریس $A^{۲}$ را به‌دست می‌آوریم.

$$A^{۲} = A \times A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۲ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = ۲A$$

می‌دانیم اگر $A^{۲} = \lambda A$ آن‌گاه $A^{n} = \lambda^{n-۱} A$ بنابراین داریم:

$$A^{۱۰} = ۲^{۹} A$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس $۲^{۹} A$ برابر $۲^{۹} \times (۸) = ۲^{۹} \times ۲^{۳} = ۲^{۱۲}$ است. بنابراین گزینه‌ی «۳» صحیح است.

مثال: A و B دو ماتریس مربعی هستند اگر $AB = B$ و $BA = A$ آن‌گاه ثابت کنید $A^{۲} = A$ و $B^{۲} = B$.

حل: از فرضیات سؤال به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم.

$$AB = B \xrightarrow[\text{از راست ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین را در } A} ABA = BA \xrightarrow{BA=A} AA = A \Rightarrow A^{۲} = A$$

$$BA = A \xrightarrow[\text{از راست ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین را در } B} BAB = AB \xrightarrow{AB=B} BB = B \Rightarrow B^{۲} = B$$

تست: اگر $AB + ۴BA = \overline{O}$ آن‌گاه در تساوی $AB^{۳} = kB^{۳}A$ مقدار k کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۶۴- ۳) ۳۲ ۴) ۳۲-

حل: از فرض سؤال نتیجه می‌گیریم $AB = -۴BA$.

حال با استفاده از خاصیت شرکت‌پذیری ضرب ماتریس‌ها در $AB^{۳}$ ماتریس AB را ایجاد می‌کنیم و به‌جای آن $-۴BA$ را قرار می‌دهیم.

$$AB^{۳} = (AB)B^{۲} = (-۴BA)B^{۲} = -۴B\underbrace{(AB)}_{-۴BA}B = ۱۶B^{۲}\underbrace{(AB)}_{-۴BA} = -۶۴B^{۳}A$$

با مقایسه‌ی $-۶۴B^{۳}A$ با $kB^{۳}A$ نتیجه می‌گیریم $k = -۶۴$. پس گزینه‌ی «۲» درست است.

مثال: اگر $C=BA$ آن‌گاه حاصل $B(AB)^{2}A$ را برحسب ماتریس C به‌دست آورید.

حل: از خاصیت شرکت‌پذیری ضرب ماتریس‌ها استفاده کرده می‌نویسیم:

$$B(AB)^{2}A=B(AB)(AB)A=(BA)(BA)(BA)=(BA)^{3}=C^{3}$$

پس ماتریس $B(AB)^{2}A$ برابر C^{3} است.

مثال: فرض کنید $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$. مجموع درایه‌های ماتریس A^{20} را به‌دست آورید.

حل: ابتدا چند توان اولیه‌ی A را به‌دست می‌آوریم:

$$A^{1}=A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\quad,\quad A^{2}=A\times A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{bmatrix}=3A$$

پس $A^{2}=3A$ و می‌دانیم اگر $A^{2}=\lambda A$ باشد آن‌گاه $A^{n}=\lambda^{n-1}A$ بنابراین داریم:

$$A^{20}=3^{19}A=\begin{bmatrix}3^{19}&3^{19}&3^{19}\\3^{19}&3^{19}&3^{19}\\3^{19}&3^{19}&3^{19}\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های این ماتریس برابر است با: $9\times3^{19}=3^{21}$

در حالت کلی می‌توان نشان داد اگر $A=\begin{bmatrix}k&k&\cdots&k\\k&k&\cdots&k\\\vdots&&\ddots&\vdots\\k&k&\cdots&k\end{bmatrix}_{m\times m}$، آن‌گاه $A^{2}=mkA$ بنابراین $A^{n}=(mk)^{n-1}A$.

همان‌طور که می‌دانید در مجموعه‌ی اعداد حقیقی خاصیت را داریم: $(x+y)(z+t)=xz+xt+yz+yt$

در ماتریس‌ها هم‌چنین خاصیتی برقرار است.

نکته

اگر A، B، C و D چهار ماتریس باشند که همه‌ی ضرب‌های لازم تعریف‌شده باشند، آن‌گاه:

$$(A+B)(C+D)=AC+AD+BC+BD$$

باید به جایگاه ماتریس‌ها دقت لازم را داشت. یعنی وقتی C و D از سمت راست ضرب می‌شود باید آن را در سمت راست نوشت و نیز A و B را باید از سمت چپ ضرب کنیم.

مثال: اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه باشند، مطلوب است:

الف) $(A+B)^{2}$ ب) $(A+B)(A-B)$ پ) $(A-B)^{2}$

حل: الف) $(A+B)^{2}=(A+B)(A+B)=A^{2}+AB+BA+B^{2}$

چون ممکن است $AB\neq BA$ پس آن را نمی‌توان به‌صورت $A^{2}+2AB+B^{2}$ نوشت.

ب) $(A+B)(A-B)=A^{2}-AB+BA-B^{2}$

به همان دلیل این عبارت را نمی‌توان به‌صورت $A^{2}-B^{2}$ نوشت.

پ) $(A-B)^{2}=(A-B)(A-B)=A^{2}-AB-BA+B^{2}$

باز به همان دلیل این عبارت را نمی‌توان به‌صورت $A^{2}-2AB+B^{2}$ نوشت.

نکته

در ماتریس‌ها هیچ‌کدام از اتحادهای جبری معروف لزوماً برقرار نیستند.

اگر ضرب ماتریس‌های A و B خاصیت جابه‌جایی داشته باشد ($AB=BA$) آن‌گاه اتحادها برقرار است. به‌عنوان مثال اگر $AB=BA$ باشد، آن‌گاه $(A+B)^{2}=A^{2}+2AB+B^{2}$.

به‌عنوان مثال اگر A ماتریسی مربعی و I ماتریس همانی هم‌مرتبه با A باشد چون $AI=IA$ پس در محاسبات $(A+kI)^{n}$ می‌توان از اتحادها استفاده کرد.

مثال: اگر A ماتریس ۲×۲ باشد حاصل $(A-۲I)^۲$ را به‌دست آورید.

حل: از اتحاد مربع دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم:

$$(A-۲I)^۲ = A^۲+(-۲I)^۲-۲(A)(۲I) = A^۲+۴I-۴A$$

مثال: ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۰ & a & b \\ ۰ & ۰ & c \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ مفروض است ثابت کنید $A^۳=\overline{O}$.

حل: ابتدا ماتریس $A^۲$ را به‌دست می‌آوریم.

$$A^۲ = A\times A = \begin{bmatrix} ۰ & a & b \\ ۰ & ۰ & c \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & a & b \\ ۰ & ۰ & c \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ac \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

حال $A^۳$ را محاسبه می‌کنیم:

$$A^۳ = A^۲\times A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ac \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & a & b \\ ۰ & ۰ & c \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \overline{O}$$

بنابراین اگر توانی از یک ماتریس صفر باشد نمی‌توان نتیجه گرفت آن ماتریس صفر است. (اگر توانی از ماتریس صفر باشد توان‌های بالاتر آن نیز صفر است.)

تست: اگر $(A-I)^۲=\overline{O}$ آن‌گاه ماتریس $A^۴$ برابر کدام است؟

۱) I ۲) $۳A-۲I$ ۳) $۲A-I$ ۴) $۴A-۳I$

حل: از تساوی $(A-I)^۲=\overline{O}$ نمی‌توان نتیجه گرفت $A-I=\overline{O}$ یعنی $A=I$ پس $A^۴=I$. برای حل این سؤال ابتدا بـه‌کمک اتحاد تساوی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$(A-I)^۲=\overline{O} \Rightarrow A^۲+I-۲A=\overline{O} \Rightarrow A^۲=۲A-I \quad ①$$

حال این تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$A^۲=۲A-I \xRightarrow{\text{توان ۲}} A^۴=(۲A-I)^۲=۴A^۲+I-۴A \xRightarrow{①} A^۴=۴(۲A-I)+I-۴A \Rightarrow A^۴=۴A-۳I$$

بنابراین گزینه‌ی «۴» درست است.

توجه کنید در حالت کلی با فرض $(A-I)^۲=\overline{O}$ ماتریس $A^۴$ برابر $۴A-۳I$ است نه I ولی اگر A برابر I هم انتخاب شود نیز گزینه‌ی «۴» درست خواهد بود.

مثال: ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۱ & x \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & y \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ در تساوی $(A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲$ صدق می‌کنند نسبت $\frac{x}{y}$ را به‌دست آورید.

حل: چون دو ماتریس A و B در اتحاد $(A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲$ صدق می‌کنند. لذا $AB=BA$، داریم:

$$AB=BA \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & x \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & y \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & y \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & x \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱+۳x & x+y \\ ۵ & ۲y+۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱+۲y & x+y \\ ۵ & ۳x+۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$۱+۳x=۱+۲y \Rightarrow ۳x=۲y \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{۲}{۳}$$

مسئله: ثابت کنید ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ همواره در تساوی مقابل صدق می‌کند.

$$A^۲-(a+d)A+(ad-bc)I=\overline{O}$$

حل: ابتدا ماتریس $A^۲$ را به‌دست می‌آوریم.

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^۲+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^۲ \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های $A^۲$، A و I را در رابطه‌ی داده‌شده قرار می‌دهیم.

$$A^۲-(a+d)A+(ad-bc)I=\begin{bmatrix} a^۲+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^۲ \end{bmatrix}-(a+d)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+(ad-bc)\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a^۲+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^۲ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} a^۲+ad & ab+bd \\ ac+dc & ad+d^۲ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ad-bc & ۰ \\ ۰ & ad-bc \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

این رابطه که برای ماتریس‌های ۲×۲ همواره برقرار است معروف به رابطه‌ی کیلی - همیلتون است.

تست: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و $A^{۳}=\alpha A-\beta I$. آن‌گاه زوج‌مرتب $(\alpha\,,\,\beta)$ برابر کدام است؟

۱) $(۱\,,\,۰)$ ۲) $(۲\,,\,-۱)$ ۳) $(-۱\,,\,۲)$ ۴) $(۰\,,\,۱)$

حل: ابتدا ماتریس $A^{۲}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A^{۲}=A\times A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\Rightarrow A^{۲}=I$$

بنابراین تساوی داده شده در صورت سؤال به صورت زیر درمی‌آید:

$$A^{۳}=\alpha A-\beta I\Rightarrow A=\alpha A-\beta I\Rightarrow(\alpha-۱)A=\beta I$$

$$\Rightarrow(\alpha-۱)\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}=\beta\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} -۲\alpha+۲=۰\Rightarrow\alpha=۱ \\ \alpha-۱=\beta\Rightarrow\beta=۰ \end{cases}$$

در نتیجه $(\alpha\,,\,\beta)=(۱\,,\,۰)$ پس گزینه‌ی «۱» درست است.

تست: ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix}$ در تساوی $A^{۲}+\alpha A+\beta I=۰$ صدق می‌کند. حاصل $\alpha+\beta$ برابر کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۷- ۴) ۱۳

حل: روش اول: با استفاده از رابطه‌ی کیلی - همیلتون می‌نویسیم:

$$A^{۲}-(a+d)A+(ad-bc)I=\overline{O}$$

در ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix}$ مقدار $a+d$ برابر $۲+۵=۷$ است و مقدار $ad-bc$ برابر $(۲)(۵)-(-۱)(۳)=۱۳$ است. بنابراین:

$$A^{۲}-۷A+۱۳I=\overline{O}$$

با مقایسه‌ی این تساوی با فرض $A^{۲}+\alpha A+\beta I=۰$ نتیجه می‌گیریم $\alpha=-۷$ و $\beta=۱۳$، پس $\alpha+\beta=۶$ و گزینه‌ی «۲» درست است.

