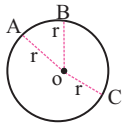
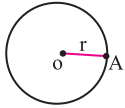


درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

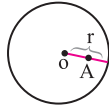


دایره مجموعه نقاطی از صفحه است که فاصله آن‌ها از یک نقطه ثابت برابر با مقدار ثابتی می‌باشد که به آن نقطه ثابت، مرکز و به آن مقدار ثابت، شعاع گفته می‌شود.

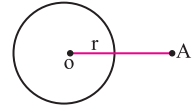
وضعیت یک نقطه نسبت به دایره را براساس فاصله بین آن نقطه و مرکز دایره، به صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم:



پ. A روی دایره اگر $OA = r$



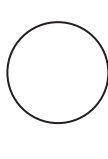
ب. A درون دایره اگر $OA < r$



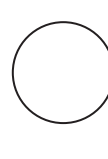
الف. A بیرون دایره اگر $OA > r$

اوضاع نسبی خط و دایره

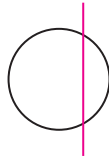
اوضاع نسبی یک خط و یک دایره عبارت‌اند از:



ب. اگر خط و دایره تنها در یک نقطه مشترک باشند، در این صورت خط بر دایره مماس است.



الف. اگر خط و دایره هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند، در این صورت خط بیرون دایره است.



پ. اگر خط و دایره در دو نقطه مشترک باشند، در این صورت خط و دایره متقاطع‌اند.

مثال:

خط d و دایره $C(O, R)$ مفروض‌اند، جاهای خالی را با کلمه مناسب پر کنید.

الف. اگر فاصله خط d از مرکز دایره کمتر از شعاع باشد، آن‌گاه خط و دایره نقطه اشتراک دارند، یعنی

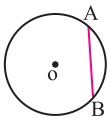
ب. اگر فاصله خط d از مرکز برابر با شعاع باشد، آن‌گاه خط و دایره نقطه اشتراک دارند، یعنی

پ. اگر فاصله خط d بزرگتر از شعاع باشد، آن‌گاه خط و دایره نقطه اشتراک یعنی

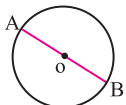
پاسخ: الف. ۲، متقاطع‌اند. ب. ۱، مماس‌اند. پ. ندارند، خارج از هم‌اند.

تعاریف

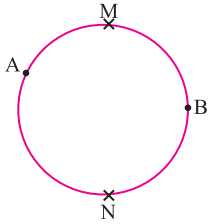
۱. شعاع دایره: پاره‌خطی است که مرکز دایره را به یک نقطه از محیط دایره وصل می‌کند و آن را با R نمایش می‌دهند.



۲. وتر دایره: پاره‌خطی است که دو نقطه متمایز از محیط دایره را به هم وصل می‌کند، مثل وتر AB .



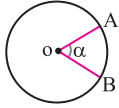
۳. قطر دایره: وتری است که از مرکز دایره گذشته و بزرگ‌ترین وتر دایره است.



۴. کمان: دو نقطه A و B را روی محیط دایره در نظر می‌گیریم. این دو نقطه محیط دایره را به دو بخش تقسیم می‌کنند که به هر یک از آن بخش‌ها، کمان یا قوس می‌گوییم.

کمان \widehat{ANB} کمان \widehat{AMB}

توجه: هر قطر دایره، آن را به دو کمان مساوی تقسیم می‌کند که این کمان‌ها را نیم‌دایره می‌نامیم.

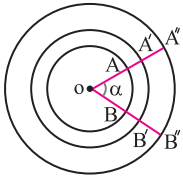


۵. زاویه مرکزی: زاویه‌ای که رأس آن، مرکز دایره و اضلاع آن، شعاع‌های دایره باشند را زاویه مرکزی گویند و اندازه هر زاویه مرکزی برابر با اندازه کمان مقابل به آن است.

$$\widehat{AOB} = \widehat{AB} = \alpha^\circ$$

توجه: اندازه کمان، همان اندازه زاویه مرکزی مقابل به آن کمان بوده و بر حسب درجه می‌باشد.

