

مثال ۱۶ جدول زیر را کامل کنید:

ردیف	مقدم	تالی	درست	نادرست
۱			☆	
۲				☆
۳	شنبه روز اول هفته است.		☆	
۴	نمونه آماری، زیرمجموعه جامعه آماری است.	$(3+5) \times 2 = 13$		

پاسخ: ردیف ۱) می‌توانیم مقدم را نادرست و تالی را یک گزاره با هر ارزشی انتخاب کنیم، مثلاً: مقدم: «سهراب سپهری را پدر شعر نو می‌نامند» یا « $3 < 5$ » (نادرست)

تالی: «عدد ۱۳۶۵۸۹ یک عدد اول است» یا « $3+2=5$ »

ردیف ۲) باید مقدم درست و تالی نادرست باشد تا ارزش ترکیب نادرست شود، مثلاً:

مقدم: «اعداد طبیعی زیرمجموعه اعداد صحیح هستند» (درست)

تالی: «۱۷ عددی زوج است.» (نادرست)

ردیف ۳) مقدم درست است، پس باید تالی هم درست باشد، مثلاً:

تالی: «۷ یک عدد گویا است.» (درست)

ردیف ۴) مقدم درست و تالی نادرست است، پس ارزش ترکیب نادرست است.

۴. ترکیب دو شرطی

ترکیبی است که در آن دو گزاره همدیگر را نتیجه بدهند.

ترکیب دو شرطی دو گزاره p و q را با علامت « $p \Leftrightarrow q$ » نشان می‌دهیم و می‌خوانیم: « p اگر و تنها اگر q » یا «اگر p آن‌گاه q و برعکس» یا « p شرط لازم و کافی است برای q »

تذکره گزاره دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ همان $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ است.

ارزش ترکیب دو شرطی: ترکیب دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ هنگامی درست است که هر دو گزاره p و q هم‌ارزش باشند.

یعنی هر دو درست و یا هر دو نادرست باشند.

مثال ۱۷ نوع گزاره‌های زیر را مشخص کرده و ارزش‌گذاری کنید.

الف) اگر $\{(1,2), (2,3), (1,-8)\}$ تابع باشد آنگاه ۵ عددی اول نیست.

ب) $\sqrt{3}$ گویا است و $f(x) = 5 + x$ تابعی ثابت است.

ج) ۲۱ عددی اول است اگر و تنها اگر $\{(2,5), (5,3), (2,-1)\}$ تابع نباشد.

د) ۱۸ عددی مرکب است یا ۱۱ عددی اول است.

پاسخ: الف) گزاره شرطی - گزاره اول نادرست است بنابراین به انتهای مقدم ارزش کل «درست» است.

ب) گزاره عطفی - هر دو گزاره نادرست هستند و بنابراین ارزش کل «نادرست» است.

ج) گزاره دو شرطی - گزاره سمت راست نادرست و گزاره سمت چپ درست است. بنابراین ارزش کل «نادرست» است.

د) گزاره فصلی - گزاره اول درست و گزاره دوم نیز درست است. بنابراین ارزش کل «درست» است.

مثال ۱۸ اگر گزاره $p \Rightarrow q$ نادرست باشد ارزش گزاره $p \Leftrightarrow q$ را تعیین کنید.

پاسخ: از نادرست بودن ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ نتیجه می‌گیریم که گزاره p درست و گزاره q نادرست است.

وقتی گزاره p درست باشد $\sim p$ نادرست است پس $\sim p$ و q هر دو نادرست‌اند. بنابراین $p \Leftrightarrow q$ دارای ارزش «درست» است.

مثال ۱۹ ارزش گزاره $\sim q \Rightarrow (\sim(p \Leftrightarrow q) \wedge p)$ ، کدام است؟

۱) همواره درست است. ۲) همواره نادرست است. ۳) به ارزش q بستگی دارد. ۴) به ارزش p بستگی دارد.

(کنکور انسانی - ۱۳۰۰)

(نمونه دولتی - رشته - فردارد ۱۳۰۰)

پاسخ: با رسم جدول ارزشی و انتخاب سر ستون‌های مناسب ارزش گزاره را مشخص می‌کنیم:

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$\sim(p \Leftrightarrow q)$	$\sim(p \Leftrightarrow q) \wedge p$	$\sim q$	$(\sim(p \Leftrightarrow q) \wedge p) \Rightarrow \sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	د
د	ن	ن	د	د	د	د
ن	د	ن	د	ن	ن	د
ن	ن	د	ن	ن	د	د

همه ردیف‌های ستون آخر «درست» است، بنابراین ارزش این گزاره همواره درست است و گزینه «۱» صحیح است.