روش دوم: ابتدا ماتریس $A^{۲}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A^{۲}=A\times A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲۱ \\ -۷ & ۲۲ \end{bmatrix}$$

ماتریس $A^{۲}$، A و I را در تساوی داده‌شده قرار می‌دهیم:

$$A^{۲}+\alpha A+\beta I=۰\Rightarrow\begin{bmatrix} ۱ & ۲۱ \\ -۷ & ۲۲ \end{bmatrix}+\alpha\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=۰\Rightarrow\begin{bmatrix} ۱+۲\alpha+\beta & ۲۱+۳\alpha \\ -۷-\alpha & ۲۲+۵\alpha+\beta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} -۷-\alpha=۰\Rightarrow\alpha=-۷ \\ ۱+۲\alpha+\beta=۰\xrightarrow{\alpha=-۷}\beta=۱۳ \end{cases}$$

بنابراین $\alpha+\beta=۶$.

تست: کدام‌یک از گزینه‌های زیر برای ماتریس‌های A و B همواره درست است؟

۱) $(AB)^{n}=A^{n}B^{n}$ ۲) $A^{n}=\overline{O}\Rightarrow A=\overline{O}$

۳) $(A+B)(A-B)=A^{۲}-B^{۲}$ ۴) $A^{m}\times A^{n}=A^{n}\times A^{m}$

حل: در ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی وجود ندارد، پس گزینه‌ی «۱» نادرست است. (اگر $AB=BA$ باشد درست است.)

در ضمن گزینه‌ی «۲» هم نادرست است به‌عنوان مثال اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ آن‌گاه $A^{۲}=\overline{O}$ ولی $A\neq\overline{O}$. و می‌دانیم در ضرب ماتریس‌ها از اتحادهای جبری در حالت کلی نمی‌توان استفاده کرد، پس گزینه‌ی «۳» هم نادرست است. بنابراین گزینه‌ی «۴» درست است، زیرا ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد به همین علت مثلاً ماتریس $A^{۳}$ که برابر $A\times A\times A$ است را می‌توان به‌صورت $A^{۲}\times A$ یا $A\times A^{۲}$ نوشت.

حاصل‌ضرب چند ماتریس خاص

۱ حاصل‌ضرب دو ماتریس قطری هم‌مرتبه یک ماتریس قطری است و برای محاسبه‌ی حاصل‌ضرب باید درایه‌های روی قطرهای دو ماتریس را نظیربه‌نظیر در هم ضرب کنیم. یعنی:

$$\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' & ۰ & ۰ \\ ۰ & b' & ۰ \\ ۰ & ۰ & c' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} aa' & ۰ & ۰ \\ ۰ & bb' & ۰ \\ ۰ & ۰ & cc' \end{bmatrix}$$

به همین علت برای محاسبه‌ی توان ماتریس‌های قطری کافیست درایه‌های قطر اصلی را به توان برسانیم. به عنوان نمونه:

$$\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} a^n & ۰ & ۰ \\ ۰ & b^n & ۰ \\ ۰ & ۰ & c^n \end{bmatrix}$$

تست: اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۱۳۹۷}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳- ۳) صفر ۴) ۱-

حل: ماتریس A یک ماتریس قطری است پس:

$$A^{۱۳۹۷}=\begin{bmatrix} ۱^{۱۳۹۷} & ۰ & ۰ \\ ۰ & (-۱)^{۱۳۹۷} & ۰ \\ ۰ & ۰ & (-۱)^{۱۳۹۷} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۱۳۹۷}$ برابر ۱- است. در نتیجه گزینه‌ی «۴» درست است.

۲ حاصل‌ضرب دو ماتریس بالامثلثی (پایین مثلثی) هم‌مرتبه یک ماتریس بالامثلثی (پایین‌مثلثی) است و درایه‌های روی قطر این حاصل‌ضرب مثل حاصل‌ضرب ماتریس‌های قطری به‌دست می‌آید و سایر درایه‌های غیرصفر را باید با ضرب کردن پیدا کرد. به‌عنوان نمونه به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ d & b & ۰ \\ e & f & c \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} a^n & ۰ & ۰ \\ x & b^n & ۰ \\ y & z & c^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & d & e \\ ۰ & b & f \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' & d' & e' \\ ۰ & b' & f' \\ ۰ & ۰ & c' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} aa' & x & y \\ ۰ & bb' & z \\ ۰ & ۰ & cc' \end{bmatrix}$$

مقادیر x، y و z را با تعریف ضرب ماتریس باید به‌دست آورد.

مثال: ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۱ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۳ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. درایه‌های ماتریس $A^۲+B^۲+AB$ را پیدا کنید.

حل: ماتریس‌های A و B بالامثلثی هستند پس ماتریس‌های $A^۲$، $B^۲$ و AB نیز بالامثلثی هستند. پس درایه‌های روی قطر اصلی به‌سادگی محاسبه می‌شوند و درایه‌های زیر قطر اصلی صفر هستند. پس فقط در محاسبه‌ی آن‌ها باید درایه‌های بالای قطر اصلی را با ضرب به‌دست آوریم.

$$B^۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۳ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۳ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۶ \\ ۰ & ۱ & ۶ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۱ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۱ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۶ \\ ۰ & ۱ & -۶ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۱ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۳ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$A^۲+B^۲+AB=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}=۳I$$

۳ اگر $A^{۲} = A$ آن‌گاه $(n \in \mathbb{N})A^n = A$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$ آن‌گاه ماتریس $A^{۱۳۹۸} - A^{۱۳۹۷}$ را به‌دست آورید.

حل: ابتدا ماتریس $A^{۲}$ را پیدا می‌کنیم.

$$A^{۲} = A \times A = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix} = A$$

بنابراین $A^{۱۳۹۸} = A$ و $A^{۱۳۹۷} = A$ درنتیجه $A^{۱۳۹۸} - A^{۱۳۹۷} = \overline{O}$.

مثال: اگر $A^{۲} = A$ آن‌گاه ثابت کنید $(I - A)^{۲} = I - A$.

حل: ماتریس $(I - A)^{۲}$ را به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای پیدا می‌کنیم:

$$(I-A)^{۲} = I + A^{۲} - ۲A \overset{A^{۲}=A}{\Rightarrow} (I-A)^{۲} = I + A - ۲A \Rightarrow (I-A)^{۲} = I - A$$

۴ اگر $A^{۲} = I$ آن‌گاه اگر n زوج باشد $A^n = I$ و اگر n فرد باشد $A^n = A$.

تست: اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ آن‌گاه ماتریس $A^{۱۳۹۸} - A^{۱۳۹۷}$ برابر کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

حل: ابتدا ماتریس $A^{۲}$ را پیدا می‌کنیم.

$$A^{۲} = A \times A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I$$

بنابراین $A^{۱۳۹۸} = I$ و $A^{۱۳۹۷} = A$، داریم:

$$A^{۱۳۹۸} - A^{۱۳۹۷} = I - A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

پس گزینه‌ی «۴» درست است.

۵ حاصل‌ضرب یک ماتریس قطری و یک ماتریس دلخواه مربعی هم‌مرتبه با آن.

اگر ماتریس قطری $A = \begin{bmatrix} a_1 & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & a_2 & \cdots & ۰ \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ از سمت چپ در ماتریس $B_{n\times n}$ ضرب شود حاصل ماتریس $C_{n\times n}$ است که سطر اول آن a_1 برابر سطر اول B، سطر دوم آن a_2 برابر سطر دوم B و ... سطر nاُم آن a_n برابر سطر nام ماتریس B است.

اگر ماتریس قطری A از سمت راست در B ضرب شود حاصل ماتریس $D_{n\times n}$ است که ستون اوّل آن a_1 برابر ستون اول B، ستون دوم آن a_2 برابر ستون دوم و ستون nاُم آن a_n برابر ستون nاُم ماتریس B است.

به‌عنوان مثال اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۴ & -۲ & ۵ \\ ۶ & -۱ & ۷ \\ -۲ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ باشد آن‌گاه:

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۴ & -۲ & ۵ \\ -۲(۶) & -۲(-۱) & -۲(۷) \\ ۳(-۲) & ۰ & ۳(۴) \end{bmatrix} \quad , \quad B \times A = \begin{bmatrix} ۴ & -۲(-۲) & ۳(۵) \\ ۶ & -۲(-۱) & ۳(۷) \\ -۲ & ۰ & ۳(۴) \end{bmatrix}$$

تست: اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۶ \end{bmatrix}$ و $B_{۳\times۳}$ ماتریسی باشد که مجموع عناصر ستون اول، دوم و سوم آن به‌ترتیب ۴، ۳ و ۲- باشد آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $B\times A$ کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۵ ۳) ۵- ۴) ۱۹-

حل: فرض کنیم $B=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ باشد بنا بر مطالب گفته شده داریم:

$$B\times A=\begin{bmatrix} ۲a & -۵b & ۶c \\ ۲d & -۵e & ۶f \\ ۲g & -۵h & ۶i \end{bmatrix} \Rightarrow B\times A \text{ مجموع درایه‌های } =۲(a+d+g)-۵(b+e+h)+۶(c+f+i)$$
$$=۲(۴)-۵(۳)+۶(-۲)=۸-۱۵-۱۲=-۱۹$$

بنابراین گزینه‌ی «۴» صحیح است.

نکته

اگر A ماتریسی اسکالر باشد که در روی قطر اصلی آن همه‌ی عناصر a باشد و B ماتریسی دلخواه هم‌مرتبه با A باشد $AB=BA$ است و حاصل، ماتریسی مانند C است که درایه‌های آن از ضرب تک‌تک درایه‌های B در a به‌دست می‌آید. $AB=BA=aB$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای درس اول

پرسش‌های سطح ساده

۱. ماتریس‌های A و B تعداد قبولی و مردودی در درس‌های هندسه و گسسته را در دو مدرسه نشان می‌دهند. چند درصد از دانش‌آموزان این دو دبیرستان در درس هندسه قبول شده‌اند؟

$$A=\begin{array}{c}\\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \text{قبول} & \text{مردود} \\ \left[\begin{array}{cc} ۹۰ & ۱۰ \\ ۸۹ & ۱۱ \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{l} \\ \text{هندسه} \\ \text{گسسته} \end{array} \qquad B=\begin{array}{cc} \text{قبول} & \text{مردود} \\ \left[\begin{array}{cc} ۴۲ & ۸ \\ ۴۰ & ۱۰ \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{l} \\ \text{هندسه} \\ \text{گسسته} \end{array}$$

۱) ٪۱۴ ۲) ٪۸۶ ۳) ٪۸۸ ۴) ٪۱۲/۴

۲. در ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۰ \\ ۲ & ۲m & -۱ \\ m+۱ & ۴ & ۰ \end{bmatrix}$ داریم: $۳a_{۳۱}-۲a_{۲۲}=۰$ عدد m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳. اگر ماتریس $\begin{bmatrix} ۳ & ۲a-۳b+۵ & ۰ \\ ۰ & -b & ۳a+b-۲ \\ ۰ & c & ۱ \end{bmatrix}$ قطری باشد، آن‌گاه $\frac{b}{a}$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ‎-۱ ۳) ‎-۱۳ ۴) ۱۹

۴. اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & -۶ & ۴ \\ -۷ & ۵ & ۲ \end{bmatrix}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $۲A+۳B$ چقدر است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۸ ۴) ۱۴

۵. حاصل‌ضرب درایه‌های واقع در سطر دوم AB که در آن $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ ۱ & ۵ \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۴ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ هستند، کدام است؟

۱) ۴۶۲ ۲) ۵۵ ۳) ۱۱۵ ۴) ۱۱۰

۶. در معادله‌ی $\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}=x\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}+z\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ حاصل $x^۲+y^۲+z^۲$ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۷. اگر $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ آن‌گاه y چقدر است؟

۱) ‎-۲ ۲) ‎-۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۸. اگر $A=\begin{bmatrix} a & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۲ & ۷ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} ۶ & ۶ & ۷ \\ ۰ & -۲c & ۸ \\ ۰ & ۰ & b \end{bmatrix}$ و $۳a-۲c+b=۹$، آن‌گاه مجموع عناصر روی قطر اصلی ماتریس AB چقدر است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۷ ۳) ۱۶ ۴) ۱۵

