بسم اللّه الرحمن الرحیم

هندسه مسطحه

از مقدمات تا المپیاد

انتشارات خوشخوان

مؤلفان: سیامک احمدپور
مصطفی مسگری‌مشهدی

پیشگفتار ناشر

مسابقه‌ها، کنکورها و المپیادهای علمی نقش عمده‌ای را در بارور کردن و شکفتن استعدادهای دانش‌آموزان ایفا می‌کنند و باید به جرأت ادعا کرد که این مسابقات توانسته‌اند اعتماد به نفس لازم در جوانان عزیز کشورمان برای رقابت علمی با جوانان سایر نقاط جهان را تا حد زیادی افزایش دهند. کتاب‌های موجود در دوره‌های تحصیلی به هیچ عنوان نمی‌توانند دانش‌آموزان را برای آماده شدن در این رقابت‌ها اغنا کنند، لذا لازم است در کنار کتاب‌های درسی، خلأ موجود خصوصاً برای دانش‌آموزان مستعد و ممتاز شناسایی و پر شود. در همین راستا **انتشارات خوشخوان** با استعانت از حضرت حق تعالی و به کمک تنی چند از اساتید و دبیران ممتاز ایران و نیز فارغ‌التحصیلان دانشگاه‌های مختلف که اغلب آنان در زمانی نه چندان دور، مدال‌آور المپیادهای علمی در سطح ایران و جهان بوده‌اند، کتاب‌هایی را تألیف و به دانش‌آموزان ارائه می‌نماید. امید است مورد پسند و استفاده‌ی دانش‌آموزان و دبیران این مرز و بوم قرار گیرند.

تقدیم به بزرگترین داشته های زندگیمان

دستان پر تلاش پدران

و قلب پر مهر مادران

و ای کاش چیزی با ارزش تر از این داشتیم ...

فهرست مطالب

مقدمه

هندسه یکی از قدیمی‌ترین علوم امروزی است که تاریخ آن به حدود ۴۰۰۰ سال پیش باز می‌گردد و همواره در طول اعصار مختلف بزرگترین فیلسوفان و دانشمندان و متفکران از افلاطون و دکارت و اقلیدس گرفته تا خیام و نظام‌الملک و خواجه نصیرالدین طوسی و علامه طباطبایی را مسحور و مجذوب زیبایی‌های خود کرده است. اما متأسفانه آنچه امروزه به عنوان هندسه در دبیرستان‌ها و سیستم آموزشی ما تدریس می‌شود به شدت با آنچه باید باشد فاصله دارد و هرگز نتوانسته‌ایم مفاهیم و زیبایی‌های مباحث هندسه را به درستی برای دانش‌آموزان و علاقمندان به تصویر بکشیم.

در این کتاب برای اولین بار سعی شده تا با بکارگیری نرم‌افزار Geometer's sketchpad در نسخه الکترونیکی آن، مفاهیم و مباحث هندسه مسطحه با روشی جدید و البته کاملاً جذاب برای دانش‌آموزان و علاقمندان بیان شود تا شاید بتوانیم قسمتی از ضعف‌ها و کاستی‌های سیستم آموزشی را بپوشانیم. امید است این روش جدید آموزشی در هندسه مسطحه مورد اقبال و استفاده دانش‌آموزان، معلمین و اساتید محترم قرار گیرد. همچنین این کتاب تمام مباحث هندسه از مقدماتی‌ترین مطالب تا سطح المپیادهای ریاضی را پوشش می‌دهد و می‌تواند منبع مناسبی برای علاقمندان به شرکت در مسابقات المپیادهای ریاضی باشد.

در اینجا لازم می‌دانیم از زحمات بی‌دریغ خانم مینا نورهاشمی و آقای بهزاد مهرداد که مسئولیت ویراستاری این اثر را بر عهده داشتند تشکر کنیم. همچنین از خانم عطیه عسگری و آقایان حامد احمدی و شمس‌الدین آخوندزاده و آرمان فاضلی و محمدجواد مقدم‌زاده به خاطر کمک‌های ایشان در نمونه خوانی و ویراست این اثر و خانم خدیجه احمدپور که در آماده‌سازی شکل‌ها زحمات زیادی را متحمل شدند و همچنین آقای مهندس غلامرضا نجف پور به خاطر کمک‌های نرم‌افزاری ایشان کمال تشکر را داریم و در پایان از خانم نساء پورحسین که با صبر و حوصله حروف‌چینی این اثر را به نحو احسن انجام داده‌اند و مسئول محترم انتشارات خوشخوان جناب آقای رسول حاجی‌زاده که برای چاپ و ارائه هر چه بهتر این مجموعه تلاش زیادی داشتند قدردانی و تشکر می‌کنیم.

سیامک احمدپور
مصطفی مسگری مشهدی

سخنی با خواننده

خدا می‌داند

خدا می‌داند

و فقط خدا می‌داند، چه شب‌ها که تا صبح دانسته‌های هندسی‌مان را روی کاغذ آوردیم و چه روزها که تا شب سر از کاغذ و کتاب‌های مختلف برنداشتیم و چه ساعت‌های طولانی که بر سر مباحث و مسائل مختلف کتاب بحث و حتی جدل کردیم. اما همه اینها نبود جز به عشق اینکه حاصل سال‌ها تلاش و مطالعه‌مان در سینه مدفون نشود و این دانسته‌های محدودمان و البته مهمتر از همه، درک و فهم‌مان از حقایق و زیبایی‌های عمیق هندسه را نه به یک یا چند کلاس ۲۰ نفره، که به هزاران تن از دوستان عزیز و علاقمندمان در سراسر ایران تقدیم کنیم.

و همین برای ما بس ...

این کتاب با رویکردی جامعیت‌گرا نگاشته شده است بطوری که تمام مباحث لازم برای علاقمندان به هندسه و داوطلبان شرکت در المپیادهای ریاضی را از مقدماتی‌ترین تا پیشرفته‌ترین مباحث پوشش می‌دهد. این کتاب شامل ۷ فصل است که فصول ۱ و ۲ آن به ترتیب حاوی مباحثی از هندسه ۱ سال دوم دبیرستان و هندسه ۲ سال سوم دبیرستان که در المپیاد ریاضی کاربرد فراگیری دارند، می‌باشد. مطالب و مباحث سه فصل اول این کتاب برای شرکت در مرحله اول المپیادهای ریاضی ایران لازم و البته کافی نیز می‌باشد. برای تسلط بالاتر بر این مباحث و حل مسایل بیشتر می‌توانید به منابع [۲۲]، [۲۳] و [۲۴] از همین کتاب مراجعه کنید.

مباحث فصول ۴، ۵ و ۶ و بخش ۷-۱ نیز برای آمادگی برای شرکت در مرحله دوم المپیاد ریاضی لازم و کافی است. بقیه مطالب فصل ۷ نیز هر چند به دلیل سطح بالای مطالب بیشتر در مرحله سوم المپیاد ریاضی کاربرد دارند اما گاه برای حل مسایلی در سطح مرحله دوم نیز کاربرد دارند و تسلط بر آنها برای مرحله دوم خالی از فایده نخواهد بود.

به دلیل ماهیت مبتکرانه و خلاق مباحث و مسایل هندسه مسطحه، مؤثرترین روش آموزشی برای تفهیم و انتقال این مباحث، روش آموزش از طریق حل مسأله است. یعنی روشی که دانش‌آموز پس از دانستن اصول اولیه بحث، با تفکر و تعمق بر روی مسائل مربوط به آن بحث و دیدن و بکارگیری ایده‌های مختلف در حل مسایل، قوه ابتکار و خلاقیت خود را پرورش داده و یاد می‌گیرد که چطور آن را در حل مسایل مختلف بکار گیرد. بنابراین مهمترین قسمت فرآیند آموزشی این کتاب مسایل داخل و انتهای هر بخش و به دنبال آن تمرینات تکمیلی مربوط به هر فصل است که طی آن یاد می‌گیرید که مباحث مختلف را در کنار هم برای حل یک مسأله بکار گیرید.

به دلیل همین اهمیت است که برای اولین بار در ارائه این مجموعه، از نرم‌افزار Geometer's sketchpad که یک نرم‌افزار تخصصی هندسه است و در بسیاری از کشورها برای آموزش هندسه بکار گرفته می‌شود، استفاده شده است. این نرم‌افزار که نسخه اصلی آن در ایران نبوده و قیمت فوق‌العاده‌ای نیز دارد، ابزاری فوق‌العاده برای فهم و درک مباحث و حل مسایل هندسی بدست می‌دهد. در نسخه الکترونیکی این کتاب که روی CD همراه این کتاب عرضه می‌شود، مباحث و مسایل کتاب با استفاده نرم‌افزار Geometer's sketchpad بیان شده‌اند و برای هر قضیه یا مسأله یک sketch آمده که در آن مفهوم و شکل آن قضیه یا مسأله بطور ملموسی بیان و رسم شده است و شما را با یک یا چند راهنمایی در حل آن یاری می‌رساند، درست مثل معلمی که قدم به قدم شما را در حل یک مسأله راهنمایی می‌کند. راه حل کامل این مسایل نیز در کتاب آمده است.

برای استفاده بهتر از این مجموعه رعایت نکات زیر در مطالعه آن توصیه می‌شود:

۱ـ ترتیب فصول و بخش‌ها و حتی مسایل را در مطالعه آن رعایت کنید.

۲ـ بعد از بیان هر قضیه، بلافاصله مسأله‌ای نیز بیان شده که شما را با کاربرد آن قضیه آشنا می‌کند. پس آنها را در همان مقطع حل کنید.

۳ـ یکی از نکات مثبت کتاب حل تمام مسایل آن است که اگر به آن تکیه کنید اثر منفی خواهد داشت. پس سعی کنید مباحث و قضایا را از روی نسخه الکترونیکی کتاب مطالعه و با توجه به راهنمایی که در sketch ها آمده‌اند خودتان مسایل و قضایا را حل و اثبات کنید و در آخر برای مشاهده راه حل نهایی به کتاب مراجعه کنید.

۴ـ هرگز کیفیت مطالعه را فدای کمیت آن نکنید و به خاطر مطالعه حجم بیشتری از کتاب از روی مسایل آن به سرعت عبور نکنید. پس برای حل هر مسأله زمان مناسبی اختصاص دهید و قدم به قدم از راهنمایی‌های آن استفاده کنید تا خودتان به جواب مسأله برسید.

۵ـ فرآیند یادگیری شما طی همین تفکر بر روی مسایل اتفاق می‌افتد. پس حتی اگر بعد از ساعت‌ها مسأله‌ای حل نشود، وقت شما تلف نشده و قدرت حل مسأله شما تقویت شده است.

