

## فصل دوم: (قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن)

### درسنامه

#### درس ۱ (نسبت و تناسب در هندسه)

نسبت: کسر  $\frac{a}{b}$  ( $b \neq 0$ ) که در آن  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی می‌باشند، نسبت  $a$  به  $b$  نامیده می‌شود.

تناسب: برابری دو نسبت را تناسب می‌گویند. مثلاً  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ( $b, d \neq 0$ ) یک تناسب است که در آن  $a$  و  $d$  را طرفین و  $b$  و  $c$  را وسطین می‌نامند.

اگر  $a$  و  $b$  کمیت‌های فیزیکی باشند، در این صورت در بیان نسبت  $\frac{a}{b}$  واحد اندازه‌گیری  $a$  و  $b$  باید یکی باشد، اگر یکی نباشد آن‌ها را به یک واحد تبدیل می‌کنیم. مثلاً اگر طول یک استخر ۲۰ متر و عرض آن ۴۰۰ سانتی‌متر باشد، چون ۲۰ متر برابر ۲۰۰۰ سانتی‌متر است. نسبت طول به عرض استخر  $\frac{a}{b} = \frac{۲۰۰۰}{۴۰۰} = ۵$  می‌باشد.

**مثال ۱** در یک مثلث متساوی‌الساقین نسبت اندازه زاویه رأس به یکی از زوایای مجاور قاعده ۲ به ۵ است. اندازه کوچک‌ترین زاویه مثلث را محاسبه کنید. **پاسخ:** اندازه زاویه رأس را  $2x$  می‌گیریم، در این صورت اندازه زاویه‌های مجاور به قاعده  $5x$  می‌شود. از طرفی مجموع زوایای هر مثلث  $180^\circ$  است، در نتیجه:

$$2x + 5x + 5x = 180^\circ \Rightarrow 12x = 180^\circ \Rightarrow x = 15^\circ$$

بنابراین اندازه کوچک‌ترین زاویه  $2x = 30^\circ$  است.

#### خواص اصلی تناسب

با فرض  $bd \neq 0$ ، آن را در دو طرف تناسب ضرب می‌کنیم.  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}(bd) = \frac{c}{d}(bd) \Rightarrow ad = bc$

پس از تناسب  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  همواره نتیجه می‌شود  $ad = bc$  که آن را طرفین وسطین کردن می‌نامند.

**مثال ۲**  $x$  را از تناسب  $\frac{x+2y+4}{1} = \frac{x+6y+11}{3}$  به دست آورید.

$$3x + 6y + 12 = x + 6y + 11 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

**پاسخ:** با طرفین وسطین کردن تناسب داده شده داریم:

**مثال ۳** اگر  $\frac{mx-2ny}{ny+3mx} = \frac{x}{y} = \frac{3}{4}$  و  $\frac{m}{n} = \frac{2}{3}$  را بیابید.

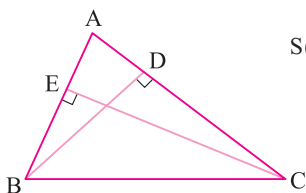
**پاسخ:** صورت و مخرج کسر را بر  $ny$  تقسیم می‌کنیم. داریم:

$$\frac{mx-2ny}{ny+3mx} = \frac{\frac{m}{n} \times \frac{x}{y} - 2}{1 + 3 \times \frac{m}{n} \times \frac{x}{y}} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} - 2}{1 + 3 \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{2} - 2}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = -\frac{3}{5}$$

#### رابطه بین نسبت ارتفاع‌ها و قاعده‌های نظیر

مثلث  $ABC$  را با ارتفاع‌های  $CE$  و  $BD$  در نظر بگیرید، داریم:

$$S(ABC) = \frac{1}{2}CE \cdot AB = \frac{1}{2}BD \cdot AC \Rightarrow \frac{CE}{BD} = \frac{AC}{AB}$$



یعنی در هر مثلث، نسبت دو ارتفاع مثلث با نسبت عکس قاعده‌های نظیر آن‌ها متناسب است.

