گاج

ویرایش جدید

منطبق بر «امتحان نهایی»

«خرداد ۱۴۰۴»

فرمول بیست

هندسه ۱

پایه دهم

رشته ریاضی و فیزیک

مؤلّف

محمدطاهر شعاعی

فرمول بیست

۴۰	۳۱۰	۴
صفحه درسنامه	پرسش تشریحی	نمونه امتحانی

+۴

ساعت
فیلم
آموزشی
ویژه
شب
امتحان

9 786220 308300
تهران، میدان انقلاب
نبش بازارچه کتاب
www.gajmarket.com

پیشگفتار

ن و القلم و ما یسطرون

کتاب پیش‌رو از مجموعه کتاب‌های فرمول بیست می‌باشد.

هدف اصلی این مجموعه کتاب، ارائه آموزش‌های کامل همراه با مثال‌ها و تمرینات متنوع بر پایه کتاب درسی و در جهت تسلط و آمادگی برای امتحانات می‌باشد.

در این کتاب...

۱. تمام مطالب کتاب تو درس‌نامه‌ها پوشش داده شده، پس درس‌نامه‌ها رو خوب بخون و تمام مثال‌هاش رو حل کن.

۲. تمام تمرینات کتاب درسی مشابه‌سازی شده و امکان نداره سؤالی در امتحان مطرح بشه که خودش یا مشابهش رو در این کتاب ندیده باشید.

۳. چند دوره امتحان تألیفی و نهایی در آخر کتاب براتون آوردیم که بتونید سؤالارو به صورت ترکیبی و یک‌جا ببینید.

۴. برای جمع‌بندی و دوره کردن مطالب در شبِ امتحان، به فیلم‌های آموزشی ویژهٔ شب امتحان که QR-code آن در ابتدای هر فصل اومده، مراجعه کن.

محمدطاهر شعاعی

فهرست

امتحان نهایی

بارم‌بندی درس هندسه ۱

شماره فصل	نوبت اول	نوبت دوم
اول	۹	۳
دوم	۱۱	۷
سوم	-	۶
چهارم	-	۴
جمع	۲۰	۲۰

۱ بخش

درسنامه

و سؤالات تشریحی

فصل اول

ترسیم‌های هندسی و استدلال ۱

فصل اول هندسه (۱) در امتحان نوبت اول ۹ نمره و در امتحان نوبت دوم و شهریور ۳ نمره دارد.

فیلم شب امتحان

فصل ۱

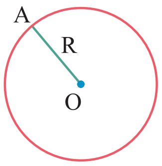
برای استفاده از فیلم آموزشی شب امتحان این فصل QR-code مقابل را اسکن کنید.

بستهٔ اول

ترسیم‌های هندسی

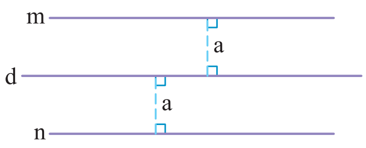
صفحه ۱۰ تا ۱۶ کتاب درسی

دایره



مجموعهٔ همهٔ نقاطی در صفحه که از یک نقطهٔ ثابت مانند O (در همان صفحه)، به فاصلهٔ معلومی مانند R قرار دارند، دایره گفته می‌شود. O را مرکز و R را شعاع دایره می‌نامند.

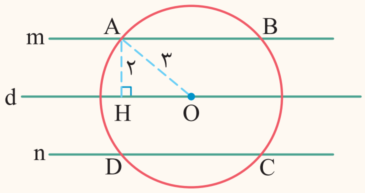
مجموعه نقاطی که از یک خط معلوم به فاصلهٔ ثابتی هستند



همهٔ نقطه‌هایی که از خط معلوم d به فاصلهٔ ثابت a واقع‌اند، دو خط موازی (خط‌های m و n) و به فاصلهٔ a از خط d هستند.

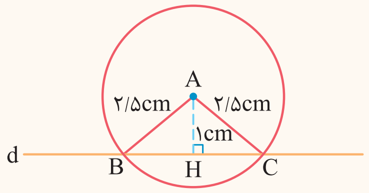
سؤال نقطهٔ O روی خط d واقع است. همهٔ نقاطی را تعیین کنید که از نقطهٔ O به فاصلهٔ ۳ واحد و از خط d به فاصلهٔ ۲ واحد هستند.