در پایان از تمامی دوستان علاقمند، دانش‌آموزان و اساتید محترم صمیمانه خواهشمندیم که ما را از نظرات انتقادی، پیشنهادی یا تأییدی خود محروم نکنید و از طریق پست الکترونیکی geobook@gmail.com با ما در ارتباط باشید. همچنین می‌توانید sketch های خود برای مسایل حل نشده انتهای کتاب یا سایر مسایل و مباحث هندسه را برای ما ارسال کنید تا در چاپ‌های بعدی کتاب در نسخه الکترونیکی آن با نام خودتان آورده شود. با آرزوی موفقیت برای تمام دوستان

سیامک احمدپور
مصطفی مسگری مشهدی

فصل اول

هندسه مقدماتی ۱

۱-۱ همنهشتی مثلث‌ها

هدف بخش: در این بخش با مثلث‌های همنهشت و خواص آن‌ها آشنا شده و سعی می‌شود با همین مفهوم ساده هندسی مسایلی در سطوح بالا طرح و بررسی شود.

تعریف: دو مثلث همنهشت دو مثلثی هستند که بتوان کاملاً بر یکدیگر منطبق کرد.

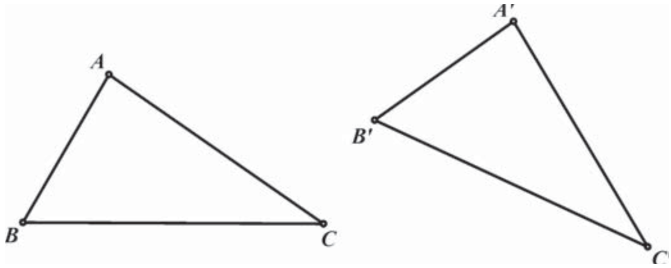
بدیهی است که در دو مثلث همنهشت یا قابل انطباق اضلاع دو به دو با یکدیگر و زوایا نیز دو به دو با یکدیگر برابرند، که به این زوایا و اضلاع برابر، زوایا و اضلاع متناظر می‌گوییم.

به عنوان مثال اگر دو مثلث ABC و $A'B'C'$ همنهشت باشند ($A\overset{\triangle}{B}C = A'\overset{\triangle}{B'}C'$) بطوری که $\widehat{A} = \widehat{A'}$، $\widehat{B} = \widehat{B'}$ و $\widehat{C} = \widehat{C'}$ آنگاه اضلاع متناظر AB و AC نیز به ترتیب برابر اضلاع $A'B'$ و $A'C'$ خواهند بود.

دو مثلث، بنابر هر یک از سه حالت زیر با یکدیگر همنهشت خواهند بود:

الف) **قضیه ۱-۱:** هرگاه دو ضلع و زاویه بین آن‌ها از مثلثی با دو ضلع و زاویه بین آن‌ها از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث همنهشت هستند.

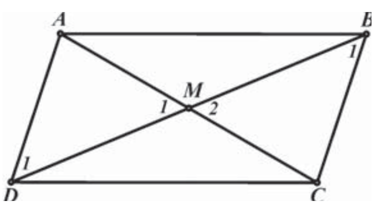
$$\left.\begin{array}{c} AB = A'B' \\ \widehat{A} = \widehat{A'} \\ AC = A'C' \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'}$$



برای اثبات کافی است دو مثلث را بر روی زوایای مساوی A و A' بر یکدیگر منطبق کنیم، از آنجا که $AB = A'B'$ و $AC = A'C'$ هستند، رئوس B، B' و همچنین C، C' نیز بر یکدیگر منطبق خواهند شد.

مسأله ۱-۱: ثابت کنید هر چهارضلعی که اقطار آن یکدیگر رانصف کنند، یک متوازی‌الاضلاع است. (متوازی‌الاضلاع چهارضلعی است که اضلاع آن دو به دو با یکدیگر موازی‌اند.)

در چهارضلعی $ABCD$، محل تقاطع دو قطر AC و BD را M می‌نامیم



$$\left.\begin{array}{c} MA = MC \\ \widehat{M_۱} = \widehat{M_۲} \\ MD = MB \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{MAD} = \overset{\triangle}{MCB}$$

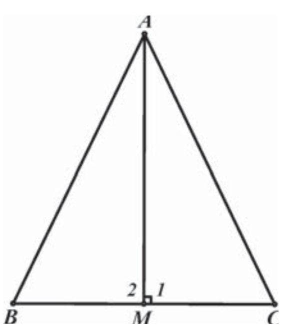
$$\Rightarrow \widehat{B_۱} = \widehat{D_۱} \Rightarrow BC || AD$$

به ترتیب مشابه می‌توان نشان داد: $AB || CD$

در نتیجه $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع است.

مسأله ۱-۲: ثابت کنید هر مثلثی که میانه و ارتفاع آن بر یکدیگر منطبق باشد، یک مثلث متساوی‌الساقین است.

در مثلث ABC، AM هم میانه و هم ارتفاع است.



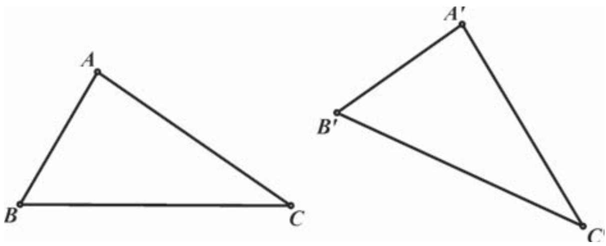
$$\left.\begin{array}{c} BM = CM \\ \widehat{M_۱} = \widehat{M_۲} = ۹۰^\circ \\ AM = AM \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{AMB} = \overset{\triangle}{AMC} \Rightarrow AB = AC$$

در نتیجه مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

نتیجه: هر نقطه روی عمود منصف یک پاره‌خط، از دو سر آن به یک فاصله است.

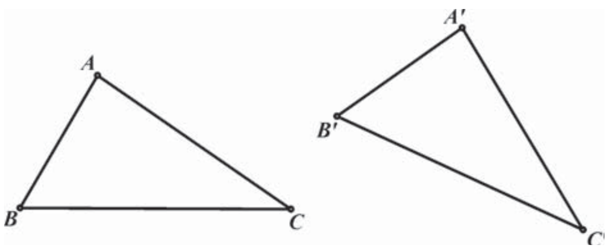
ب) **قضیه ۱-۲:** هرگاه دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از مثلثی با دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث همنهشت هستند.

$$\left.\begin{array}{c}\widehat{B}=\widehat{B'}\\ BC=B'C'\\ \widehat{C}=\widehat{C'}\end{array}\right\}\Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C=A'\overset{\triangle}{B'}C'$$



اثبات این حالت نیز مانند حالت قبل است که به خود شما واگذار می‌شود.

مسأله ۱-۳: اگر در دو مثلث ABC و $A'B'C'$، $BC=B'C'$ و $\widehat{A}=\widehat{A'}$ و $\widehat{B}=\widehat{B'}$ باشد ثابت کنید: $A\overset{\triangle}{B}C=A'\overset{\triangle}{B'}C'$



می‌دانیم که در هر مثلث مجموع زوایای داخلی برابر ۱۸۰° است. پس داریم:

$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\widehat{C}=۱۸۰^\circ-\widehat{A}-\widehat{B}$$

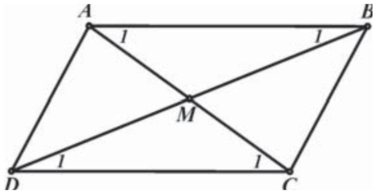
$$\widehat{A'}+\widehat{B'}+\widehat{C'}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\widehat{C'}=۱۸۰^\circ-\widehat{A'}-\widehat{B'}$$

$$\left.\begin{array}{c}\widehat{A}=\widehat{A'}\\ \widehat{B}=\widehat{B'}\end{array}\right\}\Rightarrow ۱۸۰^\circ-\widehat{A}-\widehat{B}=۱۸۰^\circ-\widehat{A'}-\widehat{B'}$$

با توجه به روابط بالا نتیجه می‌گیریم که زوایای C و C' نیز با هم برابرند.

$$\left.\begin{array}{c}\widehat{B}=\widehat{B'}\\ BC=B'C'\\ \widehat{C}=\widehat{C'}\end{array}\right\}\Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C=A'\overset{\triangle}{B'}C'$$

مسأله ۱-۴: ثابت کنید هر چهارضلعی که دو ضلع روبروی آن با یکدیگر مساوی و موازی باشد، یک متوازی‌الاضلاع است.



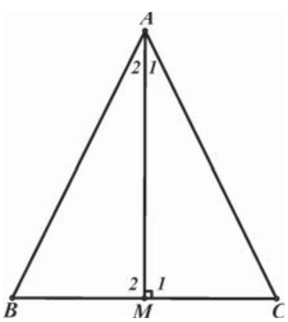
در چهارضلعی $ABCD$ اضلاع AB و CD با یکدیگر مساوی و موازی‌اند. محل برخورد اقطار AC و BD را M می‌نامیم.

$$AB||CD \Rightarrow \begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{C_1} \\ \widehat{B_1} = \widehat{D_1} \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow M\overset{\triangle}{A}B = M\overset{\triangle}{C}D$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AM = CM \\ BM = DM \end{cases}$$

در چهارضلعی $ABCD$ اقطار AC و BD یکدیگر را نصف می‌کنند. پس طبق مسأله ۱-۱ $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع است.

مسأله ۱-۵: ثابت کنید هر مثلثی که نیمساز و ارتفاع آن بر یکدیگر منطبق باشند، یک مثلث متساوی‌الساقین است.



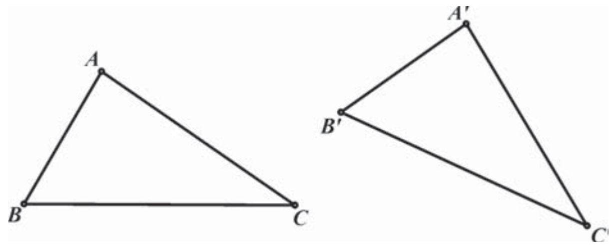
در مثلث ABC، AM هم نیمساز و هم ارتفاع است.
بنابراین دو مثلث ABM و ACM به حالت دو زاویه و ضلع بین با یکدیگر همنهشت‌اند.

$$\left.\begin{array}{c} \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \\ AM = AM \\ \widehat{M_1} = \widehat{M_2} = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}M = A\overset{\triangle}{C}M \Rightarrow AB = AC$$

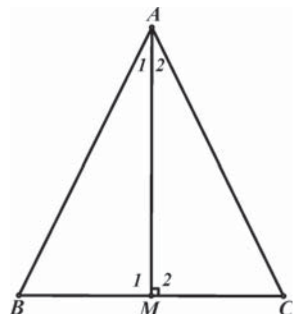
در نتیجه مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

ج) **قضیه ۱-۳:** هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث با یکدیگر همنهشت هستند.

$$\left.\begin{array}{c} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C = A'\overset{\triangle}{B'}C'$$



مسأله ۱-۶: ثابت کنید در هر مثلث متساوی‌الساقین، میانه وارد بر قاعده، ارتفاع و نیمساز نیز می‌باشد.



در مثلث متساوی‌الساقین ABC، AM میانه‌ی وارد بر قاعده است.