به طور کلی اگر اندازه اضلاع مثلث  $ABC$  به صورت  $AB = c$ ،  $AC = b$  و  $BC = a$ ،  $h_a$  و  $h_b$ ،  $h_c$  ارتفاع‌های نظیر این اضلاع باشند، داریم:

$$\frac{h_a}{h_c} = \frac{c}{a}, \frac{h_b}{h_c} = \frac{c}{b}, \frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}$$

$$a \geq b \geq c \Leftrightarrow h_a \leq h_b \leq h_c$$

**نتیجه:** کوتاه‌ترین ارتفاع در مثلث، نظیر بلندترین ضلع است و به عکس.

**مثال ۴** اندازه ارتفاع‌های مثلثی ۳، ۴ و ۵ است. نسبت مجموع دو ضلع بزرگ‌تر به کوچک‌ترین ضلع مثلث را بیابید.

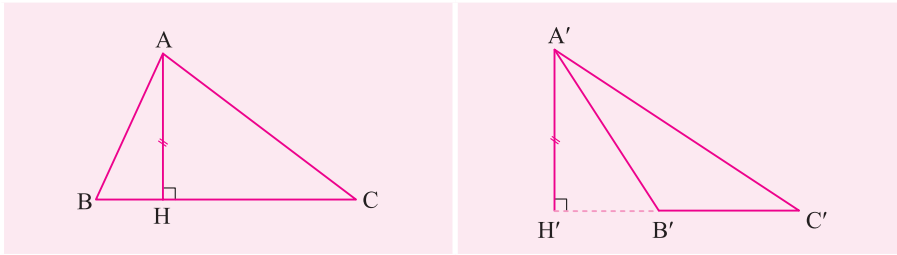
**پاسخ:** فرض کنیم  $h_a = 3$ ،  $h_b = 4$  و  $h_c = 5$ ، در نتیجه  $a > b > c$  و داریم:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{h_c}{h_a} + \frac{h_c}{h_b} = \frac{5}{3} + \frac{5}{4} = \frac{35}{12}$$

**نسبت مساحت‌های دو مثلث هم ارتفاع**

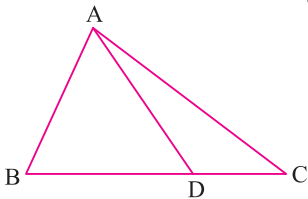
هرگاه اندازه ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت اندازه قاعده‌هایی است که این ارتفاع‌ها بر آن‌ها وارد شده‌اند.

$$\frac{S(A'B'C')}{S(ABC)} = \frac{\frac{1}{2}A'H' \cdot B'C'}{\frac{1}{2}AH \cdot BC} = \frac{B'C'}{BC}$$



**نتیجه ۱:** اگر دو مثلث در یک رأس مشترک بوده و ضلع‌های مقابل به این رأس‌ها روی یک خط باشند، آن‌گاه نسبت مساحت‌های دو مثلث برابر نسبت‌های اندازه‌های آن دو ضلع است.

$$\frac{S(ACD)}{S(ABC)} = \frac{CD}{BC}, \frac{S(ABD)}{S(ABC)} = \frac{BD}{BC}, \frac{S(ACD)}{S(ABD)} = \frac{CD}{BD}$$

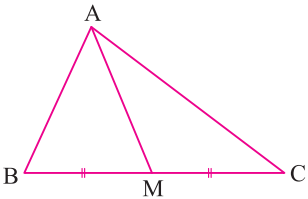


**مثال ۵** ثابت کنید میانه هر مثلث آن را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می‌کند (دو مثلث هم مساحت را معادل می‌گویند).

**پاسخ:** در مثلث ABC مطابق شکل فرض کنیم AM میانه باشد، دو مثلث AMB و AMC در رأس A

هم ارتفاعند، لذا:

$$\frac{S(ABM)}{S(AMC)} = \frac{BM}{MC} = 1 \Rightarrow S(ABM) = S(AMC)$$



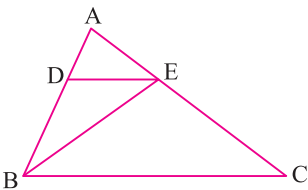
**مثال ۶** در مثلث ABC نقاط D و E به ترتیب روی اضلاع AB و AC قرار دارند. ثابت کنید:

$$\frac{S(ADE)}{S(ABC)} = \frac{AD \cdot AE}{AB \cdot AC}$$

**پاسخ:** در مثلث ABC مطابق شکل B را به E وصل می‌کنیم (با C را به D) دو مثلث ABE و ADE

در رأس E هم ارتفاع هستند، پس داریم:

$$\frac{S(ADE)}{S(ABE)} = \frac{AD}{AB}$$



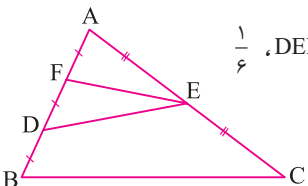
$$\frac{S(ABE)}{S(ABC)} = \frac{AE}{AC}$$