۹. دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & a \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۳ & ۶ & ۱ \\ ۱ & b & -۲ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر درایه‌های زیر قطر اصلی ماتریس AB صفر باشند، آن‌گاه حاصل $a+b$ چقدر است؟

۱) ۸ ۲) ‎-۸ ۳) ۴ ۴) ‎-۴

۱۰. ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & -۴ \\ ۱ & -۲ & ۳ \\ ۴ & ۲ & m \end{bmatrix}$ مفروض است. اگر درایه سطر سوم و ستون سوم ماتریس $A^۲$ برابر ۶ باشد، آن‌گاه m کدام است؟

۱) ± ۱ ۲) ± ۲ ۳) ± ۳ ۴) ± ۴

۱۱. اگر $A=\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ آن‌گاه حاصل $AB-BA$ کدام ماتریس زیر است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

۱۲. اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$، آن‌گاه $B^۲A$ کدام است؟

۱) A ۲) $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} d & b \\ c & a \end{bmatrix}$

۱۳. حاصل $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}^۴$ کدام است؟

۱) $۴I_۲$ ۲) $\begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix}$ ۳) $-۴I_۲$ ۴) $\begin{bmatrix} ۰ & -۴ \\ -۴ & ۰ \end{bmatrix}$

۱۴. اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، آن‌گاه درایه‌ی واقع در سطر اول و ستون دوم ماتریس $A^{۲۰}$ کدام است؟

۱) $۲^{۱۰}$ ۲) $۲^{۴۰}$ ۳) ۴۰ ۴) ۲۰

۱۵. اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، آن‌گاه درایه‌ی سطر اول و ستون سوم ماتریس $A^{۱۰}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱۰ ۳) $۲^{۱۰}$ ۴) ۱

۱۶. فرض کنید A ماتریسی ۳×۲، B ماتریسی ۴×۳ و C ماتریسی ۳×۳ باشد، کدام حاصل‌ضرب قابل انجام است؟

۱) ABC ۲) CAB ۳) BA ۴) ACB

۱۷. اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} m-n & m+۴ \\ n+۲ & ۰ \end{bmatrix}$ قطری باشد، در این صورت حاصل $m+n$ چقدر است؟

۱) ۶ ۲) ۶- ۳) صفر ۴) ۱۲

۱۸. ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۴ \\ ۴ & ۲ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ مفروض است. مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A^۲$ کدام عدد است؟

۱) ۲۰ ۲) صفر ۳) ۲- ۴) ۴

پرسش‌های سطح متوسط

۱۹. مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ با تعریف $a_{ij}=\begin{cases} ۲i-j & : \ i<j \\ ۲j+i & : \ i\geq j \end{cases}$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۲۰. ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۵ & ۴ \end{bmatrix}$ مفروض است. کدام‌یک از تعاریف زیرمشخص‌کننده‌ی این ماتریس است؟

۱) $a_{ij}=\begin{cases} i+۱ & ; \ i<j \\ j+i & ; \ i\geq j \end{cases}$ ۲) $a_{ij}=\begin{cases} i+۱ & ; \ i=j \\ j-i & ; \ i>j \\ ۲j+۱ & ; \ i<j \end{cases}$ ۳) $a_{ij}=\begin{cases} j+۱ & ; \ i\leq j \\ j-۱ & ; \ i>j \end{cases}$ ۴) $a_{ij}=\begin{cases} j+۱ & ; \ i\leq j \\ j+i & ; \ i>j \end{cases}$

۲۱. اگر $A=[ij-۱]_{۳\times۳}$ و $B=[i^۲-j]_{۳\times۳}$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $A+B$ کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۶ ۳) ۱۰ ۴) ۱۴

۲۲. ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases} a^۲-۳ai+۲i^۲ & : \ i<j \\ a^۲-۳aj+۲j^۲ & : \ i\geq j \end{cases}$ مفروض است. به‌ازای کدام مقدار a ماتریس A یک ماتریس قطری است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۲۳. اگر $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۲ & -۲\\ ۴ & ۳ & -۳\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}۴ & -۳\\ ۵ & ۱\\ ۲ & -۱\end{bmatrix}$ ، $C=\begin{bmatrix}-۷ & ۲\\ ۶ & ۰\end{bmatrix}$ و $D=ABC$ آن‌گاه $d_{۱۲}^{۲}+d_{۱۲}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۲۰

۲۴. اگر $A_{m\times n}$ و $B_{p\times q}$ دو ماتریس باشند به‌طوری که AB و BA هر دو تعریف‌شده باشند و $mnpq=۳۲۴۰۰$ و $m+n+p+q=۵۴$ ، آن‌گاه حاصل $m^{۲}+n^{۲}+p^{۲}+q^{۲}$ چقدر است؟

۱) ۱۴۵۸ ۲) ۷۳۸ ۳) ۷۰۰ ۴) ۲۵۹۲

۲۵. اگر بین ماتریس‌های A و B رابطه‌ی $(A+B)^{۲}=A^{۲}+۲AB+B^{۲}$ برقرار باشد چه تعداد از روابط زیر درست‌اند؟

الف) $(A+B)(A-B)=A^{۲}-B^{۲}$ ب) $(A-B)^{۲}=A^{۲}-۲AB+B^{۲}$

پ) $(A+B)^{۳}=A^{۳}+۳A^{۲}B+۳AB^{۲}+B^{۳}$ ت) $A^{۳}+B^{۳}=(A+B)(A^{۲}-AB+B^{۲})$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۶. فرض کنید A یک ماتریس ۲×۲ باشد به‌طوری که $\begin{bmatrix}۲ & -۲\\ -۶ & ۶\end{bmatrix}\times A=\bar{O}$ و تمام درایه‌های A از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۵ باشند. چند ماتریس A وجود دارد؟

۱) ۵ ۲) ۲۵ ۳) ۱۲۵ ۴) ۶۲۵

۲۷. اگر برای دو ماتریس A و B داشته‌باشیم $۲A+B=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}$ و $A+B=\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع تمام درایه‌های ماتریس $B^{۲}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۲۸. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۰\\ ۲ & ۱ & ۱\\ ۳ & ۲ & -۲\end{bmatrix}$ آن‌گاه درایه‌ی سطر دوم و ستون سوم ماتریس $A^{۳}$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) ۳- ۴) ۳

۲۹. اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & ۱+\tan^{۲}\alpha\\ \cos^{۲}\alpha & ۰\end{bmatrix}$ آن‌گاه $A^{۷}+A^{۸}$ کدام است؟

۱) $۲A$ ۲) I ۳) $A+I$ ۴) A

۳۰. اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & ۷\\ -\frac{۱}{۷} & ۰\end{bmatrix}$ آن‌گاه ماتریس $A^{۲۵}$ برابر کدام است؟

۱) I ۲) $-I$ ۳) A ۴) $-A$

۳۱. اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & -۲\end{bmatrix}$ آن‌گاه $A^{۱۵۰۰}$ کدام ماتریس است؟

۱) A ۲) $-A$ ۳) I ۴) $A^{۱۵}$

۳۲. اگر $A=\begin{bmatrix}-۱ & -۱ & -۱\\ -۱ & -۱ & -۱\\ -۱ & -۱ & -۱\end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۵}$ چقدر است؟

۱) $-۳^{۷}$ ۲) $۳^{۷}$ ۳) $-۳^{۶}$ ۴) $۳^{۶}$

۳۳. اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۰ & ۱ & ۲\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس $A^{۲۴}$ چقدر است؟

۱) ۲۴ ۲) ۴۷ ۳) ۴۹ ۴) ۴۸

۳۴. اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\\ ۵ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$ باشد آن‌گاه مجموع درایه‌های $A^{۱۱}$ کدام است؟

۱) ۳۷۵ ۲) ۸۷۵ ۳) ۱۳۷۵ ۴) ۱۸۷۵

۳۵. اگر $A^2 = 3I - 4A$ آن‌گاه A^3 برابر کدام است؟

۱) $12I - 19A$ ۲) $12A - 19I$ ۳) $19A - 12I$ ۴) $19I - 12A$

۳۶. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $A^3 = mA - nI$ آن‌گاه حاصل $m - n$ چقدر است؟

۱) ۳۶ ۲) ۳۷ ۳) ۳۳ ۴) ۱۳

۳۷. اگر A یک ماتریس مربعی بوده و $A^2 = \bar{O}$ آن‌گاه حاصل $A(I+A)^3$ کدام است؟

۱) A ۲) $3A$ ۳) $A + I$ ۴) $A - I$

۳۸. اگر $A = [a_{ij}]_{m\times 7}$ و $B = [b_{ij}]_{n\times 5}$ و $C = [c_{ij}]_{6\times 10}$ و حاصل‌ضرب CAB تعریف شده باشد آن‌گاه mn چقدر است؟

۱) ۳۵ ۲) ۵۰ ۳) ۶۰ ۴) ۷۰

۳۹. چند ماتریس قطری مرتبه‌ی ۶ وجود دارد که در رابطه‌ی $A^2 = I_6$ صدق کند؟

۱) ۳۶ ۲) ۳۲ ۳) ۶۴ ۴) بی‌شمار

۴۰. هرگاه $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 6 & 8 \\ -2 & 8 & 12 \end{bmatrix}$ آن‌گاه BA برابر کدام است؟

۱) A^2 ۲) $2A^2$ ۳) B^2 ۴) $2B^2$

۴۱. اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ آن‌گاه مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس A^2 کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۴۲. اگر A، B و C ماتریس‌های مربعی هم‌مرتبه باشند، آن‌گاه، چه تعداد از موارد زیر همواره صحیح‌اند؟

الف) اگر A^2 قطری باشد، A نیز قطری است.

ب) اگر A و B قطری باشند، A و B خاصیت جابه‌جایی دارند.

ج) اگر A با B و A با C بتوانند جابه‌جا شوند، آن‌گاه B با C نیز می‌توانند جابه‌جا شوند.

د) اگر $A^3 = B^3$ باشد، آن‌گاه $A = B$

هـ) اگر A اسکالر باشد، A و B خاصیت جابه‌جایی دارند.

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۴۳. اگر $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ و $a_{ij} = -a_{ji}$ باشد و $A^2 = -2B$. (B ماتریسی است که روی قطر اصلی آن تمامی درایه‌ها ۱ هستند.) در این صورت مجموع مربعات درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی A کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۸

۴۴. ماتریس‌های $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ با تعریف $a_{ij} = \begin{cases} j - i & ; & i \le j \\ j + i & ; & i > j \end{cases}$ و $B = [b_{ij}]_{3\times 3}$ با تعریف $b_{ij} = \begin{cases} i + j & ; & i < j \\ i - j & ; & i \ge j \end{cases}$ مفروض‌اند. ماتریس $A - B$ چگونه است؟

۱) قطری ۲) بالامثلثی ۳) اسکالر ۴) مجموع تمام درایه‌هایش صفر است.

پرسش‌های سطح دشوار

۴۵. اگر $A = [a_{ij}]_{7\times 7}$ و $a_{ij} = ij$ باشد، آن‌گاه مجموع تمام درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) ۴۴۱ ۲) ۱۰۱۵ ۳) ۷۸۴ ۴) ۸۱۹

۴۶. اگر $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ و $a_{ij} = ij$ و مجموع تمام درایه‌های ماتریس A برابر ۱۲۹۶ باشد، آن‌گاه n کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۹

۴۷. ماتریس $A = [a_{ij}]_{m\times 3}$ که در آن $a_{ij} = i^j$ مفروض است. اگر مجموع درایه‌های ستون اول ماتریس A برابر ۲۸ باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های ستون سوم A کدام است؟

۱) ۸۴ ۲) ۷۸۴ ۳) 28^3 ۴) ۷۵۶

۴۸. ماتریس $A_{۳\times۳}$ چنان است که مجموع درایه‌های تمام سطرها، ستون‌ها، قطر اصلی و قطر فرعی آن برابر بوده و درایه‌هایش اعداد ۱ تا ۹ هستند. درایه‌ی سطر دوم و ستون دوم ماتریس A کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۹

۴۹. ماتریس غیرسطری و غیرستونی A دارای ۱۳۹۷ درایه است. مجموع تعداد سطرها و ستون‌های ماتریس A کدام است؟

۱) ۱۳۹۸ ۲) ۱۳۸ ۳) ۱۴۱ ۴) مقدار یکتا به‌دست نمی‌آید.

