

نکته: از قسمت‌های (الف) و (ب) می‌توان نتیجه گرفت که لزوماً $f \circ g(x)$ با $g \circ f(x)$ برابر نیست.

اشتباه رایج: گاهی دانش‌آموزان برای محاسبه دامنه توابع مرکب مثل $f \circ g(x)$ ، ابتدا ضابطه تابع را تشکیل داده و از روی آن دامنه را تعیین می‌کنند. جواب به‌دست‌آمده همواره با روش کلی تعیین دامنه تابع مرکب (از روی تعریف) هم‌خوانی ندارد. به مثال زیر توجه کنید.

$$f(x) = \frac{1}{x-3}, g(x) = \frac{4}{x}$$

$$\text{روش کلی: } D_{f \circ g} = \left\{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \right\} = \left\{ \mathbb{R} - \{0\} \mid \frac{4}{x} \in \mathbb{R} - \{3\} \right\} = \left\{ \mathbb{R} - \{0\} \mid \frac{4}{x} \neq 3 \right\}$$

$$= \left\{ \underbrace{\mathbb{R} - \{0\}}_A \mid \underbrace{x \neq \frac{4}{3}}_B \right\} \xrightarrow{A \cap B} D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \left\{ 0, \frac{4}{3} \right\} \quad (1)$$

$$\Rightarrow (1) \neq (2)$$

$$\text{روش ضابطه: } f \circ g(x) = f\left(\frac{4}{x}\right) = \frac{1}{\frac{4}{x}-3} = \frac{x}{4-3x} \rightarrow D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{4}{3} \right\} \quad (2)$$

بنابراین همواره از روش کلی برای تعیین دامنه توابع مرکب استفاده می‌کنیم.

تذکره: اگر حداقل یکی از توابع f یا g به صورت زوج مرتب باشد، برای تشکیل توابع مرکب بهتر است از نمودارهای پیکانی استفاده کنیم.

مثال:

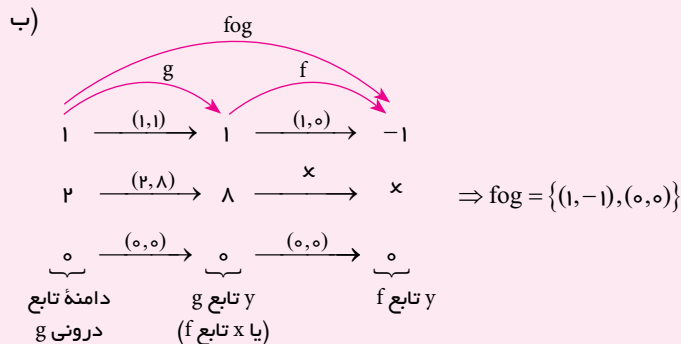
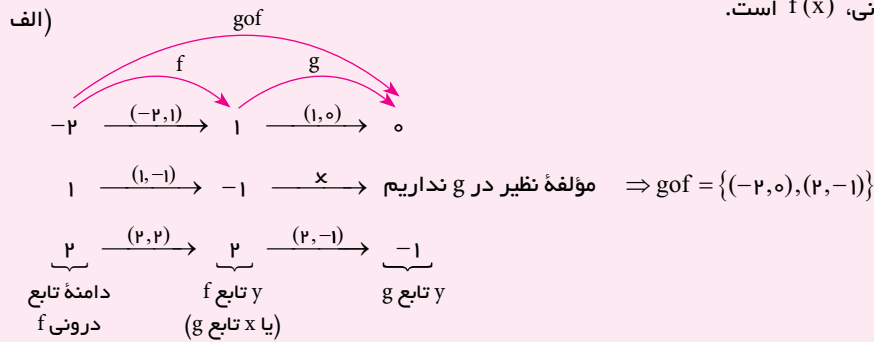
۱. در هر یک از حالت‌های زیر تابع مرکب خواسته‌شده را تشکیل دهید.

الف) $g \circ f = ?$, $g = \{(1,0), (2,-1), (3,2)\}$, $f = \{(-2,1), (1,-1), (2,2)\}$

ب) $f \circ g = ?$, $g = \{(1,1), (2,8), (0,0)\}$, $f = \{(0,0), (1,-1), (2,0)\}$