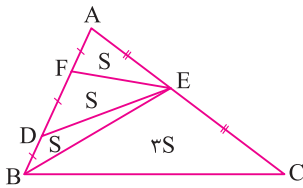
هم‌چنین دو مثلث ABE و ABC در رأس B هم ارتفاعند، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{S(ADE)}{S(ABE)} \times \frac{S(ABE)}{S(ABC)} = \frac{AD}{AB} \times \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{S(ADE)}{S(ABC)} = \frac{AD \times AE}{AB \times AC}$$

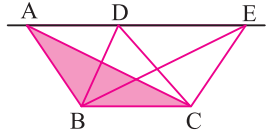
دو تناسب فوق را در هم ضرب می‌کنیم:

**مثال ۷** در مثلث ABC مطابق شکل E وسط AC و  $AF = DF = BD$  می‌باشد. ثابت کنید مساحت مثلث DEF،  $\frac{1}{6}$  مساحت مثلث ABC است.





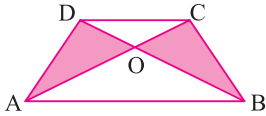
**پاسخ:** B را به E وصل می‌کنیم، فرض کنیم مساحت مثلث DEF برابر S باشد، چون EF میانه مثلث ADE و DE میانه مثلث BEF است، پس مساحت هر دو مثلث AEF و BED برابر S است. هم‌چنین BE میانه مثلث ABC است، پس مساحت دو مثلث ABE و BEC برابرند، لذا  $S(BEC) = 3S$  و  $S(ABC) = 6S$  و در نتیجه مساحت مثلث DEF برابر  $\frac{1}{6}$  مساحت مثلث ABC است.



**نتیجه ۴:** اگر چند مثلث قاعده مشترک داشته باشند و رأس‌های روبه‌رو به قاعده در آن‌ها، روی خطی موازی این قاعده باشند، آن‌گاه این مثلث‌ها هم مساحت هستند.

$$S(ABC) = S(BDC) = S(BEC) = \dots$$

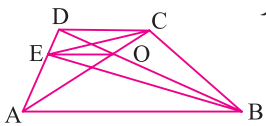
**مثال ۸:** در دوزنقه ABCD مطابق شکل دو قطر BD و AC رسم شده‌اند. ثابت کنید  $S(AOD) = S(BOC)$



**پاسخ:** دو مثلث ABC و ABD دارای قاعده مشترک AB هستند و رأس سوم آن‌ها D و C روی خطی موازی قاعده AB قرار دارند، پس مساحت این دو مثلث برابرند (ارتفاع وارد بر قاعده AB همان ارتفاع دوزنقه است).

$$S(ABD) = S(ABC) \Rightarrow S(AOD) + S(AOB) = S(AOB) + S(BOC) \Rightarrow S(AOD) = S(BOC)$$

**مثال ۹:** در دوزنقه مقابل، O نقطه تلاقی قطرهای OE و OE موازی قاعده‌ها است. ثابت کنید مساحت چهارضلعی BOEC برابر مساحت مثلث AOD و مساحت مثلث BOC است.



**پاسخ:** دو مثلث AOE و BOE در قاعده OE مشترکند و رأس سوم آن‌ها A و B روی خطی موازی قاعده OE قرار دارد، پس  $S(AOE) = S(BOE)$

، با استدلال مشابه داریم  $S(DOE) = S(COE)$ ، بنابراین می‌توان نوشت:  $S(BOEC) = S(BOE) + S(COE) = S(AOE) + S(DOE) = S(AOD)$

از طرفی در مثال قبل ثابت کردیم  $S(AOD) = S(BOC)$ ، پس:  $S(BOEC) = S(AOD) = S(BOC)$

### خواص نسبت و تناسب

۱.  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$  (طرفین وسطین)

۲.  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$  (تعویض طرفین)

۳.  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$  (تعویض وسطین)

۴.  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$  (معکوس کردن)