اندازه یک کمان را نباید با طول آن کمان اشتباه گرفت، مثلاً در شکل زیر، کمان‌های \widehat{AB} ، $\widehat{A'B'}$ و $\widehat{A''B''}$ اندازه‌های برابر α دارند.



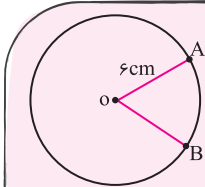
$$\widehat{AB} = \widehat{A'B'} = \widehat{A''B''} = \alpha$$

$$|\widehat{AB}| < |\widehat{A'B'}| < |\widehat{A''B''}|$$

اما کاملاً مشخص است که طول این کمان‌ها نابرابرند، یعنی:

توجه داریم که هرگاه طول کمان و شعاع دایره بر حسب سانتی‌متر باشند، اندازه کمان بر حسب رادیان بیان می‌شود.

مثال:

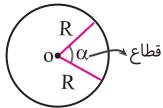


در دایره مقابل، اگر طول کمان AB برابر ۴ cm باشد، آن‌گاه اندازه کمان AB را به دست آورید.

$$\frac{\text{اندازه کمان AB}}{360^\circ} = \frac{\text{طول کمان AB}}{\text{محیط دایره}} \Rightarrow \frac{x}{360^\circ} = \frac{4}{2\pi \times 6} \Rightarrow \frac{x}{360^\circ} = \frac{1}{3\pi} \Rightarrow x = \frac{360^\circ}{3\pi} \Rightarrow x = \frac{120^\circ}{\pi}$$

پاسخ:

قطاع:



به قسمتی از دایره، قطاع گفته می‌شود، مانند شکل مقابل:

اگر زاویه مرکزی قطاع مساوی α باشد، مساحت قطاع به دو صورت به دست می‌آید:

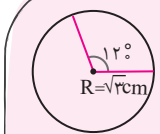
$$\frac{\text{قطاع S}}{\text{دایره S}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \Rightarrow \text{قطاع S} = \left(\frac{\alpha}{360^\circ}\right) \times \pi R^2$$

الف. α بر حسب درجه باشد:

$$\frac{\text{قطاع S}}{\text{دایره S}} = \frac{\alpha}{2\pi} \Rightarrow \text{قطاع S} = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \times \pi R^2 = \frac{1}{2} R^2 \alpha$$

ب. α بر حسب رادیان باشد:

مثال:



مساحت قطاع شکل مقابل چند سانتی‌متر مربع است؟ ($\pi = 3/14$)

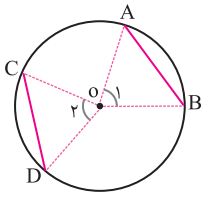
$$S = \left(\frac{\alpha}{360^\circ}\right) \times \pi R^2 = \left(\frac{120^\circ}{360^\circ}\right) \times 3/14 \times (\sqrt{3})^2 = \frac{1}{3} \times 3/14 \times 3 = 3/14$$

پاسخ:

قضیه

ثابت کنید در یک دایره، کمان‌های نظیر دو وتر مساوی، باهم برابرند و بالعکس.

اثبات:



فرض: $AB = CD$ حکم: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$

از نقطه O به نقاط A, B, C و D وصل می‌کنیم، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} AB = CD \\ OA = OB = OC = OD = R \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OAB \cong \triangle OCD \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

(ض ض ض)

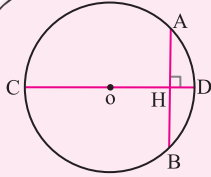
اثبات عکس قضیه:

فرض: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ حکم: $AB = CD$

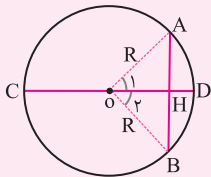
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AB} = \widehat{CD} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OA = OB = OC = OD = R \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OAB \cong \triangle OCD \Rightarrow AB = CD$$

(ض ض ض)

مثال:



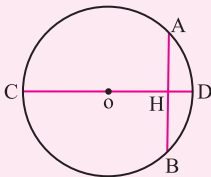
۱. با توجه به شکل مقابل، ثابت کنید قطر CD وتر AB و کمان AB را نصف می‌کند.