پاسخ همهٔ نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۲ واحد قرار دارند روی دو خط m و n و موازی با خط d و به فاصلهٔ ۲ واحد از آن واقع‌اند. از طرفی همهٔ نقاطی که از نقطهٔ O به فاصلهٔ ۳ هستند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۳ است. مطابق شکل این دایره و خط‌های m و n در چهار نقطهٔ A، B، C و D متقاطع‌اند که جواب هستند.

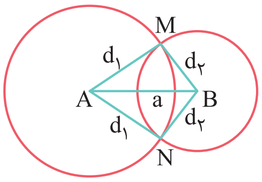


سؤال نقطهٔ A به فاصلهٔ ۱ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. نقاطی از خط d را بیابید که به فاصلهٔ ۲/۵ سانتی‌متر از نقطهٔ A باشند.

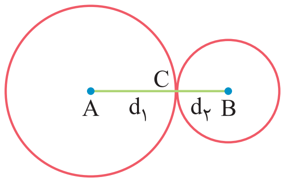
پاسخ همهٔ نقاطی که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۲/۵ سانتی‌متر قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲/۵ سانتی‌متر قرار دارند. چون فاصلهٔ A از خط d برابر یک سانتی‌متر است، پس این دایره خط d را در دو نقطهٔ B و C قطع می‌کند و این نقاط جواب‌اند.



تعیین نقطه‌ای که از دو نقطهٔ ثابت به فاصله‌های معلوم باشد



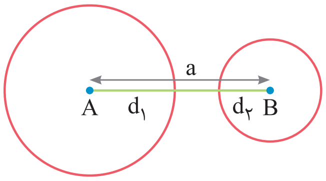
فرض کنیم A و B دو نقطهٔ ثابت به فاصلهٔ a از یکدیگر باشند. برای یافتن نقطه‌ای که از A به فاصلهٔ d_1 و از B به فاصلهٔ d_2 باشد، دو دایره یکی به مرکز A و شعاع d_1 و دیگری به مرکز B و شعاع d_2 رسم می‌کنیم، نقطه یا نقاط تلاقی دو دایره جواب است.



آ) اگر $d_1 + d_2 > a$ باشد، آن‌گاه مطابق شکل فوق، دو دایره در نقاط M و N متقاطع‌اند و مسأله دو جواب دارد.

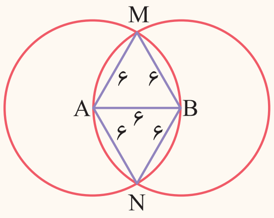
ب) اگر $d_1 + d_2 = a$ باشد، آن‌گاه دو دایره در نقطهٔ C مماس می‌شوند و این نقطه جواب است.

پ) اگر $d_1 + d_2 < a$ باشد، آن‌گاه دو دایره یکدیگر را قطع نمی‌کنند و مسأله جواب ندارد.



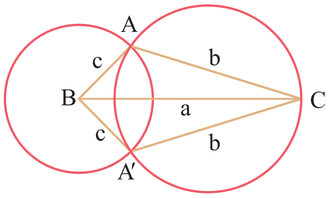
سؤال **دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۶ سانتی‌متر مفروض هستند. نقاطی را بیابید که از دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۶ سانتی‌متر باشند.**

پاسخ دایره‌هایی به مرکز A و B و شعاع‌های ۶ رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی آن‌ها یعنی M و N جواب هستند.



رسم مثلثی که سه ضلع آن معلوم است

ابتدا یکی از سه ضلع داده شده (مثلاً بزرگ‌ترین ضلع) را رسم می‌کنیم $(BC = a)$، سپس به مرکز B و شعاع c و به مرکز C و شعاع b دو دایره رسم می‌کنیم. در صورت تقاطع دو دایره، جای رأس سوم مثلث یعنی نقطهٔ A یا A' معلوم می‌شود.