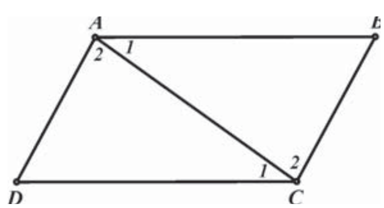
$$\left.\begin{aligned} AB &= AC \\ BM &= CM \\ AM &= AM \end{aligned}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}M = A\overset{\triangle}{C}M \Rightarrow \begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \\ \widehat{M_1} = \widehat{M_2} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &\widehat{M_1} = \widehat{M_2} \\ &\widehat{M_1} + \widehat{M_2} = 180^\circ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{M_2} = 90^\circ$$

در نتیجه، AM، نیمساز و ارتفاع مثلث ABC می‌باشد.

نتیجه: از همنهشتی دو مثلث $A\overset{\triangle}{B}M$ و $A\overset{\triangle}{C}M$ می‌توان نتیجه گرفت در هر مثلث متساوی‌الساقین دو زاویه مجاور به قاعده با یکدیگر برابرند ($\widehat{B} = \widehat{C}$) و بالعکس.

مسأله ۱-۷: ثابت کنید هر چهارضلعی که اضلاع مقابل آن دو به دو با یکدیگر برابر باشند، یک متوازی‌الاضلاع است.



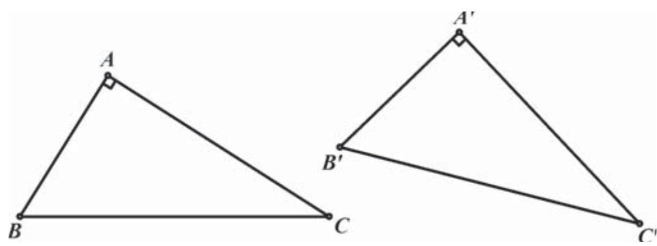
$$\left.\begin{array}{l} AB = CD \\ AD = BC \\ AC = AC \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C = C\overset{\triangle}{A}D \Rightarrow \begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{C_1} \Rightarrow AB \| CD \\ \widehat{A_2} = \widehat{C_2} \Rightarrow AD \| BC \end{cases}$$

در نتیجه چهارضلعی $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع است.

دو مثلث قائم‌الزاویه علاوه بر سه حالت گذشته، بنابر هر یک از دو حالت زیر نیز همنهشت خواهند بود:

الف) **قضیه ۱-۴:** هرگاه وتر و یک زاویه حاده از مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر و یک زاویه حاده از مثلث قائم‌الزاویه دیگری برابر باشند، آن دو مثلث همنهشت خواهند بود.

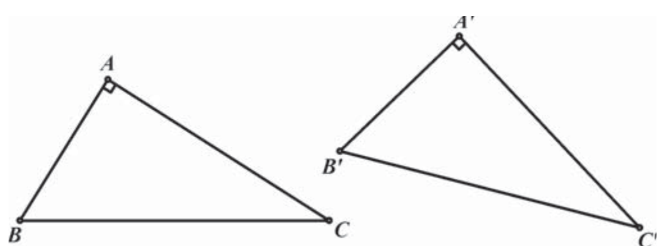
$$\left.\begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{A'} = 90^\circ \\ BC = B'C' \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C = A'\overset{\triangle}{B'}C'$$



اثبات این قضیه مشابه مسأله ۱-۳ می‌باشد.

ب) **قضیه ۱-۵:** هرگاه وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویه‌ی دیگری برابر باشند، آن دو مثلث با یکدیگر همنهشت خواهند بود.

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{A'} = 90^\circ \\ BC = B'C' \\ AB = A'B' \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C = A'\overset{\triangle}{B'}C'$$



طبق قضیه فیثاغورث در هر مثلث قائم‌الزاویه داریم:

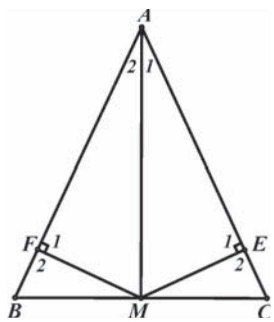
$$\begin{cases} AB^۲ + AC^۲ = BC^۲ & \Rightarrow AC^۲ = BC^۲ - AB^۲ \\ A'B'^۲ + A'C'^۲ = B'C'^۲ & \Rightarrow A'C'^۲ = B'C'^۲ - A'B'^۲ \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} BC = B'C' \\ AB = A'B' \end{array}\right\} \Rightarrow BC^۲ - AB^۲ = B'C'^۲ - A'B'^۲$$

$$\Rightarrow AC^۲ = A'C'^۲ \Rightarrow AC = A'C'$$

بنابراین دو مثلث به حالت سه ضلع با هم همنهشت می‌شوند.

مسأله ۱-۸: ثابت کنید هر مثلثی که میانه و نیمساز آن بر یکدیگر منطبق باشند، یک مثلث متساوی‌الساقین است.



میانه AM از مثلث ABC را رسم می‌کنیم و پای عمودهای وارد از M بر اضلاع AC و AB را به ترتیب E و F می‌نامیم.

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{E_۱} = \widehat{F_۱} = ۹۰^\circ \\ AM = AM \\ \widehat{A_۱} = \widehat{A_۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{AME} = \overset{\triangle}{AMF} \Rightarrow \begin{cases} AE = AF \\ ME = MF \end{cases} \qquad (۱)$$

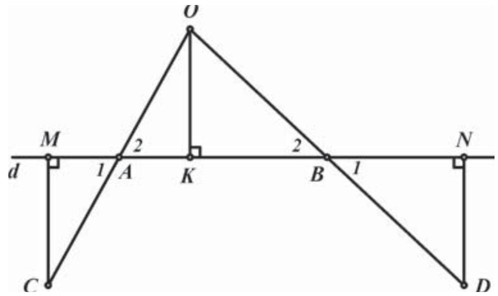
$$\left.\begin{array}{l} \widehat{E_۲} = \widehat{F_۲} = ۹۰^\circ \\ MC = MB \\ ME = MF \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{MCE} = \overset{\triangle}{MBF} \Rightarrow CE = BF \qquad (۲)$$

با جمع روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$AE + CE = AF + BF \Rightarrow AC = AB$$

مسایل

۱) خط d و دو نقطه A و B روی آن و نقطه O خارج از آن مفروض‌اند. از O به A و B وصل کرده و هرکدام را به اندازه خودشان امتداد می‌دهیم تا نقاط C و D حاصل شوند. ثابت کنید نقاط C و D از خط d هم‌فاصله‌اند.



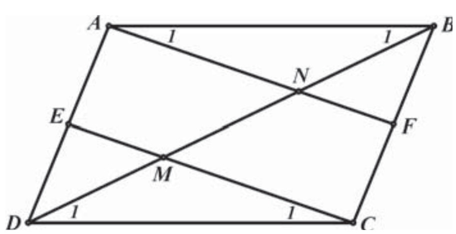
عمودهای CM، DN و OK را بر خط d رسم می‌کنیم. می‌دانیم مثلث‌های زیر به حالت وتر و یک زاویه حاده با هم برابرند. یعنی داریم:

$$\left.\begin{array}{r} OA = AC \\ \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \\ \widehat{M} = \widehat{K} = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow M\overset{\triangle}{A}C = K\overset{\triangle}{A}O \Rightarrow CM = OK \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{r} OB = BD \\ \widehat{B_1} = \widehat{B_2} \\ \widehat{N} = \widehat{K} = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow N\overset{\triangle}{B}D = K\overset{\triangle}{B}O \Rightarrow DN = OK \qquad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow CM = DN = OK$$

۲) متوازی‌الاضلاع $ABCD$ مفروض است. اوساط اضلاع AD و BC را به ترتیب E و F می‌نامیم. اگر CE و AF قطر BD را به ترتیب در M و N قطع کنند، نشان دهید: $DM = BN$



برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم $A\overset{\triangle}{B}N = C\overset{\triangle}{D}M$. برای این منظور می‌دانیم که دو ضلع AB و CD که با هم برابرند و دو زاویه $\widehat{B_1}$ و $\widehat{D_1}$ نیز که به دلیل توازی AB و CD با هم برابرند. پس فقط کافی است نشان دهیم: $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$

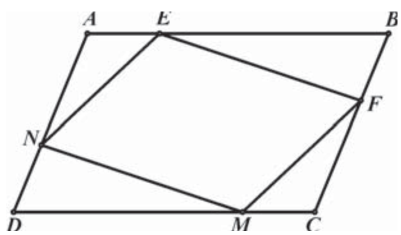
از آنجا که E و F اوساط AD و BC هستند داریم:

$$\left.\begin{array}{r} AE = CF \\ AE \| CF \end{array}\right\} \Rightarrow AECF \text{ متوازی‌الاضلاع } \Rightarrow AF \| CE$$

بنابراین چون اضلاع دو زاویه $\widehat{A_۱}$ و $\widehat{C_۱}$ با هم موازی‌اند پس این دو زاویه با هم برابرند یعنی داریم:

$$\left.\begin{array}{r} \widehat{A_۱} = \widehat{C_۱} \\ \widehat{B_۱} = \widehat{D_۱} \\ AB = CD \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}N = C\overset{\triangle}{D}M \Rightarrow BN = DM$$

۳) روی اضلاع AB، BC، CD و DA از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ به ترتیب چهار پاره‌خط AE، BF، CM و DN را بطور مساوی جدا می‌کنیم. ثابت کنید چهارضلعی $EFMN$ متوازی‌الاضلاع است.