پاسخ: از نقطه O به A و B وصل می‌کنیم، کاملاً مشخص است که: $OA = OB = R$. پس نقطه O روی عمودمنصف AB قرار دارد، بنابراین $AH = BH$ خواهد بود. (عمودمنصف، مکان هندسی نقاطی است که از دو سر پاره‌خط به یک فاصله هستند.)

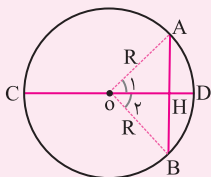
$$\left. \begin{array}{l} AH = BH \\ OH \text{ (مشترک)} \\ OA = OB = R \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OAH \cong \triangle OBH \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \widehat{AD} = \widehat{BD}$$

(ض ض ض)



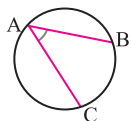
۲. در شکل مقابل، اگر قطر CD وتر AB را نصف کند، ثابت کنید CD بر AB عمود است و کمان AB را نصف می‌کند.

پاسخ: از نقطه O به A و B وصل می‌کنیم، مثلث OAB متساوی‌الساقین است ($OA = OB = R$) و می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین، میانه OH نقش ارتفاع را دارد، بنابراین $OH \perp AB$ و در نهایت $CD \perp AB$ است. از طرفی میانه نقش نیم‌ساز را نیز دارد، یعنی:



$$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \widehat{AD} = \widehat{BD}$$

زاویه محاطی



زاویه‌ای است که رأس آن روی محیط دایره و اضلاع آن دو وتر از دایره هستند.

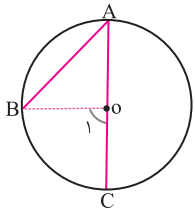
قضیه

ثابت کنید اندازه هر زاویه محاطی، برابر با نصف کمان روبه روی آن است.

اثبات:

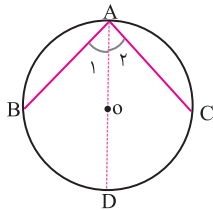
برای اثبات این قضیه، ۳ حالت در نظر می‌گیریم:

الف. یک ضلع زاویه محاطی، قطری از دایره باشد:



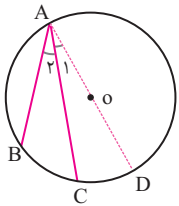
$$\left. \begin{aligned} \widehat{O_1} = \widehat{A} + \widehat{B} \quad (\widehat{O_1} \text{ زاویه خارجی } \triangle OAB) \\ OA = OB = R \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{O_1} = 2\widehat{A} \Rightarrow \widehat{A} = \frac{\widehat{O_1}}{2} \left. \vphantom{\begin{aligned} \widehat{O_1} = \widehat{A} + \widehat{B} \\ OA = OB = R \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} \end{aligned}} \right\} \Rightarrow \widehat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

ب. دو ضلع زاویه محاطی در دو طرف مرکز دایره قرار گیرند:



$$\left. \begin{aligned} \widehat{A_1} = \frac{\widehat{BD}}{2} \\ \widehat{A_2} = \frac{\widehat{DC}}{2} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(+)} \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \frac{\widehat{BD}}{2} + \frac{\widehat{DC}}{2} \Rightarrow \widehat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

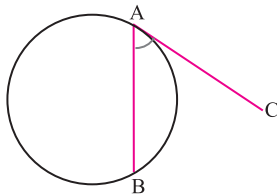
پ. دو ضلع زاویه محاطی در یک طرف مرکز دایره قرار گیرند:



$$\left. \begin{aligned} \widehat{A} = \frac{\widehat{BD}}{2} \\ \widehat{A_1} = \frac{\widehat{DC}}{2} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(-)} \widehat{A} - \widehat{A_1} = \frac{\widehat{BD}}{2} - \frac{\widehat{DC}}{2} \Rightarrow \widehat{A_2} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

زاویه ظلی

زاویه‌ای است که رأس آن روی محیط دایره قرار دارد، یک ضلع آن وتر و دیگری بر دایره مماس است، مانند: \widehat{BAC} .



