درس اوّل: مبانی احتمال

فرض کنیم مدیر مدرسه‌ای بخواهد برای سال جدید تغییراتی در انتخاب دبیران و برنامه آموزشی مدرسه به‌وجود آورد. او باید بررسی کند عملکرد دبیران سال گذشته، میزان رضایت دانش آموزان و نتیجه امتحان چگونه بوده است. برنامه آموزشی مدرسه دارای چه ایراداتی است؟ او باید مشخص کند با چه تیم آموزشی و برنامه درسی بهترین بهره آموزشی را می‌برد و مدرسه موفق عمل خواهد کرد. با توجه به این‌که او از آینده هیچ اطلاعی ندارد. .... حال چگونه می‌تواند تصمیم درستی بگیرد؟

ابزار مطالعه در چنین مسائلی که با ناآگاهی نسبی از شرایط یا وقایع آینده همراه است، علم آمار نام دارد.

به کمک علم آمار می‌توانیم اطلاعات سال‌های گذشته مدرسه را به درستی جمع‌آوری کنیم و از آن یک توصیف مناسب برای وضعیت مدرسه داشته باشیم و سپس با کمک علم احتمال تصمیم خوبی بگیریم.

نکته: هرگاه با جامعه‌ای ناشناخته سر و کار داریم شناختن جامعه با نمونه و داده یک کار آماری است ولی اگر جامعه‌ای را بشناسیم و بخواهیم بدانیم نمونه‌هایی از آن جامعه چگونه خواهند بود علم احتمال به کمک ما می‌آید.

به طور مثال: الف. می‌دانیم در یک جعبه ۷۰ لامپ سالم و ۳۰ لامپ سوخته است، چند لامپ برداریم که حداقل یک لامپ سوخته باشد؟ (علم احتمال)

ب. درآمد کارمندان وزارت دفاع (علم آمار)

مثال:

فرض کنید بخواهیم از دو جعبه که در اولی و دومی به ترتیب ۵ و ۱۵ سیب وجود دارد ولی فقط برخی از آن‌ها سالم هستند سیبی به تصادف انتخاب کنیم. در جعبه اول ۳ سیب فاسد و ۲ سیب سالم و در جعبهٔ دوم ۵ سیب فاسد و ۱۰ سیب سالم وجود دارد. انتخاب کدام جعبه مناسب‌تر است؟

پاسخ: در جعبهٔ اول ۴۰٪ سیب‌ها سالم و در جعبهٔ دوم ۶۶/۶٪ سیب‌ها سالم هستند. پس بهتر است فرد جعبهٔ دوم را انتخاب کند اما اگر بخواهد ۲ سیب از جعبه بردارد، تصمیم‌گیری چنان راحت نیست.

جعبه اول: $\dfrac{\binom{۲}{۱}\binom{۱}{۱}}{\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}}=\dfrac{۲}{۲۰}=\dfrac{۱}{۱۰}=۰/۱$

در این حالت با توجه به این‌که سیب‌ها را یکی پس از دیگری انتخاب می‌کنیم انتخاب جعبهٔ دوم بهتر است.

جعبه دوم: $\dfrac{\binom{۱۰}{۱}\binom{۹}{۱}}{\binom{۱۵}{۱}\binom{۱۴}{۱}}=\dfrac{۹}{۲۱}=\dfrac{۳}{۷}\simeq ۰/۴۳$

در مثال بالا اگر به سیب‌های جعبهٔ اول شمارهٔ ۱ تا ۵ نسبت دهیم، شماره آن‌ها مهم نیست ولی فرد انتخاب کننده می‌داند سیب‌های انتخابی وی بین ۱ تا ۵ خواهد بود. که در علم احتمال به مجموعه $S=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ **فضای نمونه** و به هر عضو آن **برآمد** گفته می‌شود.

فضای نمونه

کلیهٔ حالات ممکن بررسی یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه گوییم و با S نشان می‌دهیم.

مثال:

فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس را بنویسید.

پاسخ: فضای نمونه‌ای دارای ۶ برآمد می‌باشد. $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

نکته: اگر n تاس را با هم پرتاب کنیم، تعداد اعضای فضای نمونه‌ای آن برابر است با: $n(S)=۶^n$

نکته: اگر n سکه را با هم پرتاب کنیم یا یک سکه را n بار پرتاب کنیم، تعداد اعضای فضای نمونه‌ای آن برابر است با: $n(S)=۲^n$

نکته: هرگاه چند ابزار آزمایشی را با هم پرتاب کنیم مثل یک تاس و دو سکه یا حالات دیگر برای یافتن تعداد اعضای فضای نمونه کافیست اعضای هر فضا را در هم ضرب کنیم. $n(S)=n_1(S)\times n_2(S)\times\ldots\times n_k(S)$

مثال:

۱. تعداد اعضای فضای نمونه پرتاب یک تاس و دو سکه را بنویسید.

