

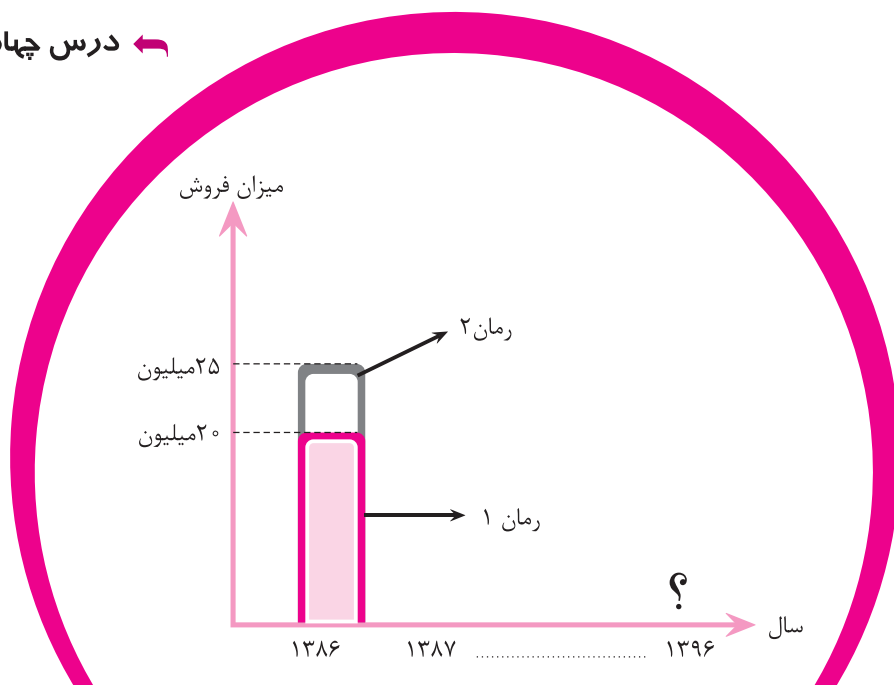
# تابع

## فصل



در این فصل خواهیم خواند:

- ← درس اول: آشنایی بیشتر با تابع
- ← درس دوم: انواع تابع
- ← درس سوم: وارون تابع
- ← درس چهارم: اعمال روی توابع



یک رمان پر فروش در بارهٔ دفاع مقدس در سال ۱۳۸۶، ۲۵ میلیون تومان فروش کرد. رمان دیگری در باره دفاع مقدس در همین سال سالت ۲۰ میلیون تومان فروش کرد. اگر رمان اول در هر سال به میزان ۳ میلیون تومان نسبت به سال قبل افزایش فروش داشته باشد، تابعی بنویسید که میزان فروش در هر سال پس از سال ۱۳۸۶، ۱ بر حسب رمان نشان دهد. اگر افزایش فروش برای رمان دو ۴ در هر سال ۲ میلیون تومان نسبت به سال قبل باشد، تابعی بنویسید که مجموع فروش این دو رمان، ۱ در هر سال پس از سال ۱۳۸۶ نشان دهد. این دو رمان در سال ۱۳۹۶ در مجموع چه میزان فروش خواهند کرد؟



## درس اول: آشنایی بیشتر با تابع

## پرسش و تمرین

۱. جدول زیر را کامل کرده و نمودار هر تابع را رسم کنید.

| تابع  | $f(x) = -2x$ | $g(x) = -2x$          | $k(x) = -2x$ | $t(x) = -x^2$ | $h(x) = -x^2$   |
|-------|--------------|-----------------------|--------------|---------------|-----------------|
| دامنه | $\mathbb{R}$ | $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ | $[-2, 2)$    | $\mathbb{R}$  | $[-2, +\infty)$ |
| برد   |              |                       |              |               |                 |

## نکته



یک تابع از مجموعه  $A$  به مجموعه  $B$ ، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو  $A$ ، دقیقاً یک عضو از  $B$  نسبت داده می‌شود.  $A$  را دامنه تابع و  $B$  را هم‌دامنه تابع می‌نامند.