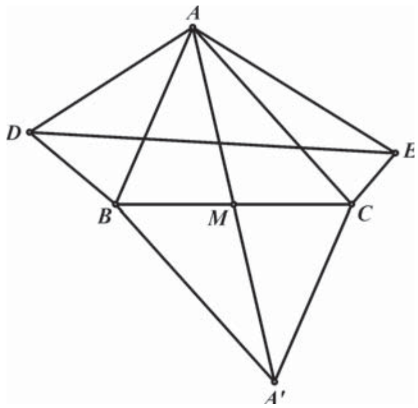
برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم هر دو ضلع روبرو از این چهارضلعی با هم برابرند.

$$\left.\begin{array}{r} AE = CM \\ \widehat{A} = \widehat{C} \\ DN = BF \Rightarrow AN = CF \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{E}N = C\overset{\triangle}{M}F \Rightarrow NE = MF$$

$$\left.\begin{array}{r} DN = BF \\ \widehat{D} = \widehat{B} \\ CM = AE \Rightarrow DM = BE \end{array}\right\} \Rightarrow D\overset{\triangle}{N}M = B\overset{\triangle}{F}E \Rightarrow NM = EF$$

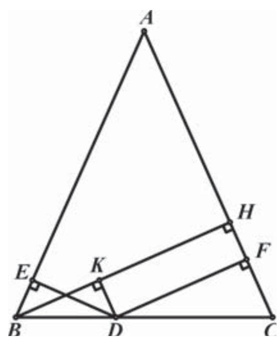
۴) روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC و در خارج از آن دو مثلث متساوی‌الساقین ABD و ACE را می‌سازیم بطوری که $AD = AB$ و $AE = AC$. اگر داشته باشیم $\widehat{DAE} = \widehat{B} + \widehat{C}$ و M نقطه وسط ضلع BC باشد، ثابت کنید: $DE = ۲AM$

میانه AM را به اندازه خودش و از طرف M امتداد می‌دهیم تا نقطه A' حاصل شود. از آنجا که اقطار چهارضلعی $ABA'C$ یکدیگر را نصف می‌کنند بنابراین $ABA'C$ متوازی‌الاضلاع است. برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم $DE = AA'$ و برای این منظور نشان می‌دهیم: $A\overset{\triangle}{B}A' = A\overset{\triangle}{D}E$



$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}AE = AC\\ BA' = AC\end{array}\right\} \Rightarrow AE = BA'\\ AD = BA\\ \widehat{DAE} = \widehat{ABA'} = \widehat{B} + \widehat{C}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABA'} = \overset{\triangle}{ADE} \Rightarrow DE = AA' = ۲AM$$

۵) نقطه دلخواه D را بر روی قاعده BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC انتخاب می‌کنیم. اگر E و F به ترتیب پای عمودهای وارد از D بر اضلاع AB و AC و BH ارتفاع وارد بر AC باشد، ثابت کنید: $DE+DF = BH$



راه حل اول: عمود DK را بر BH رسم می‌کنیم. چهارضلعی $DKHF$ مستطیل است و $KH = DF$.
پس برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم $BK = DE$.
برای این منظور ثابت می‌کنیم: $\overset{\triangle}{BKD} = \overset{\triangle}{BED}$

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}DK \perp BH\\ AC \perp BH\end{array}\right\} \Rightarrow DK \| AC \Rightarrow \widehat{BDK} = \widehat{BCA}\\ \widehat{CBA} = \widehat{BCA}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{BDK} = \widehat{CBA}$$

پس از آنجا که دو مثلث قائم‌الزاویه BED و BKD در وتر BD نیز مشترک هستند، بنابراین به حالت وتر و یک زاویه حاده با هم برابرند. پس داریم:

$$\left.\begin{array}{r} BK = DE \\ KH = DF \end{array}\right\} \Rightarrow DE + DF = BH$$

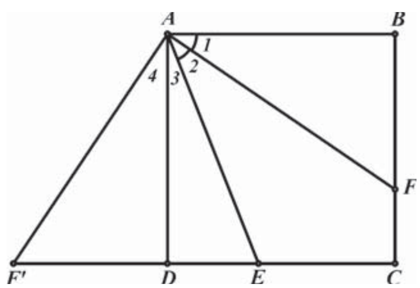
راه حل دوم: برای اثبات حکم از مفهوم مساحت مثلث‌ها استفاده می‌کنیم.

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD} \Rightarrow \frac{۱}{۲}BH \cdot AC = \frac{۱}{۲}DE \cdot AB + \frac{۱}{۲}DF \cdot AC$$

از آنجا که $AB = AC$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{۱}{۲}BH \cdot AC = \frac{۱}{۲}AC(DE + DF) \Rightarrow BH = DE + DF$$

۶) مربع $ABCD$ و نقطه E بر ضلع CD مفروض‌اند. نیمساز زاویه EAB را رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در F قطع کند. ثابت کنید: $BF + DE = AE$



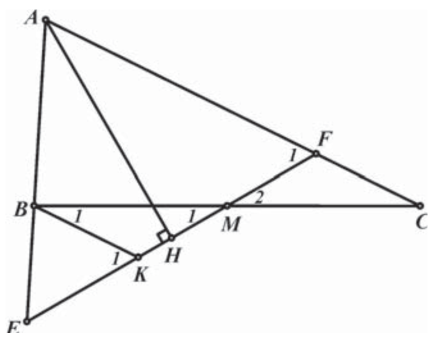
ضلع DC از مربع را از طرف D به اندازه‌ی BF امتداد می‌دهیم تا نقطه F' حاصل شود. حال برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم $AE = F'E$ یعنی مثلث AEF' متساوی‌الساقین است.

$$\left.\begin{array}{r} AD = AB \\ \widehat{D} = \widehat{B} = ۹۰^\circ \\ F'D = FB \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{AF'D} = \overset{\triangle}{AFB} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \widehat{AF'D} = \widehat{AFB} \\ \widehat{A_۴} = \widehat{A_۱} \end{array}\right. \qquad (۱)$$

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \widehat{A_۴} = \widehat{A_۱} \\ \widehat{A_۲} = \widehat{A_۱} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{A_۴} = \widehat{A_۲} \\ AD \| BC \Rightarrow \widehat{A_۲} + \widehat{A_۳} = \widehat{AFB} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{A_۴} + \widehat{A_۳} = \widehat{AFB} \qquad (۲)$$

$$(۱)\,,\,(۲) \Rightarrow \widehat{A_۳} + \widehat{A_۴} = \widehat{AF'D} \Rightarrow \widehat{F'AE} = \widehat{AF'E} \Rightarrow AE = F'E = BF + DE$$

۷) در مثلث ABC، از M وسط ضلع BC عمودی بر نیمساز داخلی زاویه A رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC و یا امتداد آن‌ها را به ترتیب در نقاط E و F قطع کند. ثابت کنید: $BE = CF$



از نقطه B خطی موازی FC رسم می‌کنیم تا EF را در K قطع کند و ثابت می‌کنیم BE و CF هر دو با BK برابرند.

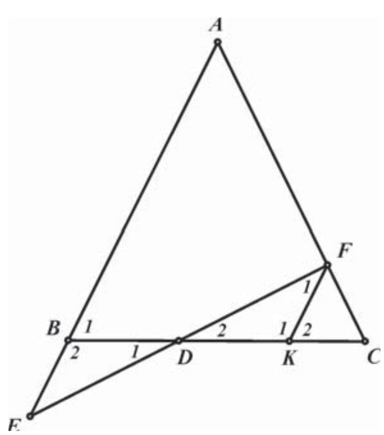
$$\left.\begin{array}{l} MC = MB \\ \widehat{M_2} = \widehat{M_1} \\ BK \| AC \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{B_1} \end{array}\right\} \Rightarrow M\overset{\triangle}{B}K = M\overset{\triangle}{C}F \Rightarrow FC = BK \qquad (1)$$

در مثلث AEF نیمساز و ارتفاع بر یکدیگر منطبق شده‌اند بنابراین مثلث AEF متساوی‌الساقین بوده و زوایای $\widehat{F_1}$ و $\widehat{E}$ با یکدیگر برابرند.

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{E} = \widehat{F_1} \\ BK \| AC \Rightarrow \widehat{K_1} = \widehat{F_1} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{E} = \widehat{K_1} \Rightarrow BE = BK \qquad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow BE = FC$$

۸) در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$)، نقاط F و E را به ترتیب روی AC و امتداد AB طوری انتخاب می‌کنیم که $BE = CF$ باشد. نشان دهید BC، پاره‌خط EF را نصف می‌کند.



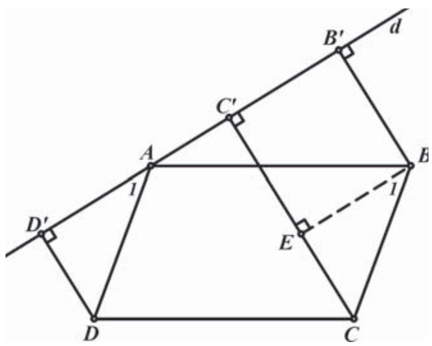
از نقطه F خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا BC را در K قطع کند و ثابت می‌کنیم دو مثلث BDE و FDK با یکدیگر همنهشت‌اند.

$$\left.\begin{array}{l} AB = AC \Rightarrow \widehat{B_۱} = \widehat{C} \\ AB \| FK \Rightarrow \widehat{B_۱} = \widehat{K_۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{K_۲} \Rightarrow FK = CF$$

$$\left.\begin{array}{l} FK = CF \\ BE = CF \end{array}\right\} \Rightarrow BE = FK$$

$$\left.\begin{array}{l} BE = FK \\ AE \| FK \Rightarrow \widehat{E} = \widehat{F_۱} \\ AE \| FK \Rightarrow \widehat{B_۲} = \widehat{K_۱} \end{array}\right\} \Rightarrow B\overset{\triangle}{E}D = F\overset{\triangle}{D}K \Rightarrow DE = DF$$

۹) چهارضلعی $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع است. از نقاط B، C و D، عمودهای BB'، CC' و DD' را بر خط d که از نقطه‌ی A می‌گذرد، فرود می‌آوریم. نشان دهید: $CC' = BB' + DD'$



پای عمود وارد از B بر CC' را E می‌نامیم.

$$\left.\begin{array}{r} BE \perp CC' \\ d \perp CC' \end{array}\right\} \Rightarrow BE \| d$$

$$\left.\begin{array}{r} CE \perp d \\ DD' \perp d \end{array}\right\} \Rightarrow CE \| DD'$$

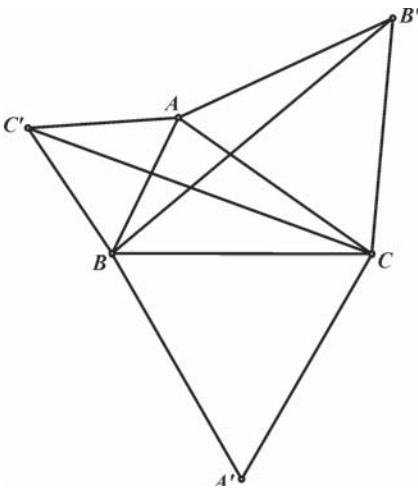
$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} BE \| d \\ BC \| AD \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{B_۱} = \widehat{A_۱} \\ \widehat{D'} = \widehat{E} = ۹۰^\circ \\ BC = AD \end{array}\right\} \Rightarrow B\overset{\triangle}{C}E = A\overset{\triangle}{D}D' \Rightarrow CE = DD'$$

همچنین در مستطیل $BEC'B'$، دو ضلع BB' و EC' با هم برابرند.

$$\Rightarrow BB' + DD' = EC' + CE$$

$$\Rightarrow BB' + DD' = CC'$$

۱۰) روی اضلاع مثلث ABC و در خارج آن سه مثلث متساوی‌الاضلاع ABC'، BCA'، $CB'A$ را می‌سازیم. ثابت کنید: $AA' = BB' = CC'$



$$\left.\begin{array}{l}\widehat{C'AC} = \widehat{BAC} + ۶۰^\circ \\ \widehat{BAB'} = \widehat{BAC} + ۶۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{C'AC} = \widehat{BAB'}$$

$$\left.\begin{array}{c}AB = AC' \\ AB' = AC \\ \widehat{C'AC} = \widehat{BAB'}\end{array}\right\} \Rightarrow C\overset{\triangle}{A}C' = B\overset{\triangle}{A}B'$$

$$\Rightarrow BB' = CC'$$

به ترتیب مشابه می‌توان نشان داد که:

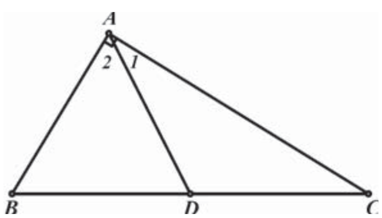
$$AA' = BB' \Rightarrow AA' = BB' = CC'$$

۱۱) ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه

الف) میانه وارد بر وتر نصف وتر است.