۵۰. چند ماتریس اسکالر مانند A وجود دارد به‌طوری که حاصل‌ضرب عناصر غیرصفر آن ۶۴ و مجموع تمام عناصر آن ۱۲ باشد؟

۱) چنین ماتریسی وجود ندارد. ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیش از ۲

۵۱. اگر $\begin{bmatrix}۵ & ۶\\ ۷ & ۱۰\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۱ & ۱\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ -۱ & ۱\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل $a+۲b+۳c+۴d$ چقدر است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۱ ۳) ۳۲ ۴) ۳۳

۵۲. اگر $A = \begin{bmatrix}a & ۰\\ ۰ & b\end{bmatrix}$ و B یک ماتریس غیرصفر و ۲×۲ باشد به‌طوری که $AB = BA$. آن‌گاه ماتریس B همواره چگونه است؟ $(a \neq b)$

۱) قطری ۲) اسکالر ۳) بالامثلثی ۴) پایین‌مثلثی

۵۳. اگر A و B ماتریس‌های ۲×۲ باشند و مجموع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس AB برابر m باشد آن‌گاه مجموع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس BA کدام است؟

۱) m ۲) $\frac{۱}{m}$ ۳) $m^۲$ ۴) قابل محاسبه نیست.

۵۴. ماتریس $A = \begin{bmatrix}۱ & -۲ & ۱\end{bmatrix}$ را درنظر بگیرید. فرض کنید B ماتریس ستونی باشد که درایه‌ی سطر دوم آن مربع درایه سطر اول و درایه‌ی سطر سوم آن مکعب درایه‌ی سطر اول آن باشد. اگر $A\times B = ۱۲$، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس B کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۳۹ ۳) ۱۲ ۴) ۸۴

۵۵. برای ماتریس‌های مربعی و هم‌مرتبه‌ی A، B و C رابطه‌ی $A = B - C$ برقرار است. حاصل $A^۲ + B^۲ - AB - BA$ کدام است؟

۱) $-C^۲$ ۲) $\bar{O}$ ۳) $C^۲$ ۴) C

۵۶. برای دو ماتریس A و B داریم $A^۲ = \begin{bmatrix}۰ & ۴\\ ۰ & ۴\end{bmatrix}$، $B^۲ = \begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}$ و $A + B = \begin{bmatrix}۳ & ۳\\ ۳ & ۳\end{bmatrix}$ حاصل $AB + BA$ کدام ماتریس است؟

۱) $\begin{bmatrix}۱۷ & ۱۵\\ ۱۱ & ۱۶\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۱۷ & ۱۵\\ -۱۶ & ۱۱\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۱۷ & ۱۵\\ ۱۱ & -۱۶\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۱۷ & ۱۵\\ ۱۶ & ۱۱\end{bmatrix}$

۵۷. فرض کنید A و B دو ماتریس مرتبه‌ی ۲ باشند، ماتریس $AB - BA$ با کدام‌یک از ماتریس‌های زیر می‌تواند برابر باشد؟

۱) $\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۱ & -۳\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}$ ۴) هیچ‌کدام

۵۸. فرض کنید A، B و C ماتریس‌های $n\times n$ باشند به‌طوری که A با C و B با C جابه‌جا شوند ($AC = CA$ و $BC = CB$) کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) CA با B جابه‌جا می‌شود. ۲) BA با C جابه‌جا می‌شود. ۳) BC با A جابه‌جا می‌شود. ۴) هیچ‌کدام

۵۹. فرض کنید A و B دو ماتریس مرتبه‌ی ۲ باشند به‌طوری که مجموع درایه‌های هر سطر هردوی آن‌ها برابر k باشند. اگر مجموع تمام درایه‌های ماتریس AB برابر ۷۲ باشد، آن‌گاه مجموع تمام درایه‌های ماتریس A کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ± ۶ ۴) ± ۱۲

۶۰. اگر $A = \begin{bmatrix}۲ & ۳\\ -۱ & -۲\end{bmatrix}$ آن‌گاه $A^{۱۵!}$ کدام است؟

۱) A ۲) I ۳) $-A$ ۴) $A^{۱۵}$

۶۱. برای ماتریس A رابطه‌ی $A^۲ = ۳A + I$ برقرار است. حاصل $A(A - ۲I)^۲$ کدام است؟

۱) $۲A - I$ ۲) $۵I - A$ ۳) $۲A + I$ ۴) $۵A + I$

۶۲. اگر $۲AB + ۳BA = \bar{O}$ آن‌گاه از رابطه‌ی $AB^۳ = kB^۳A$ مقدار k کدام است؟

۱) $\frac{۲۷}{۸}$ ۲) $-\frac{۲۷}{۸}$ ۳) $\frac{۸}{۲۷}$ ۴) $-\frac{۸}{۲۷}$

۶۳. اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ a & ۰ & ۰ \\ b & c & ۰ \end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل $(A-۲I)(A^۲+۲A+I)$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ -۳a & -۲ & ۰ \\ -۳b & -۳c & -۲ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} -۶ & ۰ & ۰ \\ -۳a & -۶ & ۰ \\ -۳b & -۳c & -۶ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ -۳a & -۶ & ۰ \\ -۳b & -۳c & ۰ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۳a & ۱ & ۰ \\ -۳b & -۳c & ۱ \end{bmatrix}$

۶۴. اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه و $AB=B$ و $BA=A$ باشد، آن‌گاه حاصل $(A+B)^۳$ کدام است؟

۱) $A+B$ ۲) $۲(A+B)$ ۳) $۳(A+B)$ ۴) $۴(A+B)$

۶۵. اگر A ماتریس مربعی بوده و $A^۲=A$ آن‌گاه حاصل $(I-A)^{۱۰۰}$ کدام است؟

۱) $I+A$ ۲) $I+۱۰۰A$ ۳) $I-A$ ۴) $I-۱۰۰A$

۶۶. اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ آن‌گاه ماتریس $A^{۱۳۹۷}-A^{۱۳۹۸}$ چند درایه‌ی صفر دارد؟

$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۵

۶۷. اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ آن‌گاه $A^{۱۰}$ کدام ماتریس است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۳۰ & ۱۸۰ \\ ۰ & ۱ & ۳۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۳۰ & ۲۱۰ \\ ۰ & ۱ & ۳۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲۰ & ۱۸۰ \\ ۰ & ۱ & ۲۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲۰ & ۲۱۰ \\ ۰ & ۱ & ۲۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۶۸. اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد آن‌گاه حاصل $A+A^۲+A^۳+\cdots+A^{۲۰}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۲^{۲۰} & ۳^{۲۰} \\ ۰ & ۲^{۲۰} \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۲۰ & ۳^{۲۰} \\ ۰ & ۲۰ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۴۰۰ & ۹۰۰ \\ ۰ & ۴۰۰ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۲۰ & ۶۳۰ \\ ۰ & ۲۰ \end{bmatrix}$

۶۹. اگر $A=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$ باشد آن‌گاه حاصل $A+A^۲+\cdots A^{۱۰}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱-(\frac{۱}{۲})^۹ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱-(\frac{۱}{۳})^۹}{۲} \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱-(\frac{۱}{۲})^{۱۱} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱-(\frac{۱}{۳})^{۱۱}}{۲} \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱-(\frac{۱}{۲})^{۱۰} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱-(\frac{۱}{۳})^{۱۰}}{۲} \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱-(\frac{۱}{۲})^{۲۰} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱-(\frac{۱}{۳})^{۲۰}}{۲} \end{bmatrix}$

۷۰. فرض کنید $A=[a_{ij}]_{۱۳۹۷\times۱۳۹۷}$ و $a_{ij}=\begin{cases} ۰ & ; \quad i+j\neq ۱۳۹۸ \\ -۱ & ; \quad i+j=۱۳۹۸ \end{cases}$ در این‌صورت مجموع درایه های قطر اصلی ماتریس $A^{۲۰۱۸}+A^{۲۰۱۹}$ چقدر است؟

۱) ۱۳۹۶ ۲) ۱۳۹۷ ۳) ۰ ۴) ۱۳۹۷-

۷۱. فرض کنید $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ و $a_{ij}=i$ و $B=[b_{ij}]_{n\times n}$ و $b_{ij}=j$ در این صورت مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس AB کدام است؟

۱) $\frac{n(n+۱)}{۲}$ ۲) $\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$ ۳) $\frac{n^۲(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$ ۴) $\frac{n^۲(n+۱)}{۲}$

۷۲. ماتریس سطری A مفروض است. اگر ماتریس A ستونی هم باشد و مجموع تمام درایه‌های A برابر $x^۳+۴x^۲+۲x+۵$ و درایه‌ی واقع در سطر اول و ستون اول آن برابر $۳x^۲+x+۱۹$ باشد. مجموع تمام درایه‌های ماتریس $A^۲$ کدام است؟

۱) ۵۲۹ ۲) ۱۴۴ ۳) ۱۱۵۶ ۴) ۱۰۸۹

۷۳. ماتریس A یک ماتریس قطری است. اگر تمام درایه‌های ماتریس A صفر یا اعداد طبیعی و مخالف ۱ باشند و حاصل‌ضرب عناصر قطر اصلی A برابر ۱۲۰ باشد آن‌گاه تعداد سطرهای A چند حالت مختلف می‌تواند داشته‌باشد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) بیش‌تر از ۶

پاسخ تشریحی پرسش‌های فصل ۱

۱. گزینه $\boxed{۳}$ تعداد دانش‌آموزان مدرسه‌ی اول ۱۰۰ نفر و تعداد دانش‌آموزان مدرسه‌ی دوم ۵۰ نفر است. تعداد کسانی که در مدرسه‌ی اول در درس هندسه قبول شده‌اند ۹۰ نفر و نفرات قبول شده در مدرسه‌ی دوم در درس هندسه ۴۲ نفر است. پس در کل از بین ۱۵۰ نفر تعداد ۱۳۲ نفر در درس هندسه قبول شده‌اند.

$$\text{درصد قبولی در درس هندسه} = \frac{۱۳۲}{۱۵۰} \times ۱۰۰ = \%۸۸$$

۲. گزینه $\boxed{۳}$

$$\left.\begin{array}{l} a_{۳۱} = m + ۱ \\ a_{۲۲} = ۲m \end{array}\right\} \Rightarrow ۳a_{۳۱} - ۲a_{۲۲} = ۳(m+۱) - ۲(۲m) = -m + ۳$$

$$\Rightarrow -m + ۳ = ۰ \Rightarrow m = ۳$$

۳. گزینه $\boxed{۴}$ در ماتریس قطری، درایه‌های غیر قطر اصلی صفر هستند، بنابراین:

$$\begin{cases} ۲a - ۳b + ۵ = ۰ \\ ۳a + b - ۲ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲a - ۳b = -۵ \\ ۳a + b = ۲ \end{cases} ۳ \Rightarrow \begin{cases} ۲a - ۳b = -۵ \\ ۹a + ۳b = ۶ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} ۱۱a = ۱ \Rightarrow a = \frac{۱}{۱۱}$$

درنتیجه:

$$۲a - ۳b = -۵ \xrightarrow{a = \frac{۱}{۱۱}} \frac{۲}{۱۱} - ۳b = -۵$$

$$\Rightarrow ۳b = \frac{۲}{۱۱} + ۵ = \frac{۵۷}{۱۱} \Rightarrow b = \frac{۱۹}{۱۱}$$

پس نسبت $\frac{b}{a}$ برابر $\frac{\frac{۱۹}{۱۱}}{\frac{۱}{۱۱}}$ مساوی ۱۹ است.