\* توجه کنید با ثابت ماندن ضابطه تابع، اگر دامنه تابع عوض شود، تابع نیز عوض می‌شود. ولی اگر هم‌دامنه طوری تغییر کند که برد تابع زیرمجموعه آن باشد، تابع عوض نمی‌شود. به بیان دیگر هم‌دامنه تابع را می‌توان هر مجموعه دلخواهی شامل برد تابع در نظر گرفت.

۲. در تابع  $\begin{cases} f: [-3, 4] \rightarrow B \\ f(x) = -3x + 1 \end{cases}$  برای مجموعه هم‌دامنه (مجموعه  $B$ ) سه مجموعه متفاوت مثال بزنید.

۳. در تابع  $\begin{cases} f: (-2, 5] \rightarrow B \\ f(x) = x^2 - 3 \end{cases}$  برای مجموعه هم‌دامنه (مجموعه  $B$ ) سه مجموعه متفاوت مثال بزنید.

۴. برای تابع  $\begin{cases} f: (-4, 3] \rightarrow (-\infty, 3) \\ f(x) = -x^2 + 2 \end{cases}$  کدامیک از نمایش‌های زیر قابل قبول است؟

الف)  $f: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, 3)$       ب)  $f: (-4, 3] \rightarrow (-\infty, 2]$       پ)  $f: [-4, 3] \rightarrow [-14, 2]$

$$f(x) = -x^2 + 2$$

$$f(x) = -x^2 + 2$$

$$f(x) = -x^2 + 2$$

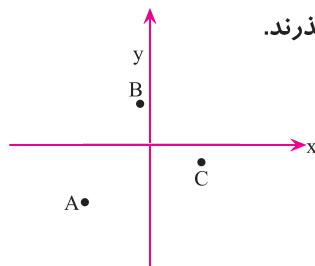
ت)  $f: (-4, 3] \rightarrow (-14, 2]$       ث)  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-14, 2]$       ج)  $f: (-4, 3] \rightarrow [-14, 2]$

$$f(x) = -x^2 + 2$$

$$f(x) = -x^2 + 2$$

$$f(x) = -x^2 + 2$$

۵. نمودار سه تابع متفاوت رسم کنید که از سه نقطه  $A$ ،  $B$  و  $C$  بگذرند.




---



---



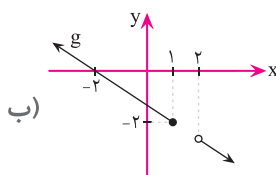
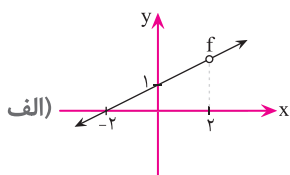
---



۶. مجموعه‌های  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  و  $B = \{6, 9, 7\}$  مفروض‌اند.

- الف. چند تابع مانند  $f$  از  $A$  به  $B$  می‌توان نوشت؟  
 ب. چند تابع  $f$  از  $A$  به  $B$  می‌توان نوشت که شامل زوج مرتب  $(2, 9)$  باشند؟  
 پ. چند تابع  $f$  از  $A$  به  $B$  می‌توان نوشت که فاقد زوج مرتب  $(1, 6)$  باشند؟  
 ت. چند تابع  $f$  از  $A$  به  $B$  می‌توان نوشت که  $f(4) \neq 6, f(1) = 7$  باشد؟

۷. در هر مورد ضابطه و دامنهٔ تابع را مشخص کنید.



۸. ماشین تابع  $f$  هر عدد حقیقی را به‌عنوان ورودی قبول می‌کند و سپس چهار برابر آن عدد را قرینه کرده و به آن شش واحد اضافه می‌کند.