ب) اگر یکی از زوایا برابر ۳۰ درجه باشد، ضلع روبروی زاویه ۳۰ درجه برابر نصف وتر است.

الف) در مثلث قائم‌الزاویه ABC $(\widehat{A} = ۹۰^\circ)$ نقطه‌ی D را روی وتر BC طوری انتخاب می‌کنیم که $\widehat{A_۱} = \widehat{C}$ باشد.



$$\widehat{A_۱} = \widehat{C} \Rightarrow AD = CD \qquad (۱)$$

$$\left.\begin{array}{c}\widehat{A_۱} + \widehat{A_۲} = ۹۰^\circ \\ \widehat{C} + \widehat{B} = ۹۰^\circ \\ \widehat{A_۱} = \widehat{C}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{A_۲} = \widehat{B} \Rightarrow AD = BD$$

با توجه به رابطه (۱) نتیجه می‌گیریم که:

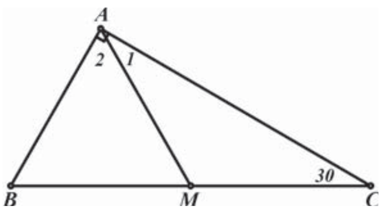
$$\Rightarrow AD = CD = BD \Rightarrow AD = \frac{۱}{۲}BC$$

پس AD میانه‌ی مثلث ABC است.

توجه داشته باشید که عکس این قسمت هم برقرار است یعنی در هر مثلثی اگر میانه وارد بر یک ضلع نصف آن باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.

ب) میانه AM را رسم می‌کنیم. بنابر قسمت قبل داریم:

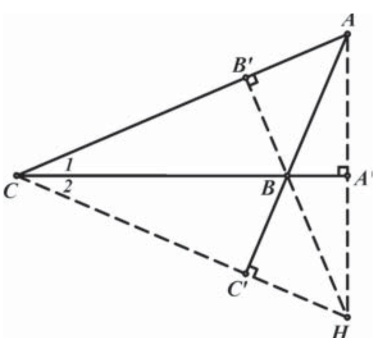
$$AM = CM \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{C} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{A_2} = 60^\circ$$



از آنجا که دو زاویه A_2 و B از مثلث ABM برابر ۶۰ درجه هستند مثلث ABM متساوی‌الاضلاع است بنابراین داریم:

$$\left.\begin{aligned} AM &= AB \\ AM &= \frac{1}{2}BC \end{aligned}\right\} \Rightarrow AB = \frac{1}{2}BC$$

۱۲) در مثلث ABC، $\widehat{B} - \widehat{C} = 90^\circ$ است. اگر نقطه‌ی H محل برخورد ارتفاع‌های مثلث باشد، ثابت کنید که دو مثلث ABC و HBC همنهشت هستند.



زاویه ABC زاویه خارجی مثلث CBC' بوده و برابر مجموع دو زاویه غیر مجاور از مثلث می‌باشد. بنابراین

$$\widehat{ABC} = \widehat{C_2} + 90^\circ \Rightarrow \widehat{C_2} = \widehat{ABC} - 90^\circ \qquad (1)$$

از طرفی طبق فرض مسأله داریم:

$$\widehat{ABC} - \widehat{C_1} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{ABC} - 90^\circ$$

با توجه به رابطه (۱) نتیجه می‌گیریم که: $\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{C_2}$

در مثلث ACH، ارتفاع CA' نیمساز زاویه ACH است، پس مثلث ACH متساوی‌الساقین است. در نتیجه داریم:

$$\left.\begin{aligned} AC &= HC \\ \widehat{C_1} &= \widehat{C_2} \\ CB &= CB \end{aligned}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C = H\overset{\triangle}{B}C$$

۱-۲ تشابه مثلث‌ها

هدف بخش: در این بخش برآنیم تا ضمن شناخت خواص مثلث‌های متشابه، با کاربردهای وسیع و گوناگون تشابه در انواع مسایل هندسی آشنا شویم.

پیش از آنکه به قضیه تالس و تشابه مثلث‌ها بپردازیم، بدلیل کاربرد برخی خواص نسبت‌های تناسب در تشابه، مروری بر بعضی از مهمترین این خواص خواهیم داشت.

قضیه ۱-۶: اگر تساوی $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ برقرار باشد نسبت‌های زیر برقرار خواهند بود:

الف) $\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$. به این خاصیت ترکیب در صورت $(+)$ یا تفضیل در صورت $(-)$ می‌گویند.

ب) $\frac{a}{b\pm a}=\frac{c}{d\pm c}$. به این خاصیت ترکیب در مخرج $(+)$ یا تفضیل در مخرج $(-)$ می‌گویند.

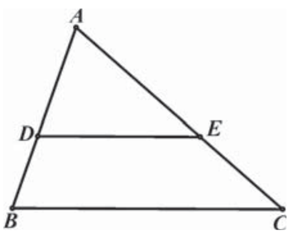
ج) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a\pm c}{b\pm d}$

اثبات تمامی قسمت‌های بالا مشابه یکدیگر است و کافی است هر نسبت را طرفین ـ وسطین کرده و ساده کنید، تا به عبارت $ad=bc$ که همان فرض $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ است، برسید.

قضیه تالس ۱-۷: هر خط موازی با یکی از اضلاع مثلث، دو ضلع دیگر مثلث را به نسبت‌های یکسان تقسیم می‌کند.

$$DE\|BC \Rightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

برای اثبات قضیه تالس ابتدا لم مهم و کاربردی زیر را مطرح می‌کنیم.

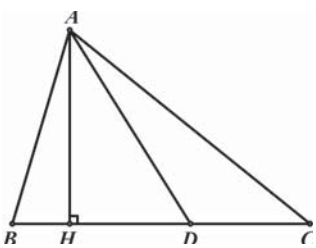


لم: برای هر خط دلخواه AD که ضلع BC از مثلث ABC را قطع می‌کند نسبت پاره‌خط‌های بوجود آمده بر روی BC با نسبت مساحت مثلث‌های متناظر برابر است.

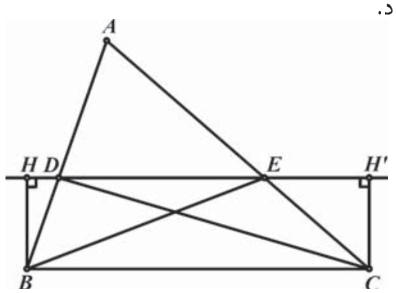
حکم: $\frac{BD}{DC}=\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}}$

H را پای ارتفاع نظیر رأس A می‌نامیم.

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}}=\frac{\frac{1}{2}AH\cdot BD}{\frac{1}{2}AH\cdot DC}=\frac{BD}{DC}$$



برای اثبات قضیه تالس هرکدام از نسبت‌های $\frac{AD}{DB}$ و $\frac{AE}{EC}$ را با استفاده از لم فوق به نسبت مساحت‌ها تبدیل می‌کنیم تا حکم جدید حاصل گردد.



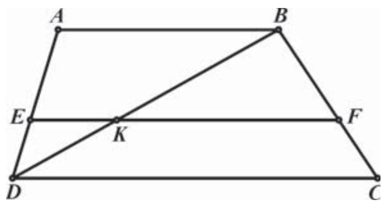
حکم جدید:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{S_{EDA}}{S_{EDB}}\\[2mm]\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{S_{DEA}}{S_{DEC}}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{S_{EDA}}{S_{EDB}}=\frac{S_{DEA}}{S_{DEC}}\Rightarrow S_{EDB}=S_{DEC}$$

$$\left.\begin{array}{r}S_{EDB}=\dfrac{۱}{۲}DE\cdot BH\\[2mm]S_{DEC}=\dfrac{۱}{۲}DE\cdot CH'\\[2mm]BC\|DE\Rightarrow BH=CH'\end{array}\right\}\Rightarrow S_{EDB}=S_{DEC}$$

پس حکم جدید برقرار است که از آن حکم $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$ نتیجه می‌شود.

مسأله ۱-۹: ثابت کنید هر خط موازی قاعده‌های ذوزنقه، ساق‌های آن را به‌طور متناسب قطع می‌کند.



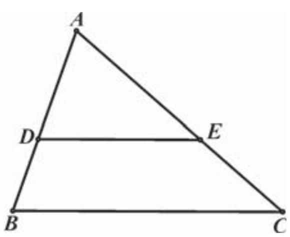
محل برخورد BD و EF را K می‌نامیم. با استفاده از قضیه تالس در دو مثلث ABD و BCD خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l}EK\|AB\Rightarrow\dfrac{AE}{ED}=\dfrac{BK}{KD}\\[2mm]FK\|CD\Rightarrow\dfrac{BF}{FC}=\dfrac{BK}{KD}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$$

عکس قضیه تالس: هر خطی که دو ضلع از مثلث را به‌طور متناسب قطع کند با ضلع سوم موازی خواهد بود.

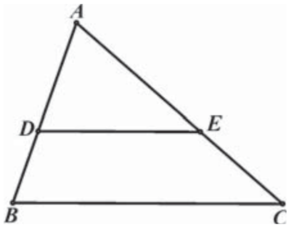
$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\Rightarrow DE\|BC$$

اثبات عکس قضیه تالس را به خود شما واگذار می‌کنیم.



راهنمایی: برای اثبات عکس قضیه تالس از نقطه D خطی موازی BC رسم کنید تا AC را در نقطه‌ی E' قطع کند. با استفاده از قضیه تالس ثابت کنید که نقطه E' بر نقطه‌ی E منطبق است.

نکته: طبق قضیه تالس $DE\|BC$ است، اگر و فقط اگر $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$ باشد. اما طبق خواص نسبت‌های تناسب شرط $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$ را می‌توان با استفاده از ترکیب در مخرج یا صورت به نسبت‌های زیر تبدیل کرد.



الف) $\frac{AD}{DB+AD}=\frac{AE}{EC+AE}\Rightarrow\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$

ب) $\frac{AD+DB}{DB}=\frac{AE+EC}{EC}\Rightarrow\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}$

به عبارت دیگر طبق قضیه تالس $DE||BC$ است اگر و فقط اگر هر کدام از نسبت‌های فوق برقرار باشد.

تعریف: دو مثلث ABC و $A'B'C'$ با یکدیگر متشابه هستند ($A\overset{\triangle}{B}C \sim A'\overset{\triangle}{B'}C'$) اگر و فقط اگر:

۱ـ زوایای دو مثلث دو بدو با یکدیگر برابر باشند. $\widehat{A}=\widehat{A'}\ ,\ \ \widehat{B}=\widehat{B'}\ ,\ \ \widehat{C}=\widehat{C'}$

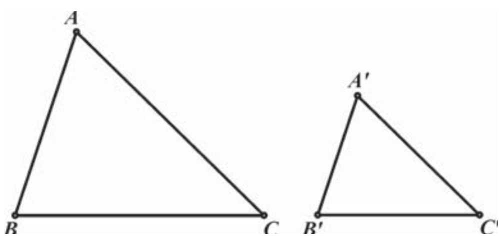
۲ـ اضلاع متناظر متناسب باشند. $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=k$

که به عدد ثابت k، نسبت تشابه دو مثلث گفته می‌شود.