۴. گزینه $\boxed{۱}$ ابتدا $۲A$ و $۳B$ را به‌دست می‌آوریم سپس آن‌ها را جمع می‌کنیم:

$$۲A = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ & -۲ \\ ۰ & ۸ & ۴ \end{bmatrix} \qquad ۳B = \begin{bmatrix} ۰ & -۱۸ & ۱۲ \\ -۲۱ & ۱۵ & ۶ \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$۲A + ۳B = \begin{bmatrix} ۲+۰ & ۴-۱۸ & -۲+۱۲ \\ ۰-۲۱ & ۸+۱۵ & ۴+۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & -۱۴ & ۱۰ \\ -۲۱ & ۲۳ & ۱۰ \end{bmatrix}$$

که مجموع تمام درایه‌های این ماتریس برابر با عدد ۱۰ است.

۵. گزینه $\boxed{۱}$ کافی است فقط درایه‌های سطر دوم AB را حساب کنیم:

$$AB = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ ۱ & ۵ \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۴ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ ۲۱ & ۲ & ۱۱ \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\text{حاصل‌ضرب درایه‌های سطر دوم } AB = ۲۱ \times ۲ \times ۱۱ = ۴۶۲$$

۶. گزینه $\boxed{۲}$

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x \\ x & ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ y & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۲z \\ ۰ & -z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x + ۲z \\ x + y & y - z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ x + ۲z = ۱ \\ x + y = ۱ \\ y - z = -۱ \end{cases}$$

با مقایسه‌ی معادلات فوق با یک‌دیگر جواب‌های زیر به‌دست می‌آیند.

$$x = ۳ \,,\, y = -۲ \,,\, z = -۱$$

پس:

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۳^۲ + (-۲)^۲ + (-۱)^۲ = ۱۴$$

۷. گزینه $\boxed{۲}$

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲x + ۳y \\ ۳x + ۲y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x + ۳y = -۱ \\ ۳x + ۲y = ۱ \end{cases}$$

اگر معادله‌ی اول را در عدد ۳، معادله‌ی دوم را در عدد ۲- ضرب کرده و طرفین آن‌ها را با هم جمع کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{cases} ۶x + ۹y = -۳ \\ -۶x - ۴y = -۲ \end{cases} \Rightarrow ۵y = -۵ \Rightarrow y = -۱$$

۸. گزینه $\boxed{۱}$ در حالت کلی، حاصل‌ضرب دو ماترس بالامثلثی یک ماتریس بالامثلثی است و درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس حاصل‌ضرب از ضرب نظیربه‌نظیر درایه‌های روی قطر اصلی آن دو ماتریس به‌دست می‌آیند، ولی درایه‌های بالای قطر اصلی را باید با ضرب کردن به‌دست آورد. برای مثال:

$$\begin{bmatrix} a & d & e \\ ۰ & b & f \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & d' & e' \\ ۰ & b' & f' \\ ۰ & ۰ & c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' & x & y \\ ۰ & bb' & z \\ ۰ & ۰ & cc' \end{bmatrix}$$

پس در این تست حاصل‌ضرب AB به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$$AB = \begin{bmatrix} a & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۲ & ۷ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۶ & ۶ & ۷ \\ ۰ & -۲c & ۸ \\ ۰ & ۰ & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶a & ? & ? \\ ۰ & -۴c & ? \\ ۰ & ۰ & ۲b \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\text{مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس } AB = ۶a - ۴c + ۲b$$

$$= ۲\underbrace{(۳a - ۲c + b)}_{۹} = ۲ \times ۹ = ۱۸$$

۹. گزینه $\boxed{۳}$ فقط درایه‌های زیر قطر اصلی AB را به‌دست می‌آوریم و آن‌ها را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$AB = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & a \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۳ & ۶ & ۱ \\ ۱ & b & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ -۶ + a & ? & ? \\ ۰ & ۶ + ۳b & ? \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۶ + a = ۰ \\ ۶ + ۳b = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۶ \\ b = -۲ \end{cases} \Rightarrow a + b = ۴$$

۱۰. گزینه ۴ کافی است فقط سطر سوم ماتریس A را در ستون سوم آن ضرب کنیم:

$$A^{۲}=A\times A=\begin{bmatrix}۲&۳&-۴\\۱&-۲&۳\\۴&۲&m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۳&-۴\\۱&-۲&۳\\۴&۲&m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\_\_\_&\_\_\_&\_\_\_\\\_\_\_&\_\_\_&\_\_\_\\\_\_\_&\_\_\_&-۱۰+m^{۲}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow -۱۰+m^{۲}=۶\Rightarrow m^{۲}=۱۶\Rightarrow m=\pm۴$$

۱۱. گزینه ۴ ابتدا ماتریس‌های AB و BA را به‌دست می‌آوریم:

$$AB=\begin{bmatrix}۵&۲\\۲&۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&-۱\\-۱&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲&-۵\\-۴&-۲\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}۰&-۱\\-۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۵&۲\\۲&۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲&-۴\\-۵&-۲\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$AB-BA=\begin{bmatrix}-۲&-۵\\-۴&-۲\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-۲&-۴\\-۵&-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&-۱\\۱&۰\end{bmatrix}$$

۱۲. گزینه ۱ ابتدا $B^{۲}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$B^{۲}=\begin{bmatrix}۰&۱\\۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۱\\۱&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=I$$

بنابراین: $B^{۲}A=IA=A$

۱۳. گزینه ۳

$$A=\begin{bmatrix}۱&۱\\-۱&۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^{۲}=\begin{bmatrix}۱&۱\\-۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۱\\-۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۲\\-۲&۰\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{۴}=A^{۲}\times A^{۲}=\begin{bmatrix}۰&۲\\-۲&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۲\\-۲&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۴&۰\\۰&-۴\end{bmatrix}=-۴I_{۲}$$

۱۴. گزینه ۳ ابتدا چند توان اول را به‌دست می‌آوریم:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۱&۲\\۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۲\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۴\\۰&۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{۳}=A^{۲}\times A=\begin{bmatrix}۱&۴\\۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۲\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۶\\۰&۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{۴}=A^{۳}\times A=\begin{bmatrix}۱&۶\\۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۲\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۸\\۰&۱\end{bmatrix}$$

با مشاهده‌ی این روند معلوم می‌شود که فرم کلی ماتریس A^{n} به‌صورت $\begin{bmatrix}۱&۲n\\۰&۱\end{bmatrix}$ است؛ پس درایه‌ی واقع در سطر اول و ستون دوم $A^{۲۰}$ برابر ۴۰ است.

۱۵. گزینه ۲ توجه کنید که ماتریس A یک ماتریس بالامثلثی است.

$$A^{۲}=A\times A=\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۲&۲\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=A^{۲}\times A=\begin{bmatrix}۱&۲&۲\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۳&۳\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A^{۱۰}=A^{۹}\times A=\begin{bmatrix}۱&۱۰&۱۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{۱۰}\ \text{درایه‌ی سطر اول ستون سوم}=۱۰$$

۱۶. گزینه ۴ ماتریس ACB تعریف شده است، زیرا:

$$A_{۲\times۳}C_{۳\times۳}B_{۳\times۴}$$

۱۷. گزینه ۲ چون A قطری است، پس درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر هستند، بنابراین داریم:

$$\begin{cases}m+۴=۰\\n+۲=۰\end{cases}\overset{+}{\Rightarrow} m+n=-۶$$

۱۸. گزینه ۳

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۲&۰&-۴\\۴&۲&۱\\۱&-۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۰&-۴\\۴&۲&۱\\۱&-۱&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۴&-۸\\۱۷&۳&-۱۴\\-۲&-۲&-۵\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی برابر با عدد ۲- است.

البته می‌توانستیم فقط درایه‌های روی قطر اصلی را به‌دست آوریم.

۱۹. گزینه ۴ درایه‌های ستون دوم ماتریس $\begin{bmatrix}a_{۱۲}\\a_{۲۲}\\a_{۳۲}\end{bmatrix}$ هستند. طبق تعریف داریم:

$$a_{۱۲}=۲(۱)-۲=۰\qquad (i<j)$$
$$a_{۲۲}=۲(۲)+۲=۶\qquad (i=j)$$
$$a_{۳۲}=۲(۲)+۳=۷\qquad (i>j)$$

بنابراین مجموع این درایه‌ها برابر $۱۳=۷+۶+۰$ است.

۲۰. گزینه ۴ با توجه به گزینه‌ها تنها گزینه‌ی «۴» درست است:

$$a_{ij}=\begin{cases}j+۱ & i\le j\\ j+i & i>j\end{cases}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۲&۳&۴\\۳&۳&۴\\۴&۵&۴\end{bmatrix}$$

۲۱. گزینه ۱ کافی است ستون دوم A را با ستون دوم B جمع کنیم:

$$A\ \text{ستون دوم}=\begin{bmatrix}۱\\۳\\۵\end{bmatrix}\quad,\quad B\ \text{ستون دوم}=\begin{bmatrix}-۱\\۲\\۷\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع این درایه‌ها}=۱+۳+۵+(-۱)+۲+۷=۱۷$$

۲۲. گزینه ۳ ماتریس A قطری است، هرگاه درایه‌های غیر قطر اصلی صفر باشند،

$$A=\begin{bmatrix}—&a^{۲}-۳a+۲&a^{۲}-۳a+۲\\a^{۲}-۳a+۲&—&a^{۲}-۶a+۸\\a^{۲}-۳a+۲&a^{۲}-۶a+۸&—\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}a^{۲}-۳a+۲=۰\Rightarrow (a-۲)(a-۱)=۰\Rightarrow a=۲\ \text{یا}\ a=۱\\ a^{۲}-۶a+۸=۰\Rightarrow a=۴\ \text{یا}\ a=۲\end{array}\right\}$$

$$\overset{\text{اشتراک}}{\Rightarrow} a=۲$$

۲۳. گزینه ۴ برای محاسبه‌ی ABC ابتدا AB را به‌دست می‌آوریم. البته توجه کنید چون $d_{۱۲}$ را می‌خواهیم محاسبه کنیم پس سطر اول AB کفایت می‌کند:

$$AB=\begin{bmatrix}-۱&۲&-۲\\۴&۳&-۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴&-۳\\۵&۱\\۲&-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۷\\\_\_\_&\_\_\_\end{bmatrix}$$

حال:

$$d_{۱۲}=\begin{bmatrix}۲&۷\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\۰\end{bmatrix}=۴$$

بنابراین:

$$d_{۱۲}^{۲}+d_{۱۲}=۴^{۲}+۴=۲۰$$

۲۴. گزینه ۲ AB و BA هر دو تعریف شده‌اند پس چون A ماتریس $m\times n$ است، B ماتریس $n\times m$ باید باشد یعنی $q=m$ و $p=n$

پس:

$$\begin{cases} m+n+p+q=۵۴ \\ mnpq=۳۲۴۰۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲(m+n)=۵۴ \\ m^۲n^۲=۳۲۴۰۰ \end{cases}$$

درنتیجه:

$$m+n=۲۷ \quad , \quad mn=۱۸۰$$

$$m^۲+n^۲+p^۲+q^۲=۲(m^۲+n^۲)=۲[(m+n)^۲-۲mn]$$
$$=۲[(۲۷)^۲-۲(۱۸۰)]=۷۳۸$$

۲۵. گزینه ۴ از رابطه‌ی $(A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲$ نتیجه می‌گیریم:

$$AB=BA$$

پس اتحادها برقرارند. یعنی هر ۴ رابطه‌ی داده‌شده درست هستند.