الف. ضابطهٔ تابع  $f$  را به‌صورت  $\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ y = f(x) \end{cases}$  بنویسید.

- ب. اگر ورودی تابع عدد  $-7$  باشد، خروجی تابع را بیابید.  
 پ. اگر خروجی تابع  $12$  باشد، ورودی تابع چقدر بوده است؟  
 ت. نمودار تابع را رسم کرده و دامنه و برد تابع را مشخص کنید.

۹. ماشین تابع  $f$  هر عدد حقیقی بین  $-2$  تا  $3$  را به‌عنوان ورودی قبول می‌کند و از مربع آن عدد یک واحد کم می‌کند.

الف. ضابطهٔ تابع  $f$  را به‌صورت  $\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ y = f(x) \end{cases}$  نمایش دهید.

- ب. اگر ورودی تابع عدد  $2$  باشد، خروجی تابع را بیابید.  
 پ. اگر خروجی تابع  $5$  باشد، ورودی تابع را بیابید.  
 ت. نمودار تابع را رسم کرده و دامنه و برد تابع را مشخص کنید.

۱۰. ماشین تابع  $f$  اعداد حقیقی بزرگ‌تر مساوی  $-3$  و کوچک‌تر از  $4$  را به‌عنوان ورودی قبول می‌کند

و به دو برابر آن عدد یک واحد اضافه می‌کند.

الف. ضابطهٔ تابع  $f$  را به‌صورت  $\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ y = f(x) \end{cases}$  نمایش دهید.

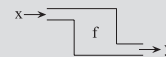
- ب. اگر خروجی تابع  $27$  باشد، ورودی تابع چه عددی است؟  
 پ. نمودار تابع را رسم کرده و دامنه و برد آن را مشخص کنید.

### نکته



می‌توان تابع  $f$  را به‌عنوان ماشینی در نظر گرفت که ورودی  $x$  را دریافت می‌کند و پس از اعمال قانون  $f$  بر روی آن، خروجی  $y$  را تولید می‌دهد. به همین دلیل می‌نویسند:

$$y = f(x)$$



متغیر مستقل:  $x$

متغیر وابسته یا تابع:  $y$



۱۱. ماشین تابع  $f$  اعداد حقیقی منفی را به عنوان ورودی دریافت می‌کند و آن را قرینه و معکوس کرده و به حاصل آن یک واحد اضافه می‌کند.

الف. ضابطه تابع  $f$  را به صورت  $\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ y = f(x) \end{cases}$  نمایش دهید.

ب. اگر ورودی تابع  $\frac{1}{3}$  باشد، خروجی تابع چقدر است؟

پ. اگر خروجی تابع  $\frac{15}{3}$  باشد، ورودی تابع چقدر بوده است؟

---



---

۱۲. در تابع  $f(x) = ax - 3$ ، اگر  $f(1) = 5$  باشد، مقدار  $f(5)$  را بیابید.

---

۱۳. در تابع  $f(x) = \frac{ax}{x-1}$ ، اگر  $f(-2) = 4$  باشد، متغیر  $x$  را چنان بیابید که  $f(x) = 9$  باشد.

---



---

۱۴. تابع  $\begin{cases} f: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 2x^2 - 1 \end{cases}$  مفروض است.

الف. حاصل  $2f(-1) - f(-2)$  را بیابید.

ب. اگر  $f(x) = 7$  باشد،  $x$  را بیابید.

---

۱۵. در تابع  $f(x) = \frac{2x-1}{x+m}$ ، اگر  $f(-1) = 4$  باشد، مقدار  $a$  را چنان بیابید که  $f(a) = 2f(m)$  باشد.

---



---

۱۶. توابع  $f(x) = -x + 2$  و  $g(x) = \frac{1}{x+m}$  مفروض‌اند. اگر  $g(3) = \frac{-2}{f(-8)}$  باشد، حاصل  $f(g(0))$  را بیابید.