هم‌ارزی گزاره‌ها

اگر دو گزاره p و q دارای ارزش یکسانی باشند، آن دو گزاره را هم‌ارز می‌نامند و به صورت $p \equiv q$ نشان می‌دهیم. برای نشان دادن درستی یک هم‌ارزی از جدول ارزش گزاره‌ها استفاده می‌کنیم. به این صورت که در یک جدول، ارزش گزاره‌های دو طرف هم‌ارزی را مشخص کرده، با هم مقایسه می‌کنیم. دو طرف هم‌ارزی در همه ردیف‌ها باید دارای ارزش یکسان باشند. مثلاً:

د	د
ن	ن
د	د
د	د

مثال ۲۰: درستی هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید.

الف) $(p \vee q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (\sim p \Rightarrow p)$

ب) $\sim((\sim p \vee p) \vee q) \equiv F$

پاسخ: الف)

p	q	$p \vee q$	$q \Rightarrow p$	سمت چپ	$\sim p$	سمت راست
د	د	د	د	د	ن	د
د	ن	د	د	د	ن	د
ن	د	د	ن	ن	د	ن
ن	ن	ن	د	ن	د	ن

\equiv

ب)

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee p$	$(\sim p \vee p) \vee q$	سمت چپ	سمت راست
د	د	ن	د	د	ن	ن
د	ن	ن	د	د	ن	ن
ن	د	د	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د	ن	ن

\equiv

$(\sim p \Rightarrow q) \equiv \sim(p \vee \sim q)$

مثال ۲۱: درستی هم‌ارزی مقابل را بررسی کنید:

پاسخ:

p	q	$\sim p$	$\sim p \Rightarrow q$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim(p \vee \sim q)$
د	د	ن	د	ن	د	ن
د	ن	ن	د	د	د	ن
ن	د	د	د	ن	ن	د
ن	ن	د	ن	د	د	ن

\equiv

این دو گزاره هم‌ارز نیستند.

قوانین مهم هم‌ارزی گزاره‌ها

$$1. \text{ قانون دمورگان: } \begin{cases} \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \\ \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \end{cases}$$

$$3. \text{ قانون جابجایی: } \begin{cases} p \wedge q \equiv q \wedge p \\ p \vee q \equiv q \vee p \\ p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p \end{cases}$$

$$5. \text{ همواره درست: } \begin{cases} p \Rightarrow p \equiv T \\ p \vee \sim p \equiv T \\ p \leftrightarrow p \equiv T \end{cases}$$

$$7. \text{ تبدیل شرطی به فصلی: } p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

$$2. \text{ قانون جذب: } \begin{cases} p \vee (p \wedge q) \equiv p \\ p \wedge (p \vee q) \equiv p \end{cases}$$

$$4. \text{ قانون عکس نقیض: } (p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

$$6. \text{ همواره نادرست: } p \wedge \sim p \equiv F$$

مثال ۲۲ کدامیک از هم‌ارزی‌های زیر، نادرست است؟

$$(1) p \wedge (p \vee q) \equiv p \quad (2) p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

$$(3) (\sim p \vee q) \equiv (q \Rightarrow p)$$

$$(4) (\sim p \vee q) \equiv (p \Rightarrow q)$$

پاسخ: گزینه ۱ و ۲ قانون جذب هستند. گزاره ۴ قانون تبدیل شرطی به فصلی است. پس این سه گزاره درست هستند و گزینه ۳ نادرست است. اثبات نادرستی گزینه ۳:

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$q \Rightarrow p$
د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	د	ن
ن	ن	د	د	د

≠

نقیض گزاره‌های مرکب

$$1. \text{ نقیض گزاره فصلی: طبق قانون دمورگان: } \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

■ علاوه بر نفی کردن فعل‌ها، ترکیب فصلی را به ترکیب عطفی تبدیل می‌کنیم.

مثال: گزاره: تیرماه ۳۰ روز دارد یا هفته ۷ روز ندارد.

نقیض: تیرماه ۳۰ روز ندارد و هفته ۷ روز دارد.

$$2. \text{ نقیض گزاره عطفی: طبق قانون دمورگان: } \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

■ علاوه بر نفی کردن فعل‌ها، ترکیب عطفی را به ترکیب فصلی تبدیل می‌کنیم.

مثال: گزاره: ۳ عددی فرد است و ۵ عددی اول است.

نقیض: ۳ عددی فرد نیست یا ۵ عددی اول نیست.

$$3. \text{ نقیض گزاره شرطی: طبق قانون: } \sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

■ به ترکیب عطفی تبدیل می‌شود؛ گزاره اول بدون تغییر و گزاره دوم نقیض می‌شود.