۲۶. گزینه ۲ فرض کنید $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد پس:

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ -۶ & ۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۲a-۲c & ۲b-۲d \\ -۶a+۶c & -۶b+۶d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}$$

به جای هر کدام از a و b، ۵ عدد می‌توان جاگذاری کرد پس کلاً $۵^۲=۲۵$ ماتریس A می‌توان تشکیل داد.

۲۷. گزینه ۴ از دستگاه زیر ماتریس B را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} ۲A+B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \\ A+B=\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \end{cases} \xrightarrow{-} A=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B=\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$B^۲=B\times B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۷ & ۲ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\text{جمع درایه‌ها} \Rightarrow =۷+۲-۱+۲=۱۰$$

۲۸. گزینه ۴ ابتدا کافیست سطر دوم $A^۲$ را بدست آوریم:

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۲ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۲ & -۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ ۷ & ۱ & -۱ \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}$$

حالا سطر دوم $A^۲$ را در ستون سوم A ضرب می‌کنیم:

$$A^۳=A^۲\times A=\begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ ۷ & ۱ & -۱ \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۲ & -۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & ۳ \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}$$

۲۹. گزینه ۳

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۰ & ۱+\tan^۲\alpha \\ \cos^۲\alpha & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱+\tan^۲\alpha \\ \cos^۲\alpha & ۰ \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} ۰ & \frac{۱}{\cos^۲\alpha} \\ \cos^۲\alpha & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & \frac{۱}{\cos^۲\alpha} \\ \cos^۲\alpha & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=I$$

$$A^۷=(A^۲)^۳\times A=I^۳\times A=A \quad , \quad A^۸=(A^۲)^۴=I^۴=I$$

$$A^۷+A^۸=I+A$$

۳۰. گزینه ۳ ابتدا ماتریس $A^۲$ را بدست می‌آوریم.

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix} ۰ & ۷ \\ -\frac{۱}{۷} & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۷ \\ -\frac{۱}{۷} & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}=-I$$

$$A^{۲۵}=(A^۲)^{۱۲}\times A=(-I)^{۱۲}\times A=A$$

۳۱. گزینه ۳ ابتدا چند توان اولیه را بدست می‌آوریم:

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=I$$

$$A^۳=A^۲A=IA=A$$
$$A^۴=A^۲\times A^۲=I\times I=I$$
$$\vdots$$

پس توان‌های زوج A برابر I و توان‌های فرد A برابر خود A است.

۳۲. گزینه ۳ ابتدا ماتریس $A^۲$ را بدست می‌آوریم:

$$A^۲=\begin{bmatrix} -۱ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۳ & ۳ \\ ۳ & ۳ & ۳ \\ ۳ & ۳ & ۳ \end{bmatrix}$$

پس: $A^۲=-۳A$ و می‌دانیم: $A^۲=\lambda A \Rightarrow A^n=\lambda^{n-۱}A$

در نتیجه:

$$A^۵=(-۳)^۴A=۸۱A=\begin{bmatrix} -۸۱ & -۸۱ & -۸۱ \\ -۸۱ & -۸۱ & -۸۱ \\ -۸۱ & -۸۱ & -۸۱ \end{bmatrix}$$

یعنی مجموع درایه‌های $A^۵$ برابر است با: $(-۸۱)\times ۹=-۳^۶$

۳۳. گزینه ۳ توجه کنید که حاصل‌ضرب دو ماتریس بالامثلثی یک ماتریس بالامثلثی است.

پس اگر $A=\begin{bmatrix} a & d & e \\ ۰ & b & f \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}$ آن‌گاه ماتریس A^n به‌صورت $\begin{bmatrix} d^n & x & y \\ ۰ & b^n & z \\ ۰ & ۰ & c^n \end{bmatrix}$ است. یعنی برای محاسبه‌ی توان‌های ماتریس بالامثلثی A فقط لازم است درایه‌های بالای قطر اصلی را با ضرب بدست آوریم:

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۱۰ \\ ۰ & ۱ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^۳=A^۲\times A=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۱۰ \\ ۰ & ۱ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۶ & ۲۱ \\ ۰ & ۱ & ۶ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

با ادامه‌ی این روند نتیجه می‌گیریم:

$$A^n=\begin{bmatrix} ۱ & ۲n & x \\ ۰ & ۱ & ۲n \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$A^{۲۴}=\begin{bmatrix} ۱ & ۴۸ & x \\ ۰ & ۱ & ۴۸ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های سطر دوم $A^{۲۴}$ عدد ۴۹ است.

۳۴. گزینه $\boxed{3}$ چند توان اولیه‌ی A را بدست می‌آوریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\5&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\5&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\5&0&0\\0&5&0\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}0&0&1\\5&0&0\\0&5&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\5&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}=5I$$

بنابراین: $A^3=5I$

$$\Rightarrow A^9=(5I)^3=125I\Rightarrow A^{11}=A^9\times A^2=(125I)(A^2)$$

$$=125A^2=125\begin{bmatrix}0&0&1\\5&0&0\\0&5&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&125\\625&0&0\\0&625&0\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌ها $=625+625+125=1375$

---

۳۵. گزینه $\boxed{3}$

$$A^2=3I-4A\xrightarrow{\times A}A^3=-3A-4A^2$$

$$\xrightarrow{A^2=3I-4A}A^3=3A-4(3I-4A)=3A-12I+16A$$
$$=19A-12I$$

---

۳۶. گزینه $\boxed{2}$

$$A^2=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&10\\15&22\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}7&10\\15&22\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}37&54\\81&118\end{bmatrix}$$

$$A^3=mA-nI\Rightarrow\begin{bmatrix}37&54\\81&118\end{bmatrix}=m\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}-n\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow m-n=37$$

---

۳۷. گزینه $\boxed{1}$ می‌دانیم اگر یکی از ماتریس‌ها مضربی از I باشد می‌توانیم اتحادها را به‌کار ببریم:

$$A(I+A)^3=A(I^3+A^3+3A^2I+3AI^2)$$
$$=A(I+A^3+3A^2+3A)$$
$$\xlongequal{A^2=\bar{O}}A(I+\bar{O}+3\times\bar{O}+3A)=A(I+3A)$$
$$=A+3A^2=A+3\times\bar{O}=A$$

---

۳۸. گزینه $\boxed{4}$ C یک ماتریس 10×6 و A یک ماتریس $m\times7$ است. پس ماتریس CA در صورتی قابل تعریف است که $m=10$ باشد. B یک ماتریس $n\times5$ است. پس ماتریس CAB تعریف می‌شود هرگاه $n=7$ باشد، درنتیجه $mn=70$.

---

۳۹. گزینه $\boxed{3}$

$$A=\begin{bmatrix}a&0&0&0&0&0\\0&b&0&0&0&0\\0&0&c&0&0&0\\0&0&0&d&0&0\\0&0&0&0&e&0\\0&0&0&0&0&f\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}a^2&0&0&0&0&0\\0&b^2&0&0&0&0\\0&0&c^2&0&0&0\\0&0&0&d^2&0&0\\0&0&0&0&e^2&0\\0&0&0&0&0&f^2\end{bmatrix}$$

$$A^2=I\Rightarrow a^2=1\Rightarrow a=\pm1$$

به‌همین ترتیب: $b=\pm1,\ c=\pm1,\ d=\pm1,\ e=\pm1,\ f=\pm1$

بنابراین هرکدام از متغیرهای a، b، c، d، e و f دو حالت ۱ یا ۱- می‌توانند باشند یعنی به 2^6 حالت می‌توان ماتریس A را تشکیل داد.

---

۴۰. گزینه $\boxed{2}$ اگر از درایه‌های ماتریس B عدد ۲ را فاکتور بگیریم نتیجه می‌شود $B=2A$. بنابراین داریم:

$$BA=2A\times A=2A^2$$

---

۴۱. گزینه $\boxed{3}$ فقط درایه‌های قطری اصلی A^2 را به‌دست می‌آوریم:

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}1&-2&3&1\\-1&2&0&-1\\1&0&2&2\\0&0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&3&1\\-1&2&0&-1\\1&0&2&2\\0&0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6&&&\\&6&&\\&&5&\\&&&-1\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ جمع درایه‌های روی قطر اصلی $=16$

---

۴۲. گزینه $\boxed{2}$ با توجه به شرایط تست اگر A و B قطری باشند $AB=BA$ است. اگر A اسکالر باشد و روی قطر اصلی آن تمامی درایه‌ها برابر a باشد آن‌گاه: $AB=BA=aB$

موارد (الف)، (ج) و (د) ممکن است درست نباشد.

مثال نقض الف)

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\1&-1\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}1&0\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

A^2 قطری است ولی A قطری نیست.

مثال نقض ج) اگر $A=I$ باشد، A با B جابه‌جا می‌شود و A با C نیز جابه‌جا می‌شود ولی دلیلی ندارد B با C جابه‌جا شود.

مثال نقض د)

$$A=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0&0\\2&0\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^3=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$B^2=\begin{bmatrix}0&0\\2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\2&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow B^3=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow A^3=B^3$$

---

۴۳. گزینه $\boxed{3}$ با توجه به تعریف A داریم:

$$A=\begin{bmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{bmatrix}$$

در این صورت داریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{bmatrix}$$

$$=-\begin{bmatrix}a^2+b^2&bc&-ac\\bc&a^2+c^2&ab\\-ac&ab&b^2+c^2\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a^2+b^2=2\\a^2+c^2=2\Rightarrow2(a^2+b^2+c^2)=6\\b^2+c^2=2\end{cases}$$

که این همان خواسته‌ی مسئله است.

۴۴. گزینه $\boxed{۴}$ درایه‌های ماتریس‌های A و B را با توجه به تعریف آن‌ها به‌دست می‌آوریم:

$$A=[a_{ij}]_{۳\times۳}=\begin{bmatrix}۰&۱&۲\\۳&۰&۱\\۴&۵&۰\end{bmatrix}\quad,\quad B=[b_{ij}]_{۳\times۳}=\begin{bmatrix}۰&۳&۴\\۱&۰&۵\\۲&۱&۰\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$A-B=\begin{bmatrix}۰&۱&۲\\۳&۰&۱\\۴&۵&۰\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۰&۳&۴\\۱&۰&۵\\۲&۱&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&-۲&-۲\\۲&۰&-۴\\۲&۴&۰\end{bmatrix}$$

در نتیجه مجموع تمام درایه‌های آن صفر است.