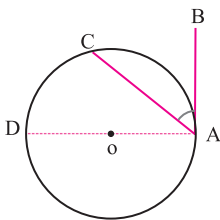
قضیه

اندازه هر زاویه ظلی برابر با نصف کمان روبه روی آن است.

اثبات:

برای اثبات این قضیه، دو حالت در نظر می‌گیریم:

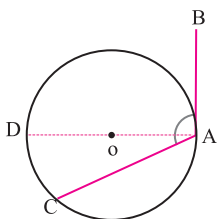
الف. حالتی که زاویه ظلی حاده باشد: از نقطه A به مرکز دایره وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه D قطع کند.



$$\widehat{DAB} = 90^\circ \quad (\text{شعاع در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.}) \Rightarrow \widehat{DAB} = \frac{\widehat{AD}}{2}$$

$$\widehat{DAB} = \widehat{DAC} + \widehat{CAB} \Rightarrow \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{\widehat{DC}}{2} + \widehat{CAB} \Rightarrow \widehat{CAB} = \frac{\widehat{AD}}{2} - \frac{\widehat{DC}}{2} = \frac{\widehat{AC}}{2}$$

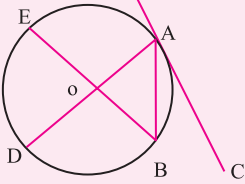
ب. حالتی که زاویه ظلی منفرجه باشد: دوباره از نقطه A به مرکز دایره وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه D قطع کند.



$$\widehat{CAB} = \widehat{CAD} + \widehat{DAB} \Rightarrow \widehat{CAB} = \frac{\widehat{CD}}{2} + \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{\widehat{AC}}{2}$$

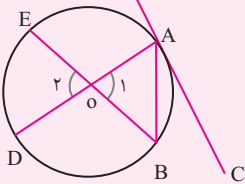
مثال:

۱. در شکل مقابل، اگر $\widehat{BAC} = 60^\circ$ باشد، کمان \widehat{DE} چند درجه است؟



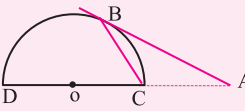
$$\widehat{BAC} = 60^\circ \Rightarrow \frac{\widehat{AB}}{2} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 120^\circ$$

پاسخ:

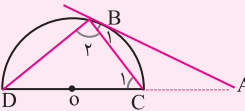


$$\left. \begin{array}{l} \widehat{O_1} = \widehat{AB} \\ \text{از طرفی: } \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \\ \text{و } \widehat{O_2} = \widehat{DE} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{DE} \Rightarrow \widehat{DE} = 120^\circ$$

۲. در شکل مقابل، AB بر نیم‌دایره مماس است و $AC = BC$ می‌باشد. زاویه \widehat{A} را به دست آورید.



پاسخ: از نقطه B به D وصل می‌کنیم، داریم:



$$\left. \begin{array}{l} AC = BC \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{A} \quad (1) \\ (\widehat{C_1} = \widehat{B_1} + \widehat{A}) \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{C_1} = 2\widehat{A}$$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{B_1} = \frac{\widehat{BC}}{2} \quad (\text{زاویه ظلی}) \\ \widehat{D} = \frac{\widehat{BC}}{2} \quad (\text{زاویه محاطی}) \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{D} = \widehat{B_1} \xrightarrow{(1)} \widehat{D} = \widehat{A}$$

از طرفی:

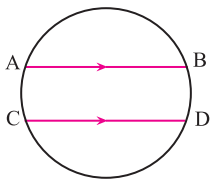
$$\widehat{B_2} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{D} + \widehat{C_1} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{A} + 2\widehat{A} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 30^\circ$$

زاویه $\widehat{B_2}$ مقابل به قطر نیم‌دایره است، بنابراین:

قضیه

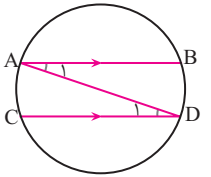
ثابت کنید در هر دایره، کمان‌های محصور بین دو وتر موازی باهم برابرند.