مثال: گزاره: اگر تهران پایتخت ایران باشد، آنگاه ۲ عددی گویا نیست.

نقیض: تهران پایتخت ایران است و ۲ عددی گویا است.

$$4. \text{ نقیض گزاره دو شرطی: طبق قانون: } \sim(p \Leftrightarrow q) \equiv (\sim p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Leftrightarrow \sim q)$$

■ همان ترکیب دو شرطی است و فعل گزاره اول یا فعل گزاره دوم را نفی می‌کنیم.

مثال: گزاره: ۴ عددی تک رقمی است، اگر و تنها اگر ۱۲ دو رقمی باشد.

نقیض: ۴ عددی تک رقمی نیست، اگر و تنها اگر ۱۲ دو رقمی باشد.

نقیض: ۴ عددی تک رقمی است، اگر و تنها اگر ۱۲ دو رقمی نباشد.

(کنکور انسانی - ۱۳۹۸)

(ب) ۶ عددی زوج یا اول است.

$$\text{الف) } (\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W}) \wedge (3 \in \mathbb{Z})$$

(پ) اگر ۲ عددی اول باشد آنگاه $\sqrt{5}$ گویا است.

پاسخ: الف) $(\mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{W}) \vee (3 \notin \mathbb{Z})$

(عطفی تبدیل به فصلی و هر دو گزاره نفی می‌شوند)

(ب) ۶ عددی زوج نیست و عددی اول نیست.

(فصلی تبدیل به عطفی و هر دو گزاره نفی می‌شوند)

(پ) ۲ عددی اول است و $\sqrt{5}$ گویا نیست.

(شرطی تبدیل به عطفی و فقط گزاره دوم نفی می‌شود.)

کلمه

در ترکیب شرطی $(p \Rightarrow q)$ یا دو شرطی $(p \Leftrightarrow q)$ گاهی تک تک جمله‌ها گزاره نیستند (یعنی درستی آن‌ها را نمی‌توانیم به طور مستقل بررسی کنیم) برای ارزش‌گذاری چنین گزاره‌هایی، ارزش p را درست در نظر می‌گیریم، سپس با فرض درستی p ارزش گزاره q را بررسی می‌کنیم (و بالعکس) تا درستی و نادرستی آن معلوم شود.

ارزش گزاره زیر را مشخص کنید.

یک چهارضلعی مربع است، اگر و تنها اگر آن چهارضلعی مستطیل باشد.

پاسخ: ارزش تک تک این جمله‌ها مشخص نیست. باید ارزش رفت و برگشت را مشخص کنیم:

$(p \Rightarrow q)$ اگر یک چهارضلعی مربع باشد آنگاه مستطیل است.

چون هر مربعی مستطیل است (ویژگی مستطیل را دارد) بنابراین این گزاره درست است.

$(q \Rightarrow p)$ اگر یک چهارضلعی مستطیل باشد آنگاه مربع است.

چون هر مستطیل مربع نیست، بنابراین این گزاره نادرست است.

ارزش گزاره دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ برابر با ارزش $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ است. از آنجا که ارزش گزاره اول «درست» و گزاره دوم «نادرست» شد، بنابراین ارزش کل «نادرست» است.

سوالات امتحانی درس اول

۱

۱.	<p>جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.</p> <p>الف) گزاره $(p \vee q) \sim$ بنا به قانون دموورگان با گزاره هم‌ارز است.</p> <p>ب) ارزش ترکیب فصلی هر گزاره با نقیض خودش است.</p> <p>پ) نقیض عبارت $x < 5$ به صورت است.</p> <p>ت) در ترکیب شرطی دو گزاره p, q، $p \Rightarrow q$ و q می‌گویند.</p> <p>ث) گزاره $p \Rightarrow \sim q$ را گزاره $p \Rightarrow q$ می‌نامیم.</p> <p>ج) گزاره دو شرطی فقط زمانی دارای ارزش نادرست هست که دو گزاره نباشند.</p> <p>چ) ترکیب تنها در صورتی نادرست است که هر دو گزاره باشد.</p> <p>ح) قانون $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ به قانون مشهور است.</p>
۲.	<p>درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) نقیض جمله «a عددی مثبت است» می‌شود: «a عددی منفی است.»</p> <p>ب) عبارت «$(-1)^n$ عددی همواره مثبت است. $(n \in \mathbb{N})$» یک گزاره است.</p> <p>پ) ارزش گزاره دو شرطی وقتی درست است که هر دو هم‌ارزش باشند.</p> <p>ت) یک گزاره شرطی زمانی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد.</p> <p>ث) اگر عدد ۲۰ مضرب ۵ باشد، آنگاه $\sqrt{9}$ مربع کامل است، دارای ارزش درست است.</p> <p>ج) جدول ارزشی $(q \Rightarrow p) \vee (\sim p \Rightarrow q)$ دارای ۸ ردیف است.</p>