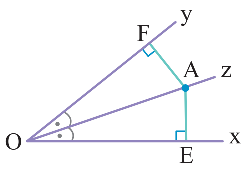


آ) اگر دو دایره متقاطع باشند، مسئله دو جواب هم‌نهشت دارد. مثلث‌های ABC و $A'BC$ که با یکدیگر به حالت (ض‌ض‌ض) هم‌نهشت‌اند. بنا به قرارداد، این دو مثلث، یک جواب محسوب می‌شوند.

ب) اگر دو دایره مماس باشند، در این صورت مسئله جواب ندارد.

پ) اگر دو دایره متقاطع نباشند، در این‌صورت مسئله جواب ندارد.

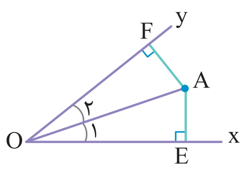
نیمساز یک زاویه



آ) اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه باشد، فاصلهٔ نقطه از دو ضلع آن زاویه یکسان است، یعنی در شکل مقابل داریم:

$$AE = AF$$

ب) عکس خاصیت قبل نیز درست است، یعنی اگر نقطه‌ای درون یک زاویه به فاصلهٔ یکسان از دو ضلع آن باشد، آن‌گاه نقطه روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. یعنی در شکل زیر با فرض $AE = AF$، داریم: $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$



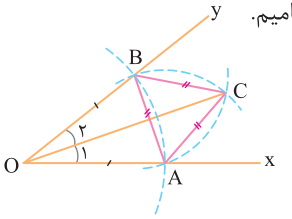
رسم نیمساز یک زاویه

زاویهٔ xOy مفروض است. می‌خواهیم نیمساز آن را رسم کنیم.

آ) نقطهٔ A را روی نیم‌خط Ox در نظر می‌گیریم، کمانی به مرکز O و شعاع OA رسم می‌کنیم تا نیم‌خط Oy را در نقطهٔ B قطع کند، داریم $OA = OB$

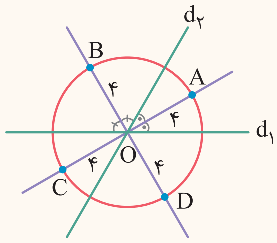
ب) به مرکز A و شعاع AB و بار دیگر به مرکز B و شعاع AB دو کمان رسم می‌کنیم، یک نقطهٔ تلاقی این دو کمان را C می‌نامیم.

پ) OC نیمساز زاویهٔ xOy است، زیرا دو مثلث OBC و OAC به حالت (ض‌ض‌ض) هم‌نهشت‌اند، پس $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$



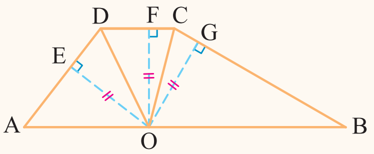
سؤال دو خط متقاطع d_1 و d_2 مفروضند. نقاطی را بیابید که از نقطهٔ تقاطع دو خط به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر باشد و از هریک از دو خط d_1 و d_2 به یک فاصله باشد.

پاسخ نقطه‌ای که از دو خط متقاطع d_1 و d_2 به یک فاصله قرار دارد، روی نیمساز زوایای ایجاد شده بین دو خط قرار دارد. از طرفی نقطه‌ای که از نقطهٔ O (محل تلاقی دو خط) به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر است، روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۴ سانتی‌متر قرار دارد، پس محل تلاقی این دایره با نیمسازها جواب است. یعنی نقاط A ، B ، C و D



سؤال اندازه‌های دو ساق یک ذوزنقه ۳ و ۵ و اندازهٔ قاعدهٔ کوچک آن ۲ است. نقطه‌ای روی قاعدهٔ بزرگ آن از دو ساق و قاعدهٔ کوچک به یک فاصله است. محیط ذوزنقه را به‌دست آورید.