دو مثلث بنابر هر یک از سه حالت زیر متشابه خواهند بود:

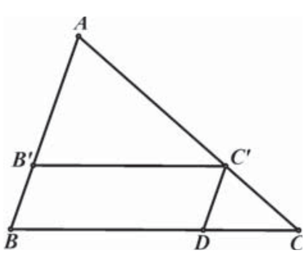
الف) **قضیه ۱-۸:** هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه هستند.

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A}=\widehat{A'}\\ \widehat{B}=\widehat{B'}\end{array}\right\}\Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C\sim A'\overset{\triangle}{B'}C'$$



از آنجا که دو زاویه A و A' با یکدیگر و B و B' نیز با یکدیگر برابرند، پس زوایای C و C' نیز با هم برابر خواهند بود. بنابراین شرط اول تشابه دو مثلث یعنی تساوی زوایا برقرار است. اما برای اثبات تناسب اضلاع، مثلث $A'B'C'$ را روی مثلث ABC طوری قرار می‌دهیم که دو زاویه A و A' بر یکدیگر منطبق شوند.

$$\widehat{B}=\widehat{B'}\Rightarrow B'C'||BC$$



طبق قضیه تالس داریم

$$\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}\qquad(۱)$$

پس تناسب دو ضلع برقرار است، اما برای اثبات نسبت ضلع سوم، از C' خطی به موازات AB رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در D قطع کند. طبق قضیه تالس خواهیم داشت:

$$C'D \| AB \Rightarrow \frac{AC'}{AC} = \frac{BD}{BC}$$

در متوازی‌الاضلاع $B'C'DB$ دو ضلع BD و $B'C'$ با هم برابرند

$$\Rightarrow \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

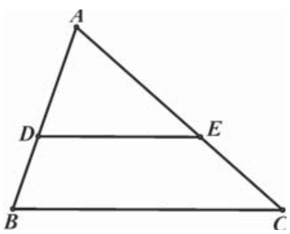
با توجه به رابطه (۱) داریم:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

از آنجا که شرط دوم تشابه یعنی تناسب اضلاع نیز برقرار است، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه هستند.

نتیجه: طبق قضیه فوق در صورتی که خطی موازی BC، دو ضلع دیگر مثلث را در نقاط D و E قطع کند خواهیم داشت:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$



مسأله ۱-۱۰: ثابت کنید در دو مثلث متشابه همواره:

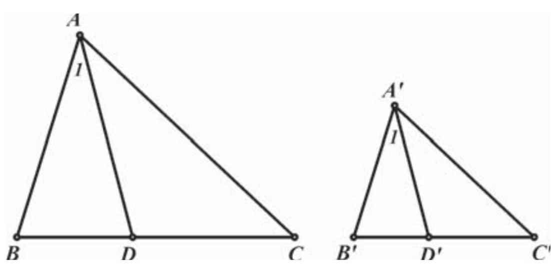
الف) نسبت طول نیمسازهای نظیر دو مثلث برابر نسبت تشابه دو مثلث است.

ب) نسبت طول ارتفاع‌های نظیر دو مثلث برابر نسبت تشابه دو مثلث است.

ج) نسبت مساحت دو مثلث برابر مربع نسبت تشابه دو مثلث است.

د) نسبت محیط دو مثلث برابر نسبت تشابه دو مثلث است.

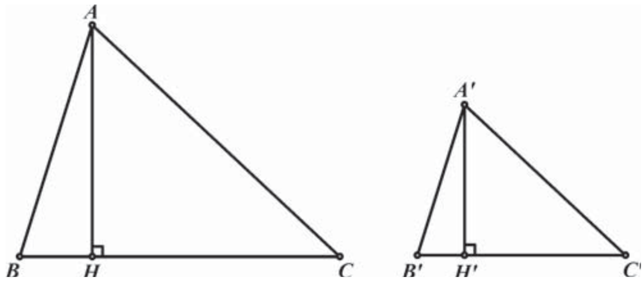
الف) عدد ثابت k را برابر نسبت تشابه دو مثلث ABC و $A'B'C'$ در نظر می‌گیریم.
AD و $A'D'$ به ترتیب نیمسازهای داخلی دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ هستند.



$$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'} \Rightarrow \dfrac{\widehat{A}}{۲} = \dfrac{\widehat{A'}}{۲} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r}\widehat{A_1}=\widehat{A'_1}\\ \widehat{B}=\widehat{B'}\end{array}\right\}\Rightarrow A\overset{\triangle}{B}D\sim A'\overset{\triangle}{B'}D'\Rightarrow \frac{AD}{A'D'}=\frac{AB}{A'B'}=k$$

ب) AH و $A'H'$، به ترتیب ارتفاع‌های دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ هستند.



$$\left.\begin{array}{r}A\overset{\triangle}{B}C\sim A'\overset{\triangle}{B'}C'\Rightarrow \widehat{B}=\widehat{B'}\\ \widehat{H}=\widehat{H'}=90^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow A\overset{\triangle}{B}H\sim A'\overset{\triangle}{B'}H'$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{A'H'}=\frac{AB}{A'B'}=k$$

ج)

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=\frac{\frac{1}{2}AH\cdot BC}{\frac{1}{2}A'H'\cdot B'C'}=\frac{AH}{A'H'}\cdot\frac{BC}{B'C'}=k\cdot k=k^2$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=k^2$$

د)

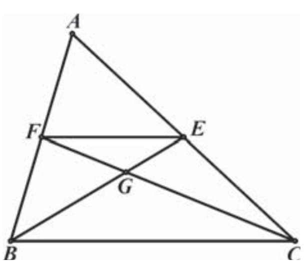
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=k$$

با استفاده از خواص نسبت‌های تناسب داریم:

$$\Rightarrow \frac{AB+AC+BC}{A'B'+A'C'+B'C'}=\frac{AB}{A'B'}=k$$

مسأله ۱-۱۱: ثابت کنید میانه‌های هر مثلث یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند.

حکم: $\frac{BG}{GE}=\frac{CG}{GF}=\frac{2}{1}$



در مثلث ABC، BE و CF میانه‌های مثلث هستند.

یعنی داریم:

$$AE=CE\ ,\quad AF=BF$$

$$\Rightarrow \frac{AF}{FB}=\frac{AE}{EC}=1$$

طبق عکس قضیه تالس نتیجه می‌گیریم که:

$$\Rightarrow EF \| BC$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{ABC} \\ \widehat{A} = \widehat{A}\end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{F}E \sim A\overset{\triangle}{B}C \Rightarrow \frac{FE}{BC} = \frac{AF}{AB} = \frac{۱}{۲} \qquad (۱)$$

$$\left.\begin{array}{l}EF \| BC \Rightarrow \widehat{EFG} = \widehat{BCG} \\ EF \| BC \Rightarrow \widehat{FEG} = \widehat{CBG}\end{array}\right\} \Rightarrow G\overset{\triangle}{E}F \sim G\overset{\triangle}{B}C$$

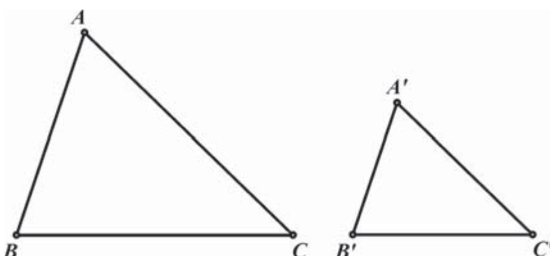
$$\Rightarrow \frac{GB}{GE} = \frac{GC}{GF} = \frac{BC}{FE}$$

با توجه به رابطه (۱) نتیجه می‌گیریم:

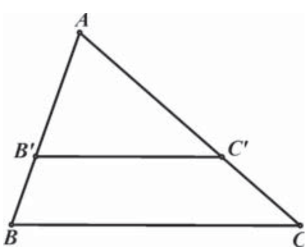
$$\frac{GB}{GE} = \frac{GC}{GF} = \frac{۲}{۱}$$

ب) **قضیه ۱-۹:** هرگاه دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلثی دیگر متناسب باشند و زاویه بین آن‌ها نیز برابر باشد، دو مثلث متشابه هستند.

$$\left.\begin{array}{c}\widehat{A} = \widehat{A'} \\ \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC}\end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C \sim A'\overset{\triangle}{B'}C'$$



برای اثبات، مانند قسمت قبل مثلث‌ها را روی یکدیگر قرار می‌دهیم. طبق فرض و عکس قضیه تالس خواهیم داشت:

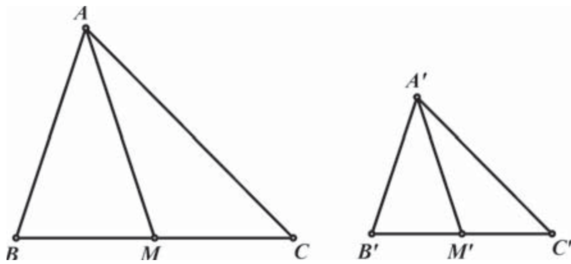


$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} \Rightarrow B'C' \| BC$$

$$\left.\begin{array}{c}\widehat{B} = \widehat{B'} \\ \widehat{A} = \widehat{A}\end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B'}C' \sim A\overset{\triangle}{B}C$$

طبق حالت دو زاویه، دو مثلث $AB'C'$ و ABC متشابه‌اند.

مسأله ۱-۱۲: ثابت کنید در دو مثلث متشابه همواره نسبت طول میانه‌های متناظر دو مثلث برابر نسبت تشابه دو مثلث است.



عدد k را برابر نسبت تشابه دو مثلث ABC و $A'B'C'$ فرض می‌کنیم. AM و $A'M'$ به ترتیب میانه‌های دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ هستند.

$$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AB}{A'B'} = k \end{cases} \qquad (۱)$$

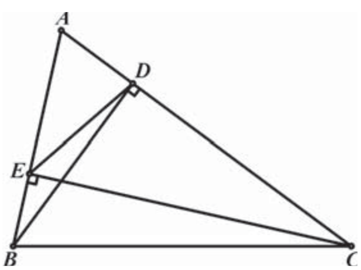
$$\frac{BM}{B'M'} = \frac{\frac{BC}{۲}}{\frac{B'C'}{۲}} = \frac{BC}{B'C'} = k \qquad (۲)$$

با توجه به روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که:

$$\overset{\triangle}{ABM} \sim \overset{\triangle}{A'B'M'} \Rightarrow \frac{AM}{A'M'} = \frac{AB}{A'B'} = k$$

مسأله ۱-۱۳: اگر BD و CE ارتفاع‌های مثلث ABC باشند، ثابت کنید: $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{ADE}$

ابتدا ثابت می‌کنیم که دو مثلث ABD و ACE متشابه‌اند.