- درست نادرست
- درست نادرست
- درست نادرست
- درست نادرست
- درست نادرست
- درست نادرست

۳. در هر مورد گزینه درست را انتخاب کنید. (با ذکر دلیل)

الف) کدام یک از جملات زیر گزاره نیست؟

- (۱) درس ریاضی از ادبیات آسان تر است.
 (۳) ایران در قاره آسیا قرار ندارد.

ب) کدام گزینه، گزاره با ارزش درست است؟

- (۱) عدد ۵ اول است و ۶ مربع کامل نیست.
 (۳) $-5 + 5 \times 2 = 0$

(غیر انتفاعی - تهریز - دی ۱۳۹۹)

- (۲) تهران پایتخت ایران است.
 (۴) جذر عدد ۴ از ثلث عدد ۳۰ بزرگ تر است.

(غیر انتفاعی - تهران - فرورداد ۱۴۰۱)

- (۲) اگر ۴ عددی زوج باشد آنگاه عدد ۲ فرد است.
 (۴) درس ریاضی از درس فیزیک آسان تر است.

پ) اگر گزاره $(p \vee (\sim q \wedge \sim p)) \sim r$ درست باشد و $\sim r$ نیز نادرست باشد، گزاره $p \vee (q \wedge r)$ با کدام گزاره هم ارز است؟ (علامه هلی - تهران - دی ۱۴۰۰)

- (۱) p (۲) q (۳) F (۴) T

(فرهنگ - تهران - فرورداد ۱۴۰۱)

ت) در جای خالی، کدام گزاره قرار گیرد تا ارزش کلی گزاره، نادرست شود؟

(.....) \Leftrightarrow (سهمی $y = x^2 - x - 4$ محور x ها را در یک نقطه قطع می کند.)

- (۱) مدت زمان مکالمه تلفنی، متغیر کمی فاصله ای است.
 (۲) هر عدد اول، فرد هم هست.

- (۳) هر عدد طبیعی، گویا هم است.
 (۴) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = 2 - \sqrt{5}$

(نمونه دولتی - ایلام - دی ۱۴۰۰)

۴. جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	اگر دو عدد فرد باشند مجموع آن ها زوج است و برعکس		
۲	سعدی نویسنده است یا	✓	
۳	اگر ۷ عدد زوج است آنگاه		✓
۴	سال ۱۲ ماه دارد و ۵۷ عدد اول است.		

۵. جدول زیر را کامل کنید.

گزاره p	ارزش p	گزاره $\sim p$	ارزش $\sim p$
مربع هر عدد حقیقی منفی، عددی مثبت است.			
		$-18 \geq -28$	

۶. الف) عکس و نقیض گزاره فوق
 ب) نقیض گزاره فوق
 با توجه به گزاره «اگر ویروس آمیکرون مهار نشود آنگاه امتحانات پایانی مجازی برگزار می شود» مطلوبست:

(فرهنگ تهران - دی ۱۳۹۹)

۷. عکس گزاره «الف» و عکس نقیض گزاره «ب» را بنویسید.
 الف) اگر واریانس داده ها برابر صفر باشد، آنگاه داده ها با یکدیگر مساوی اند.
 ب) اگر چهارضلعی مربع باشد، آنگاه قطرهایش بر هم عمودند.

۸. برای هر مورد یک مثال بنویسید:
 الف) گزاره دو شرطی که یکی درست و دیگری نادرست باشد.
 ب) جمله ای که گزاره نباشد.
 پ) ترکیب فصلی نادرست
 ت) گزاره شرطی که به انتغای مقدم درست باشد.

۹. پاسخ کوتاه دهید.
 الف) نقیض گزاره « $5 > 3 + 1$ » را بنویسید.
 ب) طرف دوم هم ارزی را بنویسید: $\sim (\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}) \equiv \dots\dots\dots$
 پ) گزاره مرکب رو به رو را به شکلی کامل کنید که ارزش کلی آن درست باشد: یا شاهنامه به زبان عربی سروده شده است.
 ت) ارزش گزاره «این درست نیست که: $4 + 5 = 10$ اگر و فقط اگر $10 = 10 + 10$ » را مشخص کنید.
 ث) تعداد حالت های جدول ارزش سه گزاره چند تاست؟
 ج) کاربرد منطق در چیست؟