اثبات:



$$\text{فرض: } AB \parallel CD \quad \text{حکم: } \widehat{AC} = \widehat{BD}$$

از نقطه A به D وصل می‌کنیم، داریم:



$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD \\ (\text{خط مورب AD}) \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{D_1} \Rightarrow \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{AC}$$

توجه: عکس مسئله بالا درست نیست، یعنی ممکن است $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ باشد، اما دو

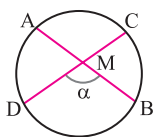
وتر موازی نباشند.

در ادامه به بررسی دو قضیه جالب و کاربردی در دایره می‌پردازیم که کمک بسیار شایانی در به دست آوردن زاویه بین وترها می‌کنند.

قضیه ۱

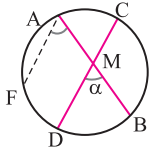
اندازه زاویه‌ای که از برخورد دو وتر در یک دایره ایجاد می‌شود، برابر نصف مجموع اندازه دو کمانی

از دایره است که به ضلع‌ها و امتداد ضلع‌های آن زاویه محدود می‌شود.

$$\alpha = \frac{\widehat{AC} + \widehat{DB}}{2}$$


اثبات:

از نقطه A خطی به موازات وتر CD رسم کرده تا دایره را در نقطه F قطع کند، داریم:



$$\left. \begin{array}{l} AF \parallel CD \\ (AB \text{ خط مورب}) \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{DMB} = \widehat{FAM} \xrightarrow{\text{زاویه محاطی}} \widehat{DMB} = \frac{1}{2} \widehat{FB} = \frac{1}{2} (\widehat{FD} + \widehat{DB})$$

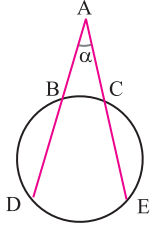
$$\text{از طرفی: } AF \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{FD} \Rightarrow \widehat{DMB} = \alpha = \frac{1}{2} (\widehat{AC} + \widehat{DB})$$

قضیه ۲

اندازه زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر از یک دایره پدید می‌آید، برابر با نصف قدرمطلق تفاضل

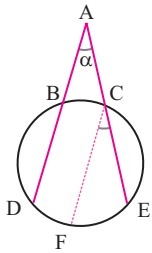
اندازه کمان‌هایی از آن دایره است که به ضلع‌های آن زاویه محدودند.

$$\alpha = \frac{1}{2} |\widehat{DE} - \widehat{BC}|$$



اثبات:

از نقطه C خطی موازی با وتر BD رسم کرده تا دایره را در نقطه F قطع کند، داریم:

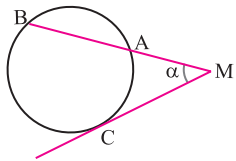


$$\left. \begin{array}{l} AD \parallel CF \\ (AE \text{ خط مورب}) \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{DAE} = \widehat{FCE} \xrightarrow{\text{زاویه محاطی}} \widehat{DAE} = \frac{1}{2} \widehat{FE} = \frac{1}{2} (\widehat{DE} - \widehat{DF})$$

$$\text{از طرفی: } BD \parallel CF \Rightarrow \widehat{DF} = \widehat{BC} \Rightarrow \widehat{DAE} = \frac{1}{2} (\widehat{DE} - \widehat{BC})$$

دو حالت خاص

اگر یک یا هر دو وتر دایره در قضیه ۲، به مماس تبدیل شوند، دو حالت خاص ایجاد می‌شود که عبارت‌اند از:

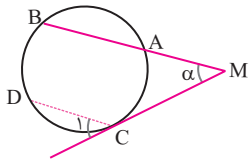


$$\hat{\alpha} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AC}}{2}$$

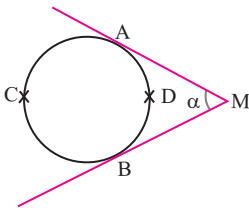
الف.