۴۵. گزینه $\boxed{۳}$ ماتریس A طبق تعریف به‌صورت زیر است:

$$A=\begin{bmatrix}۱&۲&۳&۴&۵&۶&۷\\۲&۲\times۲&۲\times۳&۲\times۴&۲\times۵&۲\times۶&۲\times۷\\۳&۳\times۲&۳\times۳&۳\times۴&۳\times۵&۳\times۶&۳\times۷\\۴&۴\times۲&۴\times۳&۴\times۴&۴\times۵&۴\times۶&۴\times۷\\۵&۵\times۲&۵\times۳&۵\times۴&۵\times۵&۵\times۶&۵\times۷\\۶&۶\times۲&۶\times۳&۶\times۴&۶\times۵&۶\times۶&۶\times۷\\۷&۷\times۲&۷\times۳&۷\times۴&۷\times۵&۷\times۶&۷\times۷\end{bmatrix}$$

یعنی سطر i ام i برابر سطر اول است. مجموع درایه‌های سطر اول با $\frac{۷\times۸}{۲}$ یعنی ۲۸ برابر است. پس:

$$\text{مجموع درایه‌های } A=۱\times۲۸+۲\times۲۸+\cdots+۷\times۲۸$$
$$=۲۸(۱+۲+\cdots+۷)=۲۸\times۲۸$$
$$=۷۸۴$$

۴۶. گزینه $\boxed{۲}$ مانند مسأله‌ی قبل داریم:

$$\text{مجموع درایه‌های } A=\left[\frac{n(n+۱)}{۲}\right]^۲$$

پس:

$$\left[\frac{n(n+۱)}{۲}\right]^۲=۱۲۹۶\Rightarrow\frac{n(n+۱)}{۲}=۳۶\Rightarrow n=۸$$

۴۷. گزینه $\boxed{۲}$ ماتریس A به‌صورت زیر است:

$$A=\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۲&۴&۸\\۳^۱&۳^۲&۳^۳\\\vdots&\vdots&\vdots\\m^۱&m^۲&m^۳\end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه‌های ستون اول}=۱+۲^۱+۳^۱+\cdots+m^۱=۲۸$$

$$\Rightarrow\frac{m(m+۱)}{۲}=۲۸\Rightarrow m=۷$$

پس:

$$\text{مجموع درایه‌های ستون سوم}=۱^۳+۲^۳+\cdots+۷^۳$$
$$=\left[\frac{۷(۷+۱)}{۲}\right]^۲=۲۸^۲=۷۸۴$$

۴۸. گزینه $\boxed{۳}$

$$a_{۱۱}+a_{۱۲}+a_{۱۳}+a_{۲۱}+a_{۲۲}+a_{۲۳}+a_{۳۱}+a_{۳۲}+a_{۳۳}$$
$$=۱+۲+۳+\cdots+۹=\frac{۹\times۱۰}{۲}=۴۵$$
$$\Rightarrow a_{۱۱}+a_{۱۲}+a_{۱۳}=\frac{۴۵}{۳}=۱۵$$

یعنی مجموع هر سه سطر، هر سه ستون، قطر اصلی و قطر فرعی با هم برابر بوده و ۱۵ است.

$$\underbrace{a_{۲۱}+a_{۲۲}+a_{۲۳}}_{\text{سطر دوم}}+\underbrace{a_{۱۲}+a_{۲۲}+a_{۳۲}}_{\text{ستون دوم}}+\underbrace{a_{۱۱}+a_{۲۲}+a_{۳۳}}_{\text{قطر اصلی}}+\underbrace{a_{۱۳}+a_{۲۲}+a_{۳۱}}_{\text{قطر فرعی}}$$
$$=۱۵\times۴=۶۰$$
$$\Rightarrow\underbrace{a_{۱۱}+a_{۱۲}+\cdots+a_{۳۳}}_{۴۵}+۳a_{۲۲}=۶۰$$
$$\Rightarrow ۳a_{۲۲}=۶۰-۴۵=۱۵\Rightarrow a_{۲۲}=۵$$

۴۹. گزینه $\boxed{۲}$ می‌دانیم اگر A ماتریسی $m\times n$ باشد آن‌گاه دارای mn تا درایه است پس:

$$mn=۱۳۹۷\Rightarrow mn=۱۱\times۱۲۷$$

چون هم ۱۱ و هم ۱۲۷ اول‌اند درنتیجه: $m=۱۱$ و $n=۱۲۷$ یا $m=۱۲۷$ و $n=۱۱$ است. در هر صورت $m+n=۱۳۸$.

۵۰. گزینه $\boxed{۳}$ هر ماتریس اسکالر به‌صورت زیر است:

$$A=\begin{bmatrix}x&۰&۰&\cdots&۰\\۰&x&۰&\cdots&۰\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\۰&۰&۰&\cdots&x\end{bmatrix}$$

پس: x گویا است

$$\begin{cases}x^n=۶۴\xrightarrow{x\text{ گویا}}x\text{ طبیعی است}\\xn=۱۲\Rightarrow\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=۶۴\,,\,n=۱\ \text{یا}\ x=۴\,,\,n=۳\ \text{یا}\ x=۸\ ,\ n=۲$$

یا $n=۶$ و $x=۲$.

حالت‌های $n=۱$ و $x=۶۴$ و $n=۲$ و $x=۸$ مورد پذیرش نیست زیرا $xn\neq۱۲$.

پس دو حالت ممکن وجود دارد.

۵۱. گزینه $\boxed{۲}$

$$\begin{bmatrix}۵&۶\\۷&۱۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a+b+c+d&a-b+c+d\\a+b-c+d&a+b+c-d\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-a+b+c+d=۵\\a-b+c+d=۶\\a+b-c+d=۷\\a+b+c-d=۱۰\end{cases}\overset{+}{\Rightarrow}۲(a+b+c+d)=۲۸$$

$$\Rightarrow a+b+c+d=۱۴$$

حال معادله‌ی اخیر را با هرکدام از معادلات بالا حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}a+b+c+d=۱۴\\-a+b+c+d=۵\end{cases}\Rightarrow ۲a=۹\Rightarrow a=\frac{۹}{۲}$$

به‌همین ترتیب خواهیم داشت: $b=۴\ ,\ c=\frac{۷}{۲}\ ,\ d=۲$

در نتیجه: $a+۲b+۳c+۴d=\frac{۹}{۲}+۸+\frac{۲۱}{۲}+۸=۳۱$

۵۲. گزینه ۱ فرض کنید $B=\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}$.

$$AB=BA\Rightarrow\begin{bmatrix}a&۰\\۰&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&۰\\۰&b\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}ax&ay\\bz&bt\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ax&by\\az&bt\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}ax=ax\\ay=by\Rightarrow y(b-a)=۰\Rightarrow y=۰\\bz=az\Rightarrow z(b-a)=۰\Rightarrow z=۰\\bt=bt\end{cases}$$

بنابراین ماتریس B به صورت $\begin{bmatrix}x&۰\\۰&t\end{bmatrix}$ است که یک ماتریس قطری است.

۵۳. گزینه ۱ فرض کنید $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}$ در این صورت:

درایه‌های روی قطر اصلی AB عبارتند از: $ax+bz\ ,\ cy+dt$

پس مجموع آن‌ها برابر با $ax+bz+cy+dt$ است. هم‌چنین

درایه‌های روی قطر اصلی BA عبارتند از: $ax+cy\ ,\ bz+dt$

پس مجموع آن‌ها برابر با $ax+bz+cy+dt$ است. توجه کنید که این نکته در حالت کلی برقرار است که اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند، مجموع درایه‌های روی قطر اصلی دو ماتریس AB و BA با هم برابرند.

۵۴. گزینه ۲ طبق اطلاعات مسأله داریم:

$$B=\begin{bmatrix}a\\a^۲\\a^۳\end{bmatrix}$$

$$A\times B=۱۲\Rightarrow\begin{bmatrix}۱&-۲&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\a^۲\\a^۳\end{bmatrix}=۱۲\Rightarrow a-۲a^۲+a^۳=۱۲$$

یکی از جواب‌های این معادله $a=۳$ است، پس:

$$(a-۳)(a^۲+a+۴)=۰$$

معادله‌ی $a^۲+a+۴=۰$ ریشه ندارد زیرا Δ ی آن منفی است.

بنابراین تنها جواب معادله $a=۳$ است در نتیجه ماتریس B به‌صورت $B=\begin{bmatrix}۳\\۹\\۲۷\end{bmatrix}$ بوده که مجموع درایه‌های آن ۳۹ است.

۵۵. گزینه ۳

$$A^۲+B^۲-AB-BA=(A-B)^۲$$

از طرفی $A-B=-C$ پس:

$$A^۲+B^۲-AB-BA=(-C)^۲=C^۲$$

۵۶. گزینه ۴ با توجه به رابطه‌ی $(A+B)^۲=A^۲+B^۲+AB+BA$ جواب را پیدا می‌کنیم:

$$(A+B)^۲=\begin{bmatrix}۳&۳\\۳&۳\end{bmatrix}^۲=\begin{bmatrix}۱۸&۱۸\\۱۸&۱۸\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\begin{bmatrix}۱۸&۱۸\\۱۸&۱۸\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۴\\۰&۴\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱&-۱\\۲&۳\end{bmatrix}+AB+BA$$

$$\Rightarrow AB+BA=\begin{bmatrix}۱۸&۱۸\\۱۸&۱۸\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱&۳\\۲&۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۷&۱۵\\۱۶&۱۱\end{bmatrix}$$

۵۷. گزینه ۴ فرض کنید $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}$ در این صورت داریم:

$$AB=\begin{bmatrix}ax+bz&ay+bt\\cx+dz&cy+dt\end{bmatrix},\ BA=\begin{bmatrix}ax+cy&bx+dy\\az+ct&bz+dt\end{bmatrix}$$

پس:

$$AB-BA=\begin{bmatrix}bz-cy&\text{———}\\\text{———}&cy-bz\end{bmatrix}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید درایه‌های واقع بر قطر اصلی ماتریس $AB-BA$ قرینه‌ی یکدیگرند که در هیچ کدام از گزینه‌ها چنین چیزی دیده نمی‌شود.

در حالت کلی می‌توان نشان داد که اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه باشند آن‌گاه مجموع درایه‌های روی قطر اصلی $AB-BA$ برابر صفر است.

۵۸. گزینه ۲ با توجه به اطلاعات مسأله می‌توانیم بنویسیم:

$$(BA)C=B(AC)=B(CA)=BCA$$

و هم‌چنین:

$$C(BA)=(CB)A=BCA$$

پس ماتریس C با ماتریس BA جابه‌جا می‌شود.

با درنظر گرفتن $C=I$ گزینه‌های دیگر رد می‌شوند.

۵۹. گزینه ۴ ماتریس‌های A و B را با توجه به فرض می‌توان به‌صورت زیر انتخاب کرد:

$$A=\begin{bmatrix}a&k-a\\b&k-b\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}c&k-c\\d&k-d\end{bmatrix}$$

پس:

$$AB=\begin{bmatrix}ac+kd-ad&ak-ac+k^۲-ak-dk+da\\bc+dk-bd&bk-bc+k^۲-bk-dk+bd\end{bmatrix}$$

AB مجموع تمام درایه‌های $=۷۲$

$$\Rightarrow ۲k^۲=۷۲\Rightarrow k=\pm۶\Rightarrow ۲k=\pm۱۲$$

۶۰. گزینه ۲ ابتدا $A^۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix}۲&۳\\-۱&-۲\end{bmatrix}$$

$$A^۲=\begin{bmatrix}۲&۳\\-۱&-۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۳\\-۱&-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$A^{۱۵!}=A^{۲\overbrace{(۳\times۴\times\cdots\times۱۵)}^{k}}=(A^۲)^k=(I)^k=I$$

۶۱. گزینه ۱ اگر یکی از ماتریس‌ها مضربی از I باشد می‌توانیم اتحادها را بنویسیم:

$$\begin{aligned}A(A-۲I)^۲&=A(A^۲+۴I-۴A)=A(۳A+I+۴I-۴A)\\&=A(۵I-A)=۵A-A^۲=۵A-(۳A+I)\\&=۲A-I\end{aligned}$$

۶۲. گزینه ۲ طبق فرض $AB=-\frac{۳}{۲}BA$، پس داریم:

$$AB^{۳}=(AB)B^{۲}=(-\frac{۳}{۲}BA)B^{۲}=-\frac{۳}{۲}B(AB)B$$
$$=-\frac{۳}{۲}B(-\frac{۳}{۲}BA)B=\frac{۹}{۴}B^{۲}(AB)$$
$$=\frac{۹}{۴}B^{۲}(-\frac{۳}{۲}BA)=-\frac{۲۷}{۸}B^{۳}A$$

بنابراین $k=-\frac{۲۷}{۸}$.