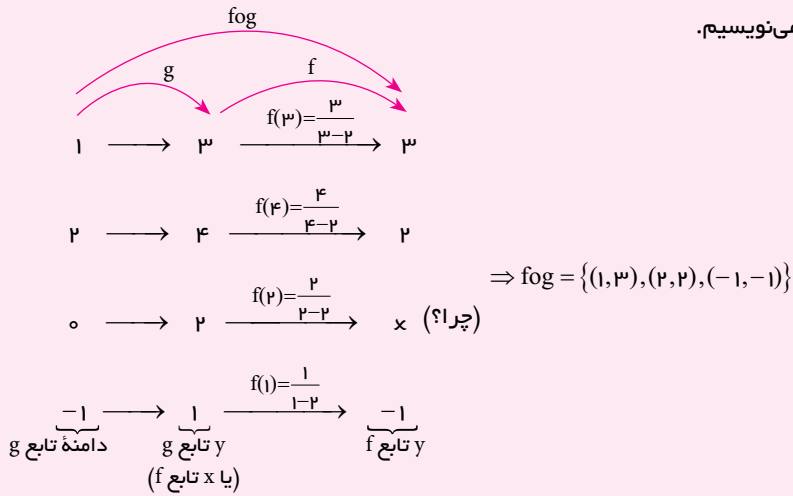
پاسخ: در استفاده از نمودار پیکانی همواره ابتدا دامنه تابع درونی را می‌نویسیم. به عنوان مثال در تابع $f \circ g(x)$ تابع درونی، $g(x)$

و در تابع $g \circ f(x)$ ، تابع درونی، $f(x)$ است.



۲. اگر $f(x) = \frac{x}{x-2}$ و $g = \{(1,3), (2,4), (0,2), (-1,1)\}$ باشد، $f \circ g$ را تشکیل دهید.

پاسخ: ابتدا دامنه تابع درونی ($g(x)$) را می‌نویسیم.



تمرین‌های امتحانی

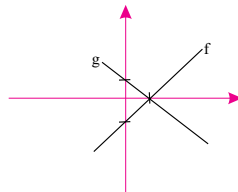
۱. گزینه درست را انتخاب کنید.

الف. اگر $f = \{(0,1), (1,0)\}$ و $g = \{(0,5), (1,6)\}$ باشد، آن‌گاه $D_{\frac{g}{f}}$ عبارت است از: $\{0,1\}$ $\{0\}$

ب. طبق نمودار روبه‌رو، $(f+g)(1)$ برابر است با:

صفر

۱



$R_g \cap D_f \neq \emptyset$ $R_f \cap D_g \neq \emptyset$

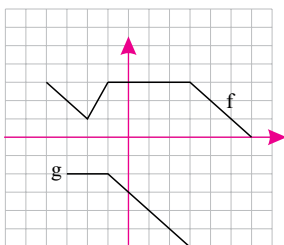
پ. شرط تشکیل تابع $g \circ f(x)$ این است که:

نادرست

درست

ت. اگر $g(3) = 2$ و $f(2) = 5$ باشد، آن‌گاه $f \circ g(3) = 10$ است.

۲. با توجه به نمودار شکل روبه‌رو هر یک از موارد خواسته‌شده را به‌دست آورید.



الف) $(f-g)(0)$

ب) $(\frac{f}{g})(3)$

پ) $(f \circ g)(-1)$

ت) $f \circ f(-1)$

ث) $f \circ f \circ f(5)$

۳. اگر $f = \{(0,1), (1,2), (3,4)\}$ و $g = \{(-2,1), (0,0), (1,5), (3,3)\}$ دو تابع باشند:

الف. $(f+g)(1)$ را به‌دست آورید.

ب. تابع $\frac{f}{g}$ را تشکیل دهید.

۴. اگر $f = \{(1, 3), (2, -1), (3, 4), (5, 2)\}$ و $g = \{(-1, 2), (3, -2), (5, 3), (2, 8)\}$ باشند، برد تابع $2f + g$ چند عضو دارد؟

۵. اگر $f(x) = \sqrt{x+4}$ و $g(x) = \frac{x+2}{x-4}$ مطلوب است:

ب. $D_{\frac{g}{f}}$

الف. $D_{\frac{f}{g}}$

ت. $(2f - g)(5)$

پ. $D_{\frac{f+g}{g \cdot f}}$

۶. اگر $f(x) = \begin{cases} 1-2x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases}$ و $g = \{(2, 0), (1, 4), (-1, -2), (0, 4)\}$ ، $g - f$ و $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

۷. اگر $f(x) = \sqrt{x-2}$ و $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ باشد، دامنه توابع مرکب $f \circ g$ ، $g \circ f$ و $f \circ f$ را به دست آورده، سپس $f \circ g(x)$ ، $f \circ g(2)$ و $f \circ g(0)$ را محاسبه کنید.

۸. اگر $f = \{(-1, 4), (3, 2), (0, 3), (4, 1)\}$ و $g = \{(2, 2), (3, -1), (1, 5), (0, 4)\}$ باشد، هر یک از توابع $f \circ g$ ، $g \circ f$ و $f \circ f$ را با تشکیل دامنه مشخص کنید.

۹. اگر $f(x) = \frac{x}{x-2}$ و $g = \{(1, 3), (2, 4), (0, 2), (-1, 1)\}$ باشد، دامنه $\frac{g}{f}$ و ضابطه $g \circ f$ را تعیین کنید.

۱۰. اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ، نشان دهید حاصل n بار ترکیب $f(x)$ با خودش عبارت است از:

$$f(f(\dots f(x))) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$$