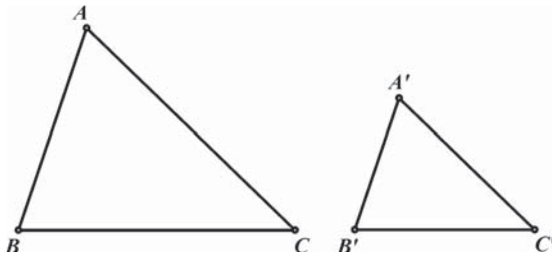
$$\left.\begin{aligned} \widehat{ADB} = \widehat{AEC} = ۹۰^\circ \\ \widehat{A} = \widehat{A} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABD} \sim \overset{\triangle}{ACE}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \\ \widehat{A} = \widehat{A} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ADE} \sim \overset{\triangle}{ABC}$$

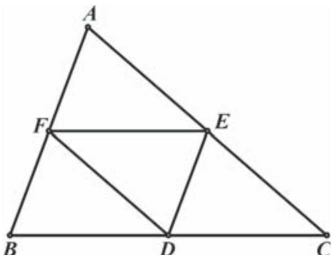
ج) **قضیه ۱-۱۰:** هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلثی دیگر متناسب باشند، آن دو مثلث متشابه هستند.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$$



اثبات این قضیه به خود شما واگذار می‌شود.

مسأله ۱-۱۴: اگر D و E و F اوساط اضلاع مثلث ABC باشند، ثابت کنید دو مثلث ABC و DEF به نسبت ۲ به ۱ با یکدیگر متشابه‌اند.



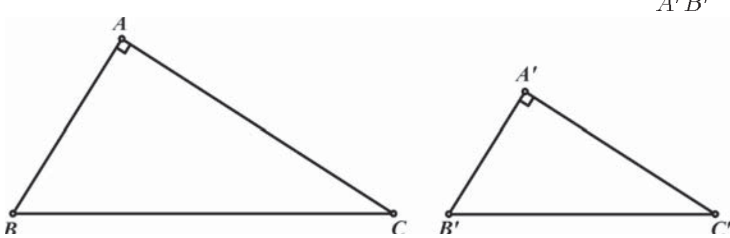
D و E و F را به ترتیب اوساط اضلاع BC، AC و AB می‌نامیم.

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AE}{EC} = ۱ \Rightarrow FE \| BD$$
$$\Rightarrow \frac{FE}{BC} = \frac{AF}{AB} = \frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow BC = ۲FE$$

به ترتیب مشابه می‌توان نشان داد که $AC = ۲DF \ , \ \ AB = ۲DE$

$$\Rightarrow \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE} = ۲ \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{DEF}$$

مسأله ۱-۱۵: اگر برای دو مثلث قائم‌الزاویه ABC و $A'B'C'$، $(\widehat{A} = \widehat{A'} = ۹۰^\circ)$ داشته باشیم $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$ ثابت کنید: $\overset{\triangle}{ABC} \sim A'\overset{\triangle}{B'}C'$



عدد k را برابر نسبت $\frac{BC}{B'C'}$ در نظر می‌گیریم.

$$\Rightarrow \begin{cases} AB = k \cdot A'B' \Rightarrow AB^۲ = k^۲ \cdot {A'B'}^۲ \\ BC = k \cdot B'C' \Rightarrow BC^۲ = k^۲ \cdot {B'C'}^۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow BC^۲ - AB^۲ = k^۲ \cdot {B'C'}^۲ - k^۲ \cdot {A'B'}^۲ = k^۲({B'C'}^۲ - {A'B'}^۲)$$

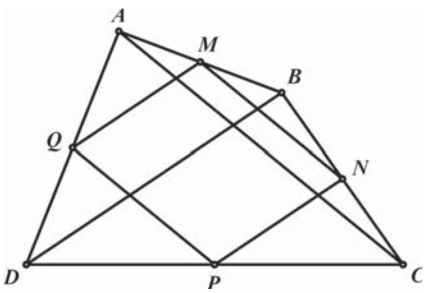
طبق قضیه فیثاغورث نتیجه می‌گیریم که:

$$AC^{۲} = k^{۲} \cdot A'C'^{۲} \Rightarrow \frac{AC}{A'C'} = k$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C \sim A'\overset{\triangle}{B'}C'$$

مسایل

۱) نقاط اوساط اضلاع AB، BC، CD و DA از چهارضلعی $ABCD$ را به ترتیب M، N، P و Q می‌نامیم. ثابت کنید چهارضلعی $MNPQ$ متوازی‌الاضلاع است.



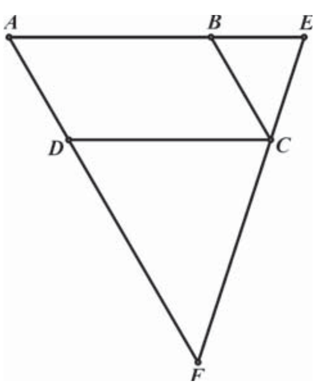
برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم اضلاع روبروی چهارضلعی $MNPQ$ دو به دو با هم موازی هستند.
طبق عکس قضیه تالس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AQ}{QD} \Rightarrow MQ \| BD \\ \dfrac{CN}{NB} = \dfrac{CP}{PD} \Rightarrow NP \| BD \end{array}\right\} \Rightarrow MQ \| NP$$

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد $MN \| PQ$ و بنابراین چهارضلعی $MNPQ$ متوازی‌الاضلاع است.

۲) خط دلخواهی را از رأس C از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ می‌گذرانیم تا امتدادهای اضلاع AB و AD را به ترتیب در نقاط E و F قطع کند. ثابت کنید: $\dfrac{AB}{AE} + \dfrac{AD}{AF} = ۱$

در مثلث AEF داریم:

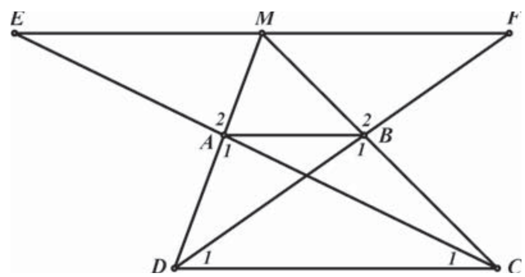


$$\left.\begin{array}{r} DC \| AE \Rightarrow \dfrac{DC}{AE} = \dfrac{FC}{FE} \\ AB = DC \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{FC}{FE} \qquad (۱)$$

$$\left.\begin{array}{r} BC \| AF \Rightarrow \dfrac{BC}{AF} = \dfrac{EC}{EF} \\ AD = BC \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{EC}{EF} \qquad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow \frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = \frac{FC}{FE} + \frac{EC}{EF} = \frac{EF}{EF} = ۱$$

۳) امتداد ساق‌های AD و BC از ذوزنقه $ABCD$ یکدیگر را در M قطع می‌کنند. از M خطی به موازات دو قاعده رسم می‌کنیم تا امتدادهای AC و BD را به ترتیب در E و F قطع کند. ثابت کنید: $EM = MF$



برای اثبات حکم نشان می‌دهیم $\frac{EM}{DC}=\frac{MF}{DC}$ تا حکم مسأله حاصل شود.

$$\left.\begin{array}{r} MF\|DC \Rightarrow \widehat{D_۱}=\widehat{F} \\ \widehat{B_۱}=\widehat{B_۲} \end{array}\right\} \Rightarrow M\overset{\triangle}{F}B \sim D\overset{\triangle}{C}B \Rightarrow \frac{MF}{DC}=\frac{MB}{BC} \qquad (۱)$$

$$\left.\begin{array}{r} EM\|DC \Rightarrow \widehat{C_۱}=\widehat{E} \\ \widehat{A_۱}=\widehat{A_۲} \end{array}\right\} \Rightarrow M\overset{\triangle}{E}A \sim D\overset{\triangle}{C}A \Rightarrow \frac{EM}{DC}=\frac{MA}{AD} \qquad (۲)$$

از طرفی طبق قضیه تالس در مثلث MDC داریم:

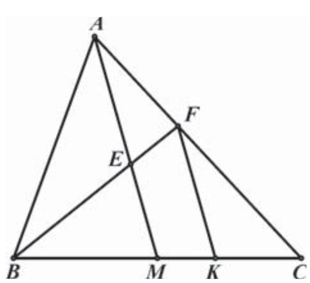
$$AB\|DC \Rightarrow \frac{MA}{AD}=\frac{MB}{BC} \qquad (۳)$$

$$(۱),(۲),(۳) \Rightarrow \frac{MF}{DC}=\frac{EM}{DC} \Rightarrow MF=EM$$

۴) وسط ضلع BC از مثلث ABC را M می‌نامیم. نقطه دلخواه F را بر روی AC انتخاب می‌کنیم و BF را رسم می‌کنیم تا AM را در E قطع کند. ثابت کنید: $\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BE}$

از F خطی موازی AM رسم می‌کنیم تا BC را در K قطع کند. بنابر قضیه تالس در مثلث AMC داریم:

$$\left.\begin{array}{r} FK\|AM \Rightarrow \frac{AF}{AC}=\frac{MK}{MC} \\ MB=MC \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AF}{AC}=\frac{MK}{MB} \qquad (۱)$$

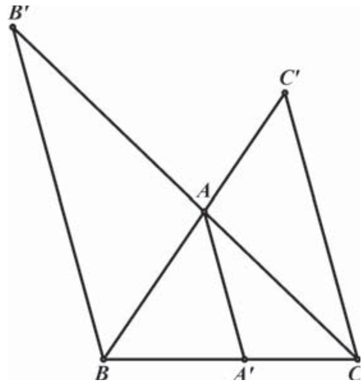


از طرفی بنابر قضیه تالس در مثلث BFK داریم:

$$EM\|FK \Rightarrow \frac{EF}{BE}=\frac{MK}{BM} \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BE}$$

۵) مثلث ABC مفروض است. سه خط موازی یکدیگر از سه رأس A، B و C می‌گذرانیم تا اضلاع مقابل یا امتداد آنها را به ترتیب در A'، B' و C' قطع کند. اگر A' بین B و C باشد، ثابت کنید: $\frac{۱}{AA'}=\frac{۱}{BB'}+\frac{۱}{CC'}$



اگر دو طرف حکم را در AA' ضرب کنیم حکم به عبارت زیر تبدیل می‌شود:

حکم جدید: $$\frac{AA'}{BB'}+\frac{AA'}{CC'}=۱$$

در مثلث CBB' داریم:

$$AA'\|BB' \Rightarrow \frac{AA'}{BB'}=\frac{CA'}{CB} \qquad (۱)$$

همچنین در مثلث BCC' داریم:

