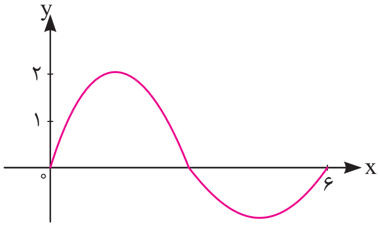
گزینه درست را انتخاب کنید.

۹. **فرض کنید تابع f به ازای هر عدد حقیقی x، نسبت به خطوط $x=۱$ و $x=۳$ متقارن باشد کدام عبارت زیر درست است؟** *(ریاضی ۱۴۰۰-خارج از کشور)*

۱) f تابعی غیر متناوب است.
۲) f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۱ است.
۳) f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۲ است.
۴) f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۴ است.

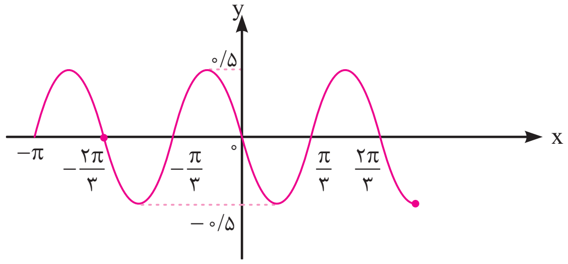
۱۰. **شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار $y=a\sin(b\pi x)$ است $a+b$ کدام است؟** *(ریاضی ۹۳-خارج از کشور)*



۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) $\frac{۵}{۳}$
۳) $\frac{۷}{۳}$
۴) $\frac{۸}{۳}$

پاسخ کامل دهید.

۱۱. **با تعیین مقادیر مینیمم و ماکزیمم و دورهٔ تناوب تابع زیر، ضابطهٔ آن را تعیین کنید.** *(نمونه دولتی نماز ـ میاندوآب)*



۱۲. **تابعی مثلثاتی بنویسید که دارای دورهٔ تناوب و ماکزیمم و مینیمم به صورت زیر باشد:** *(دبیرستان دخترانه هدف تهران ـ دی ۱۴۰۰)*

$$T=\frac{\pi}{۲} \qquad \text{Max}=۴+\pi \quad , \quad \text{Min}=۴-\pi$$

۱۳. **دامنهٔ تابع $y=۴\tan(\frac{۷x-۳\pi}{۲})+۱$ را به دست آورید.** *(دبیرستان فرزانگان فسا ـ دی ۱۴۰۱)*

درس ۲ (معادلات مثلثاتی)

معادلهٔ مثلثاتی: معادله‌ای که در آن اطلاعاتی از نسبت های مثلثاتی یک زاویهٔ مجهول داریم یک معادلهٔ مثلثاتی نام دارد مانند معادلهٔ مثلثاتی $۲\sin x-۱=۰$ و منظور ما از حل معادلهٔ مثلثاتی، پیداکردن تمام زوایایی (مانند $x=\frac{\pi}{۶}$ در معادلهٔ سادهٔ داده شده) است که در معادله صدق می‌کنند.

جواب‌های کلی معادلات مثلثاتی

الف) جواب‌های کلی معادلهٔ سینوسی:

اگر پس از ساده کردن معادلهٔ مثلثاتی به فرم سادهٔ $\sin \underset{\text{یک زاویه مجهول}}{x} = \sin \underset{\text{یک زاویه معلوم}}{\alpha}$ برسیم.

آنگاه تمام جواب‌ها از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\boxed{\begin{matrix} x=۲k\pi+\alpha \\ x=۲k\pi+\pi-\alpha \end{matrix}} \quad (k\in\mathbb{Z})$$

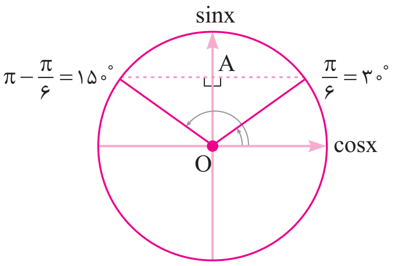
مثال ۴ *جواب‌های کلی معادلهٔ مثلثاتی $۲\sin x-۱=۰$ را بیابید.*

پاسخ: ابتدا مانند حل معادلهٔ درجهٔ اول معمولی، عبارت شامل x را یک طرف نگاه داشته و ضرایب معلوم را به سمت دیگر منتقل می‌کنیم:

$$۲\sin x=۱ \rightarrow \sin x=\frac{۱}{۲}$$

حال مشخص می‌کنیم $\frac{۱}{۲}$ سینوس کدام زاویهٔ اصلی معلوم است؟ می‌دانیم $\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$ حال طبق روابط بالا جواب‌های کلی معادله را می‌نویسیم:

$$\sin x=\sin\frac{\pi}{۶} \rightarrow \begin{cases} x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \\ x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶} \end{cases}$$



توضیحات مهم: برای فهمیدن چرایی روابط کلی باید از دایرهٔ مثلثاتی کمک بگیریم:

اینکه در جواب‌های کلی هم $\frac{\pi}{۶}$ داریم و هم $\pi-\frac{\pi}{۶}$ به خاطر آن است که در یک دایرهٔ مثلثاتی (در بازهٔ $(۰, ۲\pi)$) همواره در دو نقطه، سینوس، مقداری بین ۱- و ۱ پیدا می‌کند (یکی در خود $\hat{\alpha}$ دیگری در $\pi-\hat{\alpha}$)

در مثال فوق، $\sin ۳۰^\circ = \sin ۱۵۰^\circ = OA$ است.

اما علت آوردن $۲k\pi$ (مضرب زوج π) قبل از $\frac{\pi}{۶}$ یا $\pi-\frac{\pi}{۶}$، آن است که ما دنبال یافتن تمام جواب‌ها هستیم و همان‌طور که می‌دانید مثلاً زاویهٔ $۳۹۰^\circ=(۳۶۰^\circ+۳۰^\circ)$ نیز با زاویهٔ ۳۰° هم‌انتهاست و سینوس‌اش برابر $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد.

حالت خاص معادلهٔ سینوسی: اگر سینوسِ x برابر با صفر باشد حالت خلاصه‌تری برای جواب کلی معادله موجود است به صورت زیر:

$\boxed{\sin x=۰\rightarrow x=k\pi}$ $(k\in\mathbb{Z})$

زیرا همان‌طور که می‌دانید سینوس مضرب‌های صحیح π، برابر صفر می‌شود.

ب) جواب های کلی معادلهٔ کسینوسی

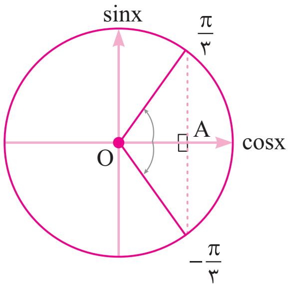
اگر پس از ساده کردن معادلهٔ مثلثاتی به فرم سادهٔ $\cos x=\cos\alpha$ برسیم آنگاه تمام جواب‌ها از روابط زیر پیدا می‌شوند:

$\boxed{\cos x=\cos\alpha\rightarrow x=۲k\pi\pm\alpha}$ $(k\in\mathbb{Z})$

مثال ۵ *معادلهٔ مثلثاتی $۲\cos x-۱=۰$ را حل کرده جواب‌های کلی را مشخص کنید.*

پاسخ:

$$۲\cos x=۱\rightarrow \cos x=\frac{۱}{۲}=\cos\frac{\pi}{۳}\rightarrow \boxed{x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}}$$



باز هم با توجه به دایرهٔ مثلثاتی معلوم می‌شود که مقدار کسینوس α، همواره در دو نقطه، از دایرهٔ مثلثاتی مقداری بین ۱- و ۱+ پیدا می‌کند در این مثال هر دوی $\cos\frac{\pi}{۳}$ و $\cos(-\frac{\pi}{۳})$ برابر با $OA=\frac{۱}{۲}$ هستند. (فلسفهٔ وجود $۲k\pi$ هم که مانند ماجرای سینوس است.)

حالت خاص معادلهٔ کسینوسی: اگر $\cos x=۰$ باشد به جای جواب‌های کلی از رابطهٔ زیر برای یافتن جواب‌ها استفاده می‌کنیم.

$\boxed{\cos x=۰\rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}}$ $(k\in\mathbb{Z})$

زیرا همان طور که می‌دانید کسینوس مضرب‌های فرد $\frac{\pi}{۲}$ برابر صفر می‌شود.