---



---

۱۷. در تابع  $f(x) = x^3 - 2$ ، اگر  $f(a) = 25$  باشد، به موارد زیر پاسخ دهید.

الف. حاصل  $f(a-1)$  را بیابید.

ب. اگر  $f(m) = a-1$  باشد،  $m$  را بیابید.

---



---

## نکته



در تابع  $y = f(x)$ ، برای مناسبه مقدار تابع به ازای  $x = a$  کافی است که به پای تمام  $x$ ها مقدار  $a$  را قرار دهیم و با نماد  $f(a)$  نشان می‌دهند.



۱۸. در هر مورد تساوی دو تابع  $f$  و  $g$  را بررسی کنید.

الف)  $f = \{(3, 5), (7, 2)\}$

$g = \{(3, 2), (7, 5)\}$

ب)  $f = \{(1, 2), (4, 5), (-1, 6)\}$

$g = \{(1, 2), (4, 5), (-1, -6)\}$

پ)  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = 4x$

$g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$g(x) = 4x$

ت)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = x^2 + 1$

$g: \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty)$

$g(x) = x^2 + 1$

ث)  $f: [-1, 4) \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = -2x + 4$

$g: [-1, 4) \rightarrow [-4, 6]$

$g(x) = -2x + 4$

ج)  $f(x) = 2x$

$g(x) = \frac{2x^3 + 6x}{x^2 + 3}$

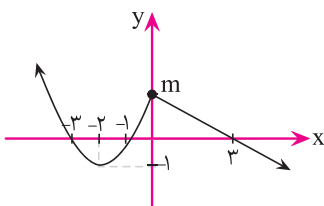
۱۹. توابع  $f = \{(2, 4), (-3, m-1)\}$  و  $g = \{(2, 2n-6), (-3, 7)\}$  مفروض‌اند.  $m$  و  $n$  را چنان

بیابید که دو تابع  $f$  و  $g$  مساوی باشند.

۲۰. تمام تابع‌های ممکن از مجموعه  $A = \{a, b\}$  به مجموعه  $B = \{c, d\}$  را بنویسید.

۲۱. سه تابع متفاوت مثال بنویسید که دامنه آن‌ها بازه  $[0, +\infty)$  باشد.

۲۲. تابع  $f$  برای اعداد حقیقی کوچک‌تر مساوی صفر، یک سهمی بوده و نمودار آن در کل اعداد



حقیقی به صورت مقابل است.

الف. ضابطه تابع  $f$  را بیابید.

ب. حاصل  $f(2m) - f(-m)$  را بیابید.

پ. ورودی تابع را چنان بیابید که خروجی آن  $0$  باشد.



۲۳. تابع  $f$  در تمام شرایط زیر صدق می‌کند.  $f$  را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

الف. دامنه  $f$  مجموعه اعداد حقیقی است و  $f(-1) = 2$  و  $f(2) = -3$ .

ب.  $f$  در بازه‌های  $(-\infty, -1]$  و  $[2, +\infty)$  تابع ثابت است.

پ.  $f$  در بازه  $(-1, 2)$  به هر عدد، مربع آن را نسبت می‌دهد.

---



---



---

۲۴. نمودار هر کدام از توابع زیر را در دامنه داده‌شده رسم کنید.

الف)  $f(x) = -(x-1)^2 + 1$

ب)  $f(x) = x^2 - 4$

$D_f = [-1, +\infty)$

$D_f = (-\infty, 1)$

---



---

پ)  $f(x) = |x-1| - 1$

ت)  $f(x) = -|x| + 2$

$D_f = [-2, 3)$

$D_f = (-3, 0] \cup [2, 4]$

---



---

ث)  $f(x) = (x-1)^2 - 1$

ج)  $f(x) = |x+1| - 2$

$D_f = (-\infty, 3]$

$D_f = [-4, -1) \cup [0, 2)$

---



---

۲۵. تابع  $f$  در همه شرایط زیر صدق می‌کند.  $f$  را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

الف. دامنه  $f$  مجموعه اعداد حقیقی است و  $f(-2) = 4$ .