اثبات:

از نقطه C به موازات وتر AB رسم کرده تا دایره را در نقطه D قطع کند، داریم:



$$\widehat{BMC} = \hat{C}_1 \Rightarrow \widehat{BMC} = \frac{\widehat{DC}}{2} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{BD}}{2} \Rightarrow \widehat{BMC} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AC}}{2}$$

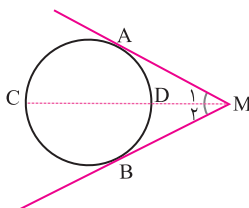


$$\hat{\alpha} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2}$$

ب.

اثبات:

از نقطه M به C وصل می‌کنیم، طبق رابطه قسمت (الف) داریم:

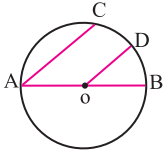


$$\left. \begin{array}{l} \widehat{M}_1 = \frac{\widehat{AC} - \widehat{AD}}{2} \\ \widehat{M}_2 = \frac{\widehat{BC} - \widehat{BD}}{2} \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} \widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = \frac{(\widehat{AC} + \widehat{BC}) - (\widehat{AD} + \widehat{BD})}{2} \Rightarrow \widehat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2}$$

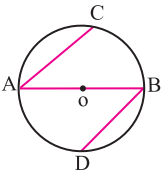
تمرین‌های امتحانی

۱. زاویهٔ مربوط به قطاعی با مساحت $\frac{37}{5}$ سانتی‌مترمربع از دایره به شعاع $\frac{5}{5}$ دسی‌متر چه قدر است؟

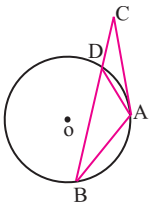
۲. خط xy در نقطهٔ A بر دایره مماس است، وتر BC را موازی xy رسم کرده‌ایم. ثابت کنید: $\widehat{AB} = \widehat{AC}$.



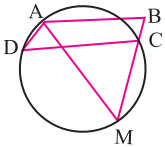
۳. با توجه به شکل مقابل، اگر $\widehat{CD} = \widehat{DB}$ ، آن‌گاه نشان دهید که $AC \parallel OD$ می‌باشد. (O مرکز دایره)



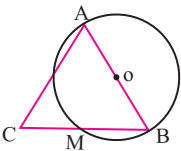
۴. در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی‌اند. ثابت کنید: $AC = BD$.



۵. در شکل مقابل، مماس AC و وتر AB با یکدیگر مساوی‌اند. ثابت کنید مثلث ADC متساوی‌الساقین است.

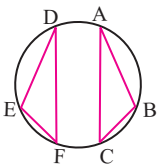


۶. در شکل مقابل، چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است و نقاط M و C روی یک خط راست قرار دارند. ثابت کنید: $AM = AB$.

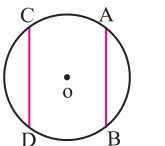


۷. ثابت کنید اگر خطی دو دایرهٔ هم‌مرکز را قطع کند، دو قطعه خطی که بین دو دایره محصور می‌شوند، برابرند.

۸. با توجه به شکل مقابل، اگر $AB = AC$ ، آن‌گاه نشان دهید: $BM = MC$ (O مرکز دایره است).



۹. در شکل مقابل، اگر $DF = AC$ و $EF = BC$ ، ثابت کنید: $DE = AB$.



۱۰. ثابت کنید در هر دایره، وترهای مساوی از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و بالعکس.

۱۱. ثابت کنید از دو وتر نابرابر، آن‌که بزرگ‌تر است به مرکز دایره نزدیک‌تر است و برعکس.

۱۲. در شکل مقابل، O مرکز دایره و زاویهٔ A برابر 56° است. اندازهٔ زاویهٔ \widehat{ABC} را به دست آورید.