۵.  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{d+c}{d}$  (ترکیب در صورت)

۶.  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$  (تفضیل در صورت)

۷.  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$  (ترکیب در مخرج)

۸.  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$  (تفضیل در مخرج)

۹.  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$  (ترکیب در صورت و تفضیل در مخرج)

۱۰.  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

ویژگی (۱۰) به صورت مقابل قابل تعمیم است:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

۱۱.  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$

**مثال ۱۰:** با استفاده از خواص تناسب معادله  $\frac{6-x}{3} = \frac{x}{y}$  را حل کنید.

**پاسخ:** می‌توانیم از طرفین وسطین کردن استفاده کنیم، اما استفاده از خاصیت (۱۰) بهتر می‌باشد.

$$\frac{6-x}{3} = \frac{x}{y} = \frac{6-x+x}{3+y} = \frac{6}{10} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{6}{10} \Rightarrow x = \frac{42}{10} = 4\frac{2}{5}$$

واسطه هندسی دو عدد حقیقی هم علامت

اگر طرفین یا وسطین یک تناسب دو عدد برابر باشد، یعنی  $\frac{a}{b} = \frac{c}{b}$  یا  $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$  با طرفین وسطین کردن تناسب نتیجه می‌شود که  $b^2 = ac$ ، در این صورت عدد  $b$  را واسطه هندسی دو عدد  $a$  و  $c$  می‌نامیم.

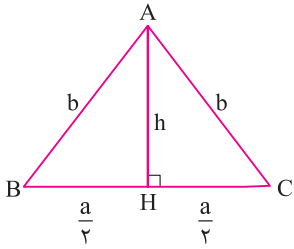
**مثال ۱۱** در یک مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع وارد بر قاعده، واسطه هندسی بین ساق و قاعده مثلث است. نسبت قاعده به ساق را به دست آورید.

**پاسخ:** بنا به فرض داریم  $h^2 = ab$ ، از طرفی بنا به قضیه فیثاغورس داریم:

$$h^2 + \frac{a^2}{4} = b^2 \Rightarrow ab + \frac{a^2}{4} = b^2 \xrightarrow{\frac{a}{b} = k} bk \times b + \frac{b^2 k^2}{4} = b^2$$

طرفین تساوی اخیر را به  $b^2$  تقسیم می‌کنیم داریم:

$$k + \frac{k^2}{4} = 1 \Rightarrow k^2 + 4k - 4 = 0 \Rightarrow k = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - (-16)}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{2} \xrightarrow{k > 0} k = 2\sqrt{2} - 2$$