۶۳. گزینه ۱ اگر $A^{۳}$ را محاسبه کنیم، آن‌گاه نتیجه می‌گیریم $A^{۳}=\bar{O}$، بنابراین داریم:

$$(A-۲I)(A^{۲}+۲A+I)=A^{۳}+۲A^{۲}+A-۲A^{۲}-۴A-۲I$$
$$=-۳A-۲I=-۳\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\a&۰&۰\\b&c&۰\end{bmatrix}-۲\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-۲&۰&۰\\-۳a&-۲&۰\\-۳b&-۳c&-۲\end{bmatrix}$$

۶۴. گزینه ۴ از فرض سؤال نتیجه می‌گیریم:

$AB=B$ ۱ $\qquad BA=A$ ۲

$$\Rightarrow\begin{cases}AB=B\overset{۲}{\Rightarrow}BAB=B\overset{۱}{\Rightarrow}BB=B\Rightarrow B^{۲}=B\\ BA=A\overset{۱}{\Rightarrow}ABA=A\overset{۲}{\Rightarrow}AA=A\Rightarrow A^{۲}=A\end{cases}$$
$$(A+B)^{۲}=A^{۲}+AB+BA+B^{۲}=A+B+A+B=۲(A+B)$$
$$(A+B)^{۳}=(A+B)^{۲}(A+B)=۲(A+B)(A+B)$$
$$=۲(A+B)^{۲}=۴(A+B)$$

اگر $AB=I$ باشد حاصل برابر با $۸I$ است و فقط گزینه‌ی «۴» درست است.

۶۵. گزینه ۳ از فرض $A^{۲}=A$ استفاده کرده، داریم:

$$(I-A)^{۲}=I^{۲}+A^{۲}-۲AI=I+A-۲A=I-A$$

دیده می‌شود $(I-A)^{۲}=I-A$ پس $(I-A)^{۱۰۰}$ نیز برابر $I-A$ است.

۶۶. گزینه ۴

$$A=\begin{bmatrix}۰&۰&۱\\۰&۱&۰\\۱&۰&۰\end{bmatrix}\Rightarrow A^{۲}=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}=I$$

بنابراین A^n به‌ازای nهای زوج برابر I و به‌ازای nهای فرد برابر A است، پس:

$$A^{۱۳۹۸}-A^{۱۳۹۷}=I-A$$
$$=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۰&۰&۱\\۰&۱&۰\\۱&۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰&-۱\\۰&۰&۰\\-۱&۰&۱\end{bmatrix}$$

که این ماتریس دارای پنج درایه‌ی صفر است.

۶۷. گزینه ۴ ابتدا چند درایه‌ی اولیه را به‌دست آورده و یک فرمول کلی برای توان‌های A پیدا می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}۱&۲&۳\\۰&۱&۲\\۰&۰&۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^{۲}=\begin{bmatrix}۱&۲&۳\\۰&۱&۲\\۰&۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۲&۳\\۰&۱&۲\\۰&۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۴&۱۰\\۰&۱&۴\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow A^{۳}=A^{۲}\times A=\begin{bmatrix}۱&۴&۱۰\\۰&۱&۴\\۰&۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۲&۳\\۰&۱&۲\\۰&۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۶&۲۱\\۰&۱&۶\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$$
$$\vdots$$
$$A^n=\begin{bmatrix}۱&۲n&۳n+\frac{n(n-۱)}{۲}\times ۴\\۰&۱&۲n\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$$

پس:

$$A^{۱۰}=\begin{bmatrix}۱&۲۰&۳۰+۱۸۰\\۰&۱&۲۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}$$

۶۸. گزینه ۴ یک فرمول کلی برای A^n به‌دست می‌آوریم:

$$A=\begin{bmatrix}۱&۳\\۰&۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^{۲}=\begin{bmatrix}۱&۳\\۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۳\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۶\\۰&۱\end{bmatrix}$$
$$A^{۳}=A^{۲}\times A=\begin{bmatrix}۱&۶\\۰&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۳\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۹\\۰&۱\end{bmatrix}$$
$$\vdots$$
$$A^n=\begin{bmatrix}۱&۳n\\۰&۱\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$A+A^{۲}+\cdots+A^{۲۰}=\begin{bmatrix}۱&۳\\۰&۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱&۶\\۰&۱\end{bmatrix}+\cdots+\begin{bmatrix}۱&۶۰\\۰&۱\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}۲۰&۳(۱+۲+\cdots+۲۰)\\۰&۲۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲۰&۶۳۰\\۰&۲۰\end{bmatrix}$$

۶۹. گزینه ۳ از دو رابطه‌ی زیر استفاده خواهیم کرد:

الف) $$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^{۲}}+\cdots+\frac{۱}{۲^{۱۰}}=\frac{\frac{۱}{۲}[۱-(\frac{۱}{۲})^{۱۰}]}{۱-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱-(\frac{۱}{۲})^{۱۰}}{۱}$$

ب) $$\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳^{۲}}+\cdots+\frac{۱}{۳^{۱۰}}=\frac{\frac{۱}{۳}[۱-(\frac{۱}{۳})^{۱۰}]}{۱-\frac{۱}{۳}}=\frac{۱-(\frac{۱}{۳})^{۱۰}}{۲}$$

حال فرمول کلی A^n را به‌دست می‌آوریم:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}&۰\\۰&\frac{۱}{۳}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}&۰\\۰&\frac{۱}{۳}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\frac{۱}{۲})^{۲}&۰\\۰&(\frac{۱}{۳})^{۲}\end{bmatrix}$$
$$\vdots$$
$$A^n=\begin{bmatrix}(\frac{۱}{۲})^n&۰\\۰&(\frac{۱}{۳})^n\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$A+A^{۲}+\cdots+A^{۱۰}$$
$$=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}&۰\\۰&\frac{۱}{۳}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(\frac{۱}{۲})^{۲}&۰\\۰&(\frac{۱}{۳})^{۲}\end{bmatrix}+\cdots+\begin{bmatrix}(\frac{۱}{۲})^{۱۰}&۰\\۰&(\frac{۱}{۳})^{۱۰}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^{۲}}+\cdots+\frac{۱}{۲^{۱۰}}&۰\\۰&\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳^{۲}}+\cdots+\frac{۱}{۳^{۱۰}}\end{bmatrix}$$
$$\overset{\text{ب و الف}}{=\!=}\begin{bmatrix}۱-(\frac{۱}{۲})^{۱۰}&۰\\۰&\frac{۱-(\frac{۱}{۳})^{۱۰}}{۲}\end{bmatrix}$$

۷۰. گزینه ۱ ماتریس A به صورت زیر است:

$$A=\begin{bmatrix} ۰&۰&\cdots&۰&-۱\\ ۰&۰&\cdots&-۱&۰\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ -۱&۰&\cdots&۰&۰\end{bmatrix}$$

یعنی یک ماتریس مربعی مرتبه‌ی ۱۳۹۷ که قطر فرعی آن همگی عدد ۱- و بقیه‌ی درایه‌ها همگی صفرند. در چنین ماتریسی می‌توان نشان داد A^n به‌ازای n های زوج برابر I و به‌ازای n های فرد برابر A است، پس:

$$A^{۲۰۱۸}+A^{۲۰۱۹}=I+A$$

$$=\begin{bmatrix} ۱&۰&\cdots&۰\\ ۰&۱&\cdots&۰\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ ۰&۰&\cdots&۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰&۰&\cdots&۰&-۱\\ ۰&۰&\cdots&-۱&۰\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ -۱&۰&\cdots&۰&۰\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۱&۰&\cdots&&-۱\\ ۰&۱&\cdots&&۰\\ \vdots&\vdots&\ddots\ ۰\ \ddots&&\vdots\\ -۱&۰&\cdots&&۱\end{bmatrix}$$

یعنی در قطر اصلی $I+A$ یکی از درایه‌ها (درایه‌ی وسطی) صفر و بقیه عدد ۱ هستند، بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $I+A$ برابر ۱۳۹۶ است.

۷۱. گزینه ۳ ماتریس‌های A و B به‌صورت زیر هستند:

$$A=\begin{bmatrix} ۱&۱&\cdots&۱\\ ۲&۲&\cdots&۲\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ n&n&\cdots&n\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix} ۱&۲&\cdots&n\\ ۱&۲&\cdots&n\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ ۱&۲&\cdots&n\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$AB=\begin{bmatrix} n&\text{———}&&&\\ \text{—}&۴n&\text{———}&&\\ \text{———}&&۹n&\text{———}&\\ \text{———}&&&\ddots&\text{—}\\ \text{———}&&&&n^۲\times n\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های قطر اصلی برابر است با:

$$n+۲^۲\times n+۳^۲\times n+\cdots+n^۲\times n=n[۱+۲^۲+\cdots+n^۲]$$
$$=n\left[\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}\right]$$

۷۲. گزینه ۴ ماتریس A هم سطری و هم ستونی است، پس نتیجه‌ای که می‌توان گرفت این است که A به‌صورت $[a]_{۱\times۱}$ است، یعنی یک عدد حقیقی است. بنابراین:

$$x^۳+۴x^۲+۲x+۵=۳x^۲+x+۱۹\Rightarrow x^۳+x^۲+x-۱۴=۰$$
$$\Rightarrow x^۳+x^۲+x-۸-۴-۲=۰$$
$$\Rightarrow (x^۳-۸)+(x^۲-۴)+(x-۲)=۰$$
$$\Rightarrow (x-۲)(x^۲+۲x+۴)+(x-۲)(x+۲)+(x-۲)=۰$$
$$\Rightarrow (x-۲)(x^۲+۳x+۷)=۰\xrightarrow{x^۲+۳x+۷>۰}x-۲=۰\Rightarrow x=۲$$
$$\Rightarrow (۳x^۲+x+۱۹)^۲=۳۳^۲=۱۰۸۹$$

۷۳. گزینه ۲ چون حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی A برابر ۱۲۰ است پس روی قطر اصلی A درایه‌ی صفر وجود ندارد.

$$۱۲۰=۲\times۶۰=۲\times۳\times۲۰=۲\times۲\times۵\times۶=۲\times۲\times۲\times۳\times۵$$

بنابراین A از مرتبه‌ی ۱، ۲، ۳، ۴ و یا ۵ است. توجه کنید که روی قطر اصلی ماتریس A عدد ۱ هم نمی‌تواند قرار بگیرد.

۷۴. گزینه ۳ با استفاده از اطلاعات سؤال می‌فهمیم که ماتریس موردنظر ماتریس صفر است. پس:

$$۳B^۲A-BA=\bar{O}\Rightarrow ۳B^۲A=BA \qquad ①$$
$$B^۳A=B^۲(BA)\overset{①}{=}B^۲(۳B^۲A)=۳B^۴A=۳B^۳(BA)$$
$$\overset{①}{=}۳B^۳(۳B^۲A)=۹B^۵A=۹B^۴(BA)$$
$$\overset{①}{=}۹B^۴(۳B^۲A)=۲۷B^۶A$$

۷۵. گزینه ۲

$$A=\begin{bmatrix} ۳&۰&\cdots&۰\\ ۰&۴&\cdots&۰\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ ۰&&\cdots&۱۲\end{bmatrix}$$

پس:

$$A^tA=A.A=A^۲=\begin{bmatrix} ۳^۲&۰&\cdots&۰\\ ۰&۴^۲&\cdots&۰\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ ۰&&\cdots&۱۲^۲\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع تمام درایه‌های ماتریس $A^۲$ برابر است با:

$$۳^۲+۴^۲+\cdots+۱۲^۲=\frac{۱۲\times۱۳\times۲۵}{۶}-۵=۶۴۵$$

توجه کنید که: $۱^۲+۲^۲+\cdots+n^۲=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$

۷۶. گزینه ۳ می‌دانیم اگر اتحاد $(A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲$ برقرار باشد باید $AB=BA$ باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{bmatrix}۱&x\\۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۱\\y&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۱\\y&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&x\\۱&۱\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{bmatrix}۱+xy&x+۱\\y+۱&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&x+۱\\y+۱&xy+۱\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}۱+xy=۲\\x+۱=x+۱\\y+۱=y+۱\\۲=xy+۱\end{cases}\Rightarrow xy=۱$$

۷۷. گزینه ۲ طبق تعریف ماتریس زیر به‌دست می‌آید:

$$A=\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۱&۴&۴\\۱&۴&۹\end{bmatrix}$$

پس: مجموع درایه‌های ستون دوم $=۱+۴+۴=۹$

(البته کافی است درایه‌های ستون دوم را به‌دست آورید.)