پ) جواب‌های کلی معادلهٔ تانژانتی یا کتانژانتی: اگر پس از ساده کردن معادله مثلثاتی به یکی از فرم‌های سادهٔ $\tan x=\tan\alpha$ یا $\cot x=\cot\alpha$ برسیم، تمام جواب‌های معادله از رابطهٔ زیر پیدا می‌شوند:

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l}\tan x=\tan\alpha\\ \text{یا}\\ \cot x=\cot\alpha\end{array}\right. \Rightarrow x=k\pi+\alpha}\qquad k\in\mathbb{Z}$$

مثال ۶ *معادلهٔ مقابل را حل کنید.* $\tan ۳x=\tan \pi x$ *(تمرین کتاب درسی)*

پاسخ: در این مثال باید کمان یکی از تانژانت‌ها را مجهول و دیگری را معلوم فرض کنیم سپس از جواب کلی استفاده نماییم:

$$۳x=k\pi+\pi x\Rightarrow ۳x-\pi x=k\pi\Rightarrow x(۳-\pi)=k\pi\rightarrow x=\frac{k\pi}{۳-\pi}$$

حالت خاص معادلهٔ تانژانتی یا کتانژانتی: از آنجا که $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ و $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ است حالت‌های خاص $\tan x=۰$ و $\cot x=۰$ در واقع همان حالت‌های خاص $\sin x=۰$ و $\cos x=۰$ هستند یعنی داریم:

$\boxed{\tan x=۰\rightarrow x=k\pi}$ $\boxed{\cot x=۰\rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲}}$

مثال ۷ *معادلهٔ مقابل را حل کنید.* $\tan(۲x-۱)=۰$ *(تمرین کتاب درسی)*

پاسخ:

$$\rightarrow ۲x-۱=k\pi\rightarrow ۲x=k\pi+۱\rightarrow x=\frac{k\pi+۱}{۲}$$

همسان‌سازی: اگر در معادلهٔ مثلثاتی هم نسبت مثلثاتی سینوس و هم نسبت مثلثاتی کسینوس موجود باشند بایستی با استفاده از اتحادها و روابط مثلثاتی که در سال‌های قبل آموختیم آن‌ها را همسان کنیم. (یکی را به دیگری تبدیل کنیم) سپس معادله را حل کنیم.

در این گونه موارد یا از روابط $\boxed{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x}$ و $\boxed{\cos^2 x = 1 - \sin^2 x}$ و $\boxed{\tan x = \frac{1}{\cot x}}$ و $\boxed{\cot x = \frac{1}{\tan x}}$ استفاده می‌کنیم.
یا روابط 2α را به کار می‌بریم:

$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1\\ \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\end{array}}$$

گاهی نیز ناچاریم از روابط متمم استفاده کنیم:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha\\ \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha\end{array}}$$

و

⋮

مثال ۸ معادلات زیر را حل کنید. *(تمرین کتاب درسی)*

الف) $\cos 2x - \sin x + 1 = 1$ ب) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$ پ) $\sin x - \cos 2x = 0$

پاسخ: الف)

$$1 - 2\sin^2 x - \sin x + 1 = 1 \to 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\sin x = t} 2t^2 + t - 1 = 0 \xrightarrow{a + c = b} \begin{cases} t = -1 \to \sin x = -1 \\ t = -\frac{c}{a} = \frac{1}{2} \to \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \text{ یا } x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \ , \ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

ب)

$$1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \to \sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0 \xrightarrow{\times 4} 4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0 \xrightarrow{\sin x = t} 4t^2 + 4t - 3 = 0$$

$$\to (2t + 3)(2t - 1) = 0 \begin{cases} t = -\frac{3}{2} \to \sin x = -\frac{3}{2} \text{ غیرقابل قبول} \\ \text{زیرا } -1 \le \sin x \le 1 \\ t = \frac{1}{2} \to \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\to x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \ , \ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

پ)

$$\sin x = \cos 2x \to \cos \underbrace{2x}_{\text{مجهول}} = \cos\underbrace{(\frac{\pi}{2} - x)}_{\text{معلوم}}$$

$$2x = 2k\pi \pm (\frac{\pi}{2} - x) \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \to x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

۲ سؤالات امتحانی درس دوم

کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام نادرست است؟

۱۴. مقدار عددی عبارت $\cos^2 15 - \sin^2 15$ برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است. *(دبیرستان نمونه دولتی نماز ـ میاندوآب دی ۱۴۰۱)* درست ☐ نادرست ☐

۱۵. در بازهٔ $(0, 2\pi)$ مقدار سینوس همواره در ۲ نقطه ۱ یا ۱- می‌گردد. درست ☐ نادرست ☐

۱۶. معادلهٔ مثلثاتی $\cos x + 1 = 0$ در بازهٔ $(0, 2\pi)$ دو جواب متمایز دارد. درست ☐ نادرست ☐

۱۷. بی‌شمار مثلث با اضلاع ۲ و ۶ واحد می‌توان رسم کرد که مساحت آن‌ها ۳ سانتی‌مترمربع باشد. درست ☐ نادرست ☐