پاسخ: $n(S)=6\times2\times2=24$

۲. تعداد اعضای فضای نمونه تولد ۴ فرزند را بنویسید.

پاسخ: $n(S)=2^4=16$

هرگاه دو ابزار آزمایش با هم پرتاب شود شکل اعضای فضای نمونه به صورت دوتایی نوشته می‌شود. مثلاً در پرتاب ۲ تاس برای نوشتن فضا از ضرب دکارتی $\{1,2,\ldots,6\}\times\{1,2,\ldots,6\}$ استفاده می‌شود و به صورت $S=\{(1,1)(1,2)(1,3)(1,4)\ldots(6,3)(6,4)(6,5)(6,6)\}$ نوشته می‌شود.

مثال:

فضای نمونه پرتاب یک تاس و یک سکه را بنویسید.

پاسخ: $n(S)=2\times6=12$

$S=\{(1,\text{ر})(1,\text{پ})(2,\text{ر})(2,\text{پ})(3,\text{ر})(3,\text{پ})(4,\text{ر})(4,\text{پ})(5,\text{ر})(5,\text{پ})(6,\text{ر})(6,\text{پ})\}$

پیشامد

هر زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه را پیشامد می‌گوییم.

اصول احتمال

برای هر پیشامد A احتمال رخ دادن آن را با $P(A)$ نشان می‌دهیم که عددی بین $[0,1]$ است. اصول احتمال عبارت‌اند از:

۱. $P(S)=1$

۲. برای هر دو پیشامد A و B که $A\cap B=\varnothing$ داریم $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

در اصل بالا P را تابع احتمال گوییم و دامنهٔ آن مجموعهٔ همه پیشامدهاست.

آن‌چه در بند ۲ بالا گفته شد یعنی $A\cap B=\varnothing$ باشد برای دو پیشامد دلخواه A و B به این معنی است که دو پیشامد با هم رخ نمی‌دهند و به آن‌ها ناسازگار یا جدا از هم گفته می‌شود.

قضیه: هر فضای احتمال خواص زیر را دارد.

۱. $P(A')=1-P(A)$

۲. $P(\varnothing)=0$

۳. اگر A، B و C پیشامدهای دو به دو مستقل باشند آنگاه: $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$

۴. برای هر پیشامد دلخواه A و B داریم: $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

۵. برای هر دو پیشامد دلخواه Aو B داریم: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

اثبات ۱.

A و A' ناسازگار هستند $A\cap A'=\varnothing$

$$P(\underbrace{A\cup A'}_{S})=P(A)+P(A')-P(\overbrace{A\cap A'}^{\varnothing})\to\underbrace{P(S)}_{1}=P(A)+P(A')$$

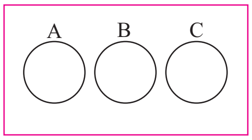
$$\to P(A')=1-P(A)$$

اثبات ۲.

$\varnothing \cap S = \varnothing \qquad \varnothing \cup S = S$

$P(\underbrace{\varnothing \cup S}_{S}) = P(\varnothing) + P(S) \rightarrow \cancel{P(S)} = P(\varnothing) + \cancel{P(S)} \rightarrow P(\varnothing) = ۰$

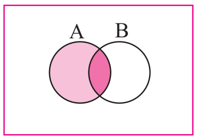
اثبات ۳. A، B و C دوبه‌دو ناسازگارند یعنی:



$A \cap B = \varnothing \qquad A \cap C = \varnothing \qquad B \cap C = \varnothing$

اثبات ۴.

$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup (B \cup C)) = P(A) + \underbrace{P(B \cup C)}_{P(B)+P(C)} = P(A) + P(B) + P(C)$



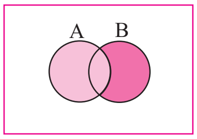
طبق شکل واضح است که $A \cap B$ و $A - B$ با هم ناسازگارند یعنی

$(A - B) \cup (A \cap B) = A$

$(A - B) \cap (A \cap B) = \varnothing$

$P(A) = P((A - B) \cup (A \cap B)) \Rightarrow P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

اثبات ۵.



$A \cup B = A \cup (B - A)$

طبق شکل واضح است که دو قسمت A و $B - A$ با هم اشتراک ندارند یعنی ناسازگارند.

پس:

$P(A \cup B) = P(A \cup (B - A)) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + \underbrace{P(B - A)}_{P(B) - P(B \cap A)}$

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

مثال:

۱. اگر $P(A') = \frac{۲}{۳}$ و $P(B) = \frac{۱}{۵}$ باشد و A و B ناسازگار باشند $P(A \cup B)$ را بیابید.