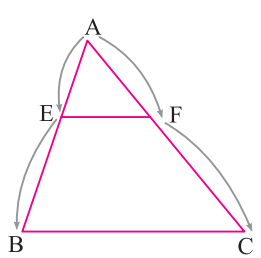
سؤالات امتحانی درس اول

۲

۱.	اگر $\frac{a}{3} = \frac{b}{2} = \frac{c}{6}$ و $a + 2b + c = 26$ ، آن‌گاه مقادیر $a$ ، $b$ و $c$ را به دست آورید.
۲.	اگر $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ ، آن‌گاه حاصل $\frac{x + 2y - z}{x - y + 2z}$ را بیابید.
۳.	اندازه زوایای مثلثی به نسبت اعداد ۳، ۴ و ۵ است، زاویه بین دو نیمساز داخلی زوایای بزرگ‌تر را بیابید.
۴.	اگر $\frac{4x^2 + 15}{5y^2 + 12} = \frac{x}{y}$ و $4x \neq 5y$ باشد، واسطه هندسی دو عدد مثبت $x$ و $y$ را حساب کنید.
۵.	نقاط $M$ و $N$ بر پاره خط $AB$ به طول $a$ چنان قرار دارند که $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{AN} = \frac{3}{5}$ ، اندازه پاره خط $MN$ را برحسب $a$ به دست آورید.
۶.	یک دوزنقه مفروض است: (الف) ثابت کنید قطر آن، دوزنقه را به دو مثلث تقسیم می‌کند که نسبت مساحت آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های دوزنقه است. (ب) اگر اندازه قاعده‌های دوزنقه $4/8$ و $19/2$ باشد، نسبت فواصل دو رأس دوزنقه را از یک قطر آن به دست آورید.
۷.	اگر $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ و $\sqrt{x+2} = z - y$ ، آن‌گاه مقادیر $x$ ، $y$ و $z$ را حساب کنید.
۸.	مساحت مثلث $APE$ در شکل روبه‌رو ۱۲ است. اگر $AB = BC = CD = DE$ ، آن‌گاه مجموع مساحت‌های همه مثلث‌های موجود در شکل را محاسبه کنید.
۹.	اگر در مثلث $ABC$ داشته باشیم $\frac{h_a}{12} = \frac{h_b}{15} = \frac{h_c}{20}$ و $\frac{\sin \hat{A}}{m} = \frac{\sin \hat{B}}{n} = \frac{\sin \hat{C}}{p}$ ، آن‌گاه مقادیر صحیح $m$ ، $n$ و $p$ را محاسبه کنید. ( $m$ ، $n$ و $p$ دو به دو نسبت به هم اولند).
۱۰.	ساق یک مثلث متساوی‌الساقین واسطه هندسی ارتفاع وارد بر قاعده و قاعده آن می‌باشد، نسبت محیط مثلث به این ارتفاع را بیابید.
۱۱.	در مثلث $ABC$ ، طول ضلع $AB$ دو برابر طول ضلع $AC$ است. نقطه $M$ وسط ضلع $BC$ است و نقطه $N$ روی $BC$ چنان است که $BN = 4CN$ ، نسبت فاصله $M$ از ضلع $AB$ به فاصله $N$ تا ضلع $AC$ را بیابید.

	<p>۱۲. در متوازی‌الاضلاع ABCD مطابق شکل نقطه E روی ضلع AB قرار دارد و امتداد CE، امتداد ضلع AD را در F قطع کرده است. ثابت کنید <math>S(ADE) = S(BEF)</math></p>
	<p>۱۳. در دوزنقه ABCD مطابق شکل نقطه O روی پاره خط واصل وسط قاعده‌ها قرار دارد. ثابت کنید <math>S(AOD) = S(BOC)</math></p>
	<p>۱۴. در شکل مقابل دو مربع به ضلع‌های ۴ و ۷ کنار هم قرار گرفته‌اند. مساحت مثلث ABC را محاسبه کنید.</p>

## درس ۲ (قضیه تالس)



**قضیه تالس:** اگر خطی با یک ضلع مثلث موازی باشد و دو ضلع دیگر را قطع کند، نسبت پاره‌خط‌هایی که روی یک ضلع پدید می‌آورد با نسبت پاره‌خط‌هایی که روی ضلع دیگر ایجاد می‌کند، برابر است.  
(اثبات در تمرین‌ها)

$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{AF}{CF}$$

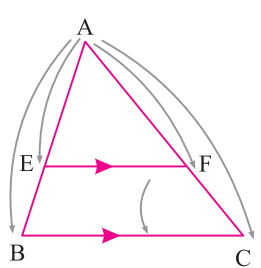
**نتیجه ۱:** به کمک خواص تناسب، قضیه تالس به صورت‌های زیر هم نوشته می‌شود:

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AF}{CF} \xrightarrow{\text{ترکیب درمخرج}} \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \xrightarrow{\text{معکوس کردن}} \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} \text{ (کل به جزء)}$$

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AF}{CF} \xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{AB}{BE} = \frac{AC}{CF} \xrightarrow{\text{معکوس کردن}} \frac{BE}{AB} = \frac{CF}{AC} \text{ (جزء به کل)}$$

**نتیجه ۲:** (نتیجه اساسی در قضیه تالس)

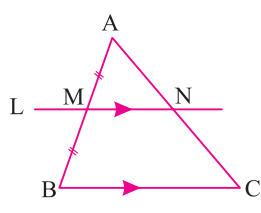
خطی که موازی یک ضلع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند، مثلثی ایجاد می‌کند که اضلاعش متنظراً با اضلاع مثلث مفروض متناسب‌اند.



$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

**مثال ۱۲:** ثابت کنید خطی که از وسط یک ضلع مثلث موازی ضلع سوم آن رسم شود، از وسط ضلع مقابل می‌گذرد و پاره خط حاصل، نصف ضلع سوم است.

**پاسخ:** به کمک قضیه تالس داریم:



$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow 1 = \frac{AN}{NC} \Rightarrow AN = NC$$