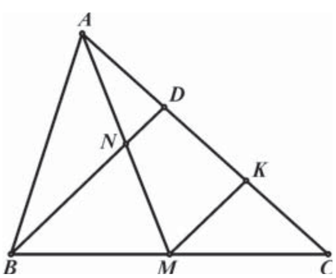
$$AA'\|CC' \Rightarrow \frac{AA'}{CC'}=\frac{BA'}{BC} \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{AA'}{BB'}+\frac{AA'}{CC'}=\frac{CA'}{CB}+\frac{BA'}{BC}=\frac{BC}{BC}=۱$$

۶) در مثلث ABC، M وسط ضلع BC و N وسط میانه‌ی AM است. محل تقاطع AC با امتداد BN را D می‌نامیم. نشان دهید:

الف) $AD=\frac{۱}{۳}AC$

ب) $ND=\frac{۱}{۴}BD$



الف) از M خطی موازی BD رسم می‌کنیم تا AC را در K قطع کند.

$$ND\|MK \Rightarrow \frac{AD}{DK}=\frac{AN}{NM}=۱ \Rightarrow AD=DK \qquad (۱)$$

$$MK\|BD \Rightarrow \frac{CK}{KD}=\frac{CM}{MB}=۱ \Rightarrow CK=KD \qquad (۲)$$

با توجه به روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که:

$$AD = \frac{۱}{۳}AC$$

ب)

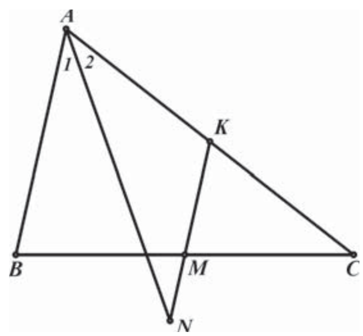
$$ND \| MK \Rightarrow \frac{ND}{MK} = \frac{AN}{AM} = \frac{۱}{۲}$$

$$MK \| BD \Rightarrow \frac{MK}{BD} = \frac{CM}{CB} = \frac{۱}{۲}$$

با توجه به دو رابطه‌ی اخیر نتیجه می‌گیریم که:

$$\frac{ND}{BD} = \frac{ND}{MK} \cdot \frac{MK}{BD} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴} \Longrightarrow ND = \frac{۱}{۴}BD$$

۷) در مثلث ABC، از M وسط ضلع BC، خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا نیمساز رأس A را در N قطع کند. نشان دهید: $MN = \frac{|AC - AB|}{۲}$



فرض می‌کنیم $AC > AB$ باشد و MN را امتداد می‌دهیم تا AC را در K قطع کند.

$$MK \| AB \Rightarrow \frac{CK}{KA} = \frac{CM}{MB} = ۱ \Rightarrow CK = KA \qquad (۱)$$

$$MK \| AB \Rightarrow \frac{MK}{AB} = \frac{CM}{CB} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow MK = \frac{AB}{۲} \qquad (۲)$$

$$\left.\begin{aligned} MK \| AB \Rightarrow \widehat{KNA} = \widehat{BAN} \\ \widehat{BAN} = \widehat{CAN} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \widehat{KNA} = \widehat{KAN} \Rightarrow NK = KA$$

با توجه به رابطه (۱) نتیجه می‌گیریم که:

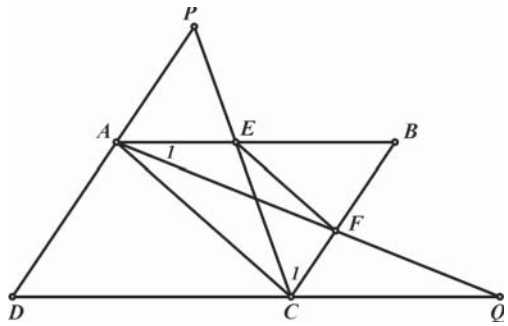
$$\Rightarrow NK = \frac{AC}{۲} \qquad (۳)$$

$$MN = NK - MK$$

با توجه به روابط (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم که:

$$MN = \frac{AC}{۲} - \frac{AB}{۲} = \frac{AC - AB}{۲}$$

۸) خطی که موازی قطر AC از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ رسم می‌شود، اضلاع AB و BC را در E و F قطع می‌کند. محل برخورد دو خط CE و AD را P و محل برخورد دو خط AF و DC را Q می‌نامیم. ثابت کنید خط PQ نیز با قطر AC موازی است.



برای اثبات توازی دو خط AC و PQ در مثلث DPQ کافی است ثابت کنیم: $\frac{DA}{AP} = \frac{DC}{CQ}$

$$\left.\begin{array}{r} AB \| CQ \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{Q} \\ \widehat{AFB} = \widehat{CFQ} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{AFB} \sim \overset{\triangle}{CFQ}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{CQ} = \frac{BF}{FC} \Rightarrow \frac{DC}{CQ} = \frac{BF}{FC} \qquad (۱)$$

$$\left.\begin{array}{r} BC \| AP \Rightarrow \widehat{P} = \widehat{C_1} \\ \widehat{PEA} = \widehat{BEC} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{PEA} \sim \overset{\triangle}{BEC}$$

$$\Rightarrow \frac{CB}{AP} = \frac{BE}{AE} \Rightarrow \frac{DA}{AP} = \frac{BE}{AE} \qquad (۲)$$

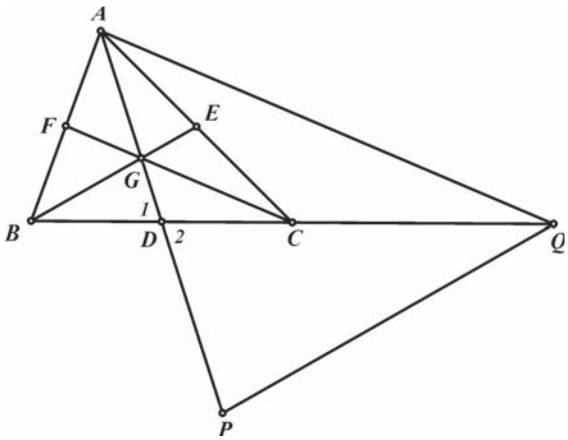
طبق قضیه تالس در مثلث ABC داریم:

$$EF \| AC \Rightarrow \frac{BF}{FC} = \frac{BE}{AE} \qquad (۳)$$

از سه رابطه (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌شود $\frac{DC}{CQ} = \frac{DA}{AP}$ بنابراین طبق عکس قضیه تالس AC و PQ با یکدیگر موازی‌اند.

۹) در مثلث ABC، A را نسبت به نقطه‌ی وسط BC، قرینه می‌کنیم تا P و نقطه‌ی B را نسبت به C قرینه می‌کنیم تا Q بدست آید. ثابت کنید که اضلاع مثلث APQ دو برابر میانه‌های مثلث ABC است.

در مثلث ABC، D و E و F را به ترتیب اوساط اضلاع BC و AC و AB می‌نامیم. بدیهی است که AP دو برابر میانه‌ی AD است.



طبق عکس قضیه تالس داریم:

$$\frac{BF}{FA}=\frac{BC}{CQ}=۱$$
$$\Rightarrow FC||AQ\Rightarrow\frac{FC}{AQ}=\frac{BF}{AB}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow AQ=۲FC$$

پس AQ نیز دو برابر میانه‌ی FC است.

می‌دانیم که میانه‌ها یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ در نقطه‌ای مانند G قطع می‌کنند بنابراین داریم:

$$BG=\frac{۲}{۳}BE \qquad (۱)$$

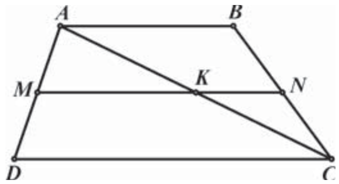
$$\left.\begin{array}{r} GD=\frac{۱}{۳}AD\Rightarrow\frac{GD}{AD}=\frac{۱}{۳} \\ AD=DP \end{array}\right\}\Rightarrow\frac{GD}{DP}=\frac{۱}{۳}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{GD}{DP}=\frac{۱}{۳} \\ \frac{BD}{DQ}=\frac{۱}{۳} \\ \widehat{D_۱}=\widehat{D_۲} \end{array}\right\}\Rightarrow B\overset{\triangle}{G}D\sim P\overset{\triangle}{Q}D\Rightarrow\frac{BG}{PQ}=\frac{۱}{۳}$$

اگر BG را از رابطه (۱) در رابطه فوق جایگزین کنیم PQ هم دو برابر میانه BE خواهد شد.

$$\frac{\frac{۲}{۳}BE}{PQ}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{BE}{PQ}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow PQ=۲BE$$

۱۰) اگر نقاط M و N اوساط ساق‌های AD و BC از ذوزنقه $ABCD$ باشند ثابت کنید:



الف) $MN||AB||CD$

ب) $MN = \frac{AB+CD}{۲}$

الف) برای اثبات حکم، M را نقطه وسط ساق AD در نظر می‌گیریم و از نقطه M خطی به موازات قاعده‌ها رسم می‌کنیم تا ساق BC را در N قطع کند و نشان می‌دهیم که N وسط BC است.

$$MK||DC \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{AM}{MD} \Rightarrow \frac{AK}{KC} = ۱$$

$$KN||AB \Rightarrow \frac{BN}{NC} = \frac{AK}{KC} \Rightarrow \frac{BN}{NC} = ۱ \Rightarrow BN = NC$$

ب)

$$MK||DC \Rightarrow A\overset{\triangle}{M}K \sim A\overset{\triangle}{D}C \Rightarrow \frac{MK}{DC} = \frac{AM}{AD} = \frac{۱}{۲}$$

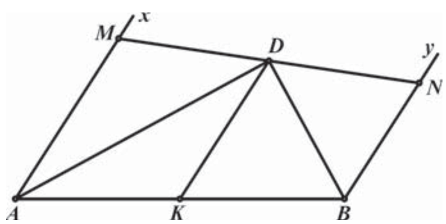
$$\Rightarrow MK = \frac{۱}{۲}DC$$

$$NK||AB \Rightarrow C\overset{\triangle}{N}K \sim C\overset{\triangle}{B}A \Rightarrow \frac{NK}{AB} = \frac{CN}{CB} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow NK = \frac{۱}{۲}AB$$

و با جمع کردن طرفین دو رابطه فوق حکم نتیجه می‌شود: $MN = \frac{۱}{۲}(DC + AB)$

۱۱) دو نیم خط موازی Ax و By را از دو سر پاره‌خط AB و در یک طرف آن رسم می‌کنیم. نقاط M و N را به ترتیب روی این دو نیم خط طوری انتخاب می‌کنیم که $AM + BN = AB$. اگر D وسط MN باشد، ثابت کنید زاویه ADB قائمه است.



برای اثبات قائم‌الزاویه بودن مثلث ADB، میانه DK را رسم کرده و ثابت می‌کنیم این میانه نصف ضلع AB است. در ذوزنقه $ABNM$ خط DK اوساط دو ساق غیر موازی را به هم وصل کرده است. پس بنابر مسأله قبل داریم:

$$DK = \frac{AM+BN}{۲} = \frac{AB}{۲}$$

پس میانه DK نصف ضلع AB بوده و مثلث ADB قائم‌الزاویه است.