پاسخ:

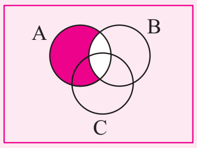
ناسازگار $P(A \cap B) = ۰$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} = \frac{۸}{۱۵}$

$P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳}$

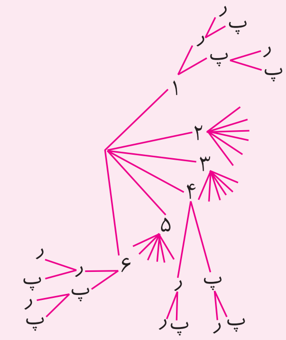
۲. پیشامدهای A، B و C سه پیشامد دلخواه در فضای نمونه S می‌باشند پیشامد $(A - B) \cap C$ را هاشور بزنید.

پاسخ:



۳. یک تاس را به هوا پرتاب می‌کنیم. اگر عدد اول بیاید دوباره تاس می‌ریزیم و اگر عدد غیر اول آمد دو مرتبه سکه پرتاب می‌کنیم. مطلوب است پیشامد این‌که فقط یک بار سکه پشت بیاید.

پاسخ:



$A = \{(۱, ر, پ)(۱, پ, ر)(۴, پ, ر)(۴, ر, پ)(۶, ر, پ)(۶, پ, ر)\}$

تمرین‌های امتحانی

۱. یک تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر عدد ۴ بیاید دو سکه پرتاب می‌کنیم در غیر این صورت یک سکه پرتاب می‌کنیم.

الف. فضای نمونه

ب. پیشامدی را در نظر بگیرید که در این آزمایش فقط یک بار سکه رو بیاید.

۲. سه کارت همزمان با هم و به تصادف از یک دسته کارت که شامل ۴ کارت زرد، ۳ کارت آبی، ۳ کارت سبز و ۴ کارت قرمز است، انتخاب می‌شوند. مطلوب است تعیین:

الف. فضای نمونه

ب. پیشامد آن‌که تمام کارت‌ها قرمز باشند.

پ. پیشامد آن‌که یک کارت قرمز، یکی سبز و یکی آبی باشد.

ت. پیشامد آن‌که سه رنگ مختلف باشند.

ث. پیشامد آن‌که هر ۴ رنگ بیاید.

۳. کدام یک از سؤالات زیر مربوط به علم آمار و کدام یک مربوط به علم احتمال است؟

الف. درآمد بازیگران سینما چقدر است؟

ب. می‌دانیم ۱۵ نفر از ۲۰ نفر دانش آموزان کلاس، موسیقی بلدند. چند نفر انتخاب کنیم تا مطمئن شویم که دست کم یک نفر موسیقی‌دان است؟

۴. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف. پیشامد $A\bigcup B$ زمانی رخ می‌دهد که ....

ب. پیشامد $A\bigcap B$ زمانی رخ می‌دهد که ....

پ. .... زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد.

ت. پیشامد $A-B$ زمانی رخ می‌دهد که ....

۵. یک تاس را پرتاب کرده‌ایم و پیشامدهای زیر رخ داده است. برای هر مجموعه پیشامد رخ داده شده، یک تعریف ارائه کنید.

الف. $A=\{۲,۴,۶\}$ ب. $B=\{۲\}$ پ. $C=\{۵,۶\}$ ت. $D=\{۲,۳,۵\}$

۶. تاسی را به هوا پرتاب کرده‌ایم عدد ۴ آمده است

الف. چه پیشامدهایی می‌توان تعریف کرد؟

ب. چند پیشامد می‌توان تعریف کرد؟

پ. آیا رو شدن عدد ۴ دلیل بر رخ دادن همهٔ این پیشامدهاست؟

۷. سکه‌ای را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار سکه رو بیاید. فضای نمونه‌ای را تعیین کنید.

۸. کیسه‌ای دارای ۱۲۰ کارت است که اعداد ۱، ۲، ۳، ... و ۱۲۰ روی هر کارت نوشته شده است. از این کیسه یک کارت به تصادف بیرون می‌کشیم. فرض کنید A پیشامدی باشد که روی کارت عدد زوج، B پیشامدی باشد که روی کارت مضرب ۳ و C پیشامدی که عدد روی کارت اول باشد. مطلوب است تعداد اعضای:

الف. فضای نمونه A و B ب. $A\bigcap B$ پ. $A-C$

ت. $(A\bigcup B)-C$ ث. C' ج. $(A\bigcup B)'$

۹. از مجموعهٔ $S=\{۱,۲,۳,...,۵۷۶\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوب است تعیین احتمال آن‌که:

الف. عد انتخابی مضرب ۷ باشد

ب. عدد انتخاب شده مضرب ۳ یا ۵ باشد.