ب. تابع  $f$  برای اعداد حقیقی منفی، تابع خطی است که از نقطه  $(-1, 3)$  می‌گذرد.

پ.  $f(0) = 1$  و تابع برای اعداد حقیقی مثبت، معکوس هر عدد را نسبت می‌دهد.

---



---



---

۲۶. وقتی سازمان حفاظت محیط‌زیست آمریکا متوجه شد که کارخانه‌ای جوهر گوگرد به رودخانه

می‌ریزد، این کارخانه را ۱۲۵۰۰۰ دلار به‌اضافه روزی ۱۰۰۰ دلار تا زمان قطع آلودگی توسط کارخانه جریمه کرد.

الف. کل جریمه را به عنوان تابعی از تعداد روزهای  $x$  که کارخانه مقررات را نقض می‌کند، بنویسید.

ب. کل جریمه پس از ۵ روز نقض مقررات چقدر است؟

پ. اگر کل جریمه برابر ۱۳۷۰۰۰ دلار باشد، این کارخانه از زمان اجرای حکم، چند روز مقررات را نقض کرده است؟

---



---



۲۷. کرایه یک ماشین ۵۰۰۰۰ تومان در روز به اضافه ۷۰۰ تومان در هر کیلومتر است.

الف. هزینه کرایه یک ماشین برای یک روز با  $x$  کیلومتر رانندگی را به صورت تابعی بر حسب  $x$  بیابید.

ب. هزینه کرایه یک ماشین برای یک روز با ۵۰ کیلومتر رانندگی چقدر است؟

پ. اگر هزینه کرایه یک ماشین برای یک روز پس از  $x$  کیلومتر رانندگی برابر ۹۲۰۰۰ تومان باشد،  $x$  را بیابید.

---



---



---

### پرسش‌های چهارگزینه‌ای



۱. کدام یک از توابع زیر با تابع  $f: [-4, 5] \rightarrow \mathbb{R}$   
 $f(x) = |x| + 2$  برابر نیست؟

(۱)  $f: [-4, 5] \rightarrow \mathbb{R}^+$    $f(x) = |x| + 2$

(۲)  $f: [-4, 5] \rightarrow (1, 7)$   
 $f(x) = |x| + 2$

(۳)  $f: [-4, 5] \rightarrow (2, 7)$   
 $f(x) = |x| + 2$

(۴)  $f: [-4, 5] \rightarrow [2, 7]$   
 $f(x) = |x| + 2$

۲. اگر توابع  $f = \{(0, 0), (-1, 2m), (5, 10)\}$  و  $g = \{(p-1, 0), (5, n-1), (-1, 14)\}$  برابر باشند،

حاصل  $m - n + 2p$  کدام است؟

(۱) ۲۰  (۲) ۲  (۳) -۲  (۴) -۲۰

۳. تابع  $f(x) = |x - 1|$  با کدام یک از توابع زیر برابر است؟

(۱)  $g(x) = \frac{x|x-1|}{x}$

(۲)  $g(x) = \begin{cases} x-1 & x > 1 \\ -x+1 & x < 1 \end{cases}$

(۳)  $g(x) = -|x-1|$

(۴)  $g(x) = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ -x+1 & x < 1 \end{cases}$

۴. در تابع  $f(x) = 3x - m$ ، اگر  $f(f(0)) = 8$  باشد، حاصل  $f(m)$  کدام است؟

(۱) -۲  (۲) ۲  (۳) ۴  (۴) -۴

۵. در تابع  $f(x) = ax + 4$ ، اگر  $f(t+3) - f(t) = 3$  باشد، حاصل  $f(-5)$  کدام است؟

(۱) ۱  (۲) -۱  (۳) ۲  (۴) -۲