پ. عدد انتخاب شده مضرب ۳ باشد اما مضرب ۵ نباشد.

۱۰. اگر $P(A-B)=\frac{۱}{۴}$ و $P(B-A)=\frac{۳}{۴}$ باشد $P(A\cap B)$ را بیابید.

۱۱. در جمعی شامل ۴۰۰ نفر، ۳۰۰ نفربه دوچرخه سواری یا شنا یا هر دو، ۱۶۰ نفر به شنا و ۱۲۰ نفر به شنا و دوچرخه سواری علاقمند باشند. احتمال این‌که فرد انتخاب شده از این جمع به دوچرخه سواری علاقمند باشد چقدر است؟

۱۲. علی، محمد و رضا برای سکونت در شهری که دارای ۴ هتل مختلف به نام‌های A، B، C و D است مسافرت کرده‌اند، مطلوب است احتمال آن‌که:

الف. سه نفر در سه هتل مختلف سکونت داشته باشند.

ب. هتل A همواره مسافری نداشته باشد.

پ. علی و محمد همواره در یک هتل و رضا با آن‌ها در یک هتل نباشد.

۱۳. ثابت کنید که اگر A و B دو پیشامد از فضای S باشند:

الف) $P(A'\cap B')=۱-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$

ب) $P(A'\cup B)-P(A\cap B)=P(A')$

۱۴. اگر $\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ آن‌گاه $P(A\cap B)$ را بیابید.

۱۵. اگر A و B دو پیشامد باشند و $P(A\cup B)=\frac{۷}{۸}$ و $P(A\cap B)=\frac{۱}{۴}$ و $P(A')=\frac{۵}{۸}$ مطلوب است تعیین پیشامدهای $P(A)$، $P(B)$ و $P(A'\cap B)$.

درس دوم: احتمال غیر هم شانس

بسیاری از اتفاقاتی که در آینده رخ می‌دهند نتایج نامعلومی دارند و نتایج آن‌ها از قبل قابل تعیین کردن نیست ولی می‌توان شانس یا احتمال وقوع آن‌ها را مشخص کرد. مثلاً در پرتاب یک سکه سالم احتمال رو آمدن و پشت آمدن $\frac{۱}{۲}$ است. اما در مسابقات اسب سواری نمی‌توان شانس قهرمانی اسبی خاص را مشخص کرد زیرا اسب‌های مسابقه شانس برابر ندارند.

دنیای اطراف ما سرشار از پیشامدهایی است که غیر هم شانس هستند.

فرض کنید یک مکعب را ۱۰۰ بار پرتاب کرده‌ایم و شرایط این ۱۰۰ بار پرتاب یکسان باشد، وجه شماره ۱ (۲۷ بار) وجه شماره ۲ (۱۸ بار) وجه شماره ۳ (۱۲ بار) وجه شماره ۴ (۲۵ بار) وجه شماره ۵ (۱۱ بار) وجه شماره ۶ (۷ بار) ظاهر شوند در این صورت به اعداد هر وجه مکعب احتمال‌های زیر را نسبت می‌دهیم.

$P(۱)=\frac{۲۷}{۱۰۰}$ $\quad P(۲)=\frac{۱۸}{۱۰۰}$ $\quad P(۳)=\frac{۱۲}{۱۰۰}$ $\quad P(۴)=\frac{۲۵}{۱۰۰}$

$P(۵)=\frac{۱۱}{۱۰۰}$ $\quad P(۶)=\frac{۷}{۱۰۰}$

که همهٔ اعداد بالا الزاماً با هم برابر نیستند.

اکنون به تعریف زیر توجه کنید:

هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای $S=\{s_۱,s_۲,...,s_n\}$ احتمال نابرابر داشته باشند S را فضای نمونه‌ای با **احتمال غیر هم‌شانس** می گوییم.

نکته: هر زیر مجموعهٔ تک‌عضوی از فضای نمونه‌ای را پیشامد ساده می‌گوییم.

در احتمال غیر هم‌شانس مانند احتمال هم‌شانس خواص زیر برقرار هستند:

خواص احتمال غیر هم‌شانس

در فضای نمونه‌ای متناهی با احتمال غیرهم‌شانس، اگر $S=\{s_۱,s_۲,...,s_n\}$ فضای نمونه‌ای و $A=\{a_۱,a_۲,...,a_k\}$ یک زیر مجموعه k عضوی S باشد همواره داریم:

۱. $۰\le P(A)\le ۱$ $\quad$ ۲. $P(S)=۱$ $\quad$ ۳. $P(A)=P(a_۱)+P(a_۲)+...+P(a_k)$