پاسخ بنا به فرض $OG = OE = OF$ ، لذا نقطهٔ O از دو ضلع زاویهٔ ADC به یک فاصله و در نتیجه O روی نیمساز این زاویه است. هم‌چنین O روی نیمساز زاویهٔ DCB است. در نتیجه:



$$\left.\begin{array}{r} AB \parallel CD\ ,\ \text{مورب}\ OD \Rightarrow A\hat{O}D = O\hat{D}C \\ O\hat{D}C = O\hat{D}A \end{array}\right\} \Rightarrow O\hat{D}A = A\hat{O}D \Rightarrow OA = AD$$

با استدلال مشابه داریم $OB = BC$ ، پس $AB = OA + OB = AD + BC$ ، در نتیجه:

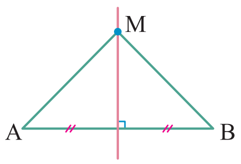
$$\text{محیط } ABCD = AB + AD + CD + BC = \underbrace{AD + BC}_{AB} + AD + CD + BC = ۳ + ۵ + ۳ + ۲ + ۵ = ۱۸$$

عمودمنصف یک پاره‌خط

خطی که از نقطهٔ وسط یک پاره‌خط برآن عمود می‌شود، **عمود منصف آن پاره‌خط** نامیده می‌شود.

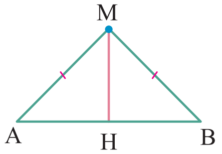
آ) اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره‌خط قرار داشته باشد، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.

یعنی در شکل مقابل داریم $MA = MB$

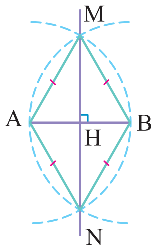


ب) اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

جهت اثبات آن، کافی است M را به H وسط AB وصل کنیم و ثابت کنیم $MH \perp AB$



رسم عمودمنصف یک پاره‌خط



پاره‌خط AB مفروض است.

آ) کمانی به مرکز A و شعاع AB رسم می‌کنیم.

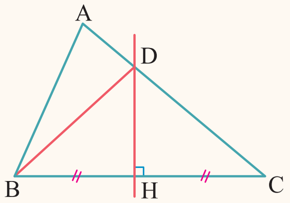
ب) کمانی به مرکز B و شعاع AB رسم می‌کنیم.

پ) نقاط تلاقی این دو کمان را M و N می‌نامیم.

ت) خط MN عمودمنصف پاره‌خط AB است، زیرا M و N از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله‌اند.

سؤال **در مثلث ABC، عمودمنصف ضلع BC، ضلع AC را در نقطهٔ D قطع می‌کند. ثابت کنید اختلاف محیط‌های دو مثلث ABC و ABD برابر طول ضلع BC است.**

پاسخ مطابق شکل مقابل، عمود منصف ضلع BC، ضلع AC را در نقطهٔ D قطع کرده است، پس $BD = CD$ و در نتیجه $AC = AD + CD = AD + BD$ است و داریم:

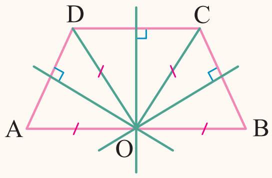


$$\text{محیط}\ \overset{\Delta}{ABD} = AB + \underbrace{BD + AD} = AB + AC$$

$$(\text{محیط}\ \overset{\Delta}{ABC}) - (\text{محیط}\ \overset{\Delta}{ABD}) = (AB + AC + BC) - (AB + AC) = BC$$

سؤال **در یک ذوزنقه، عمود منصف‌های ساق‌ها و قاعدهٔ کوچک، روی قاعدهٔ بزرگ متقاطع‌اند. ثابت کنید ذوزنقه، متساوی‌الساقین است.**

پاسخ مطابق شکل، عمودمنصف‌های ساق‌های AD و BC و قاعدهٔ کوچک CD در نقطهٔ O روی قاعدهٔ بزرگ متقاطع‌اند، پس داریم:



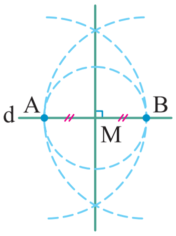
$$OB = OC = OD = OA$$

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD,\ \text{مورب}\ OC \Rightarrow O\hat{C}D = B\hat{O}C \\ AB \parallel CD,\ \text{مورب}\ OD \Rightarrow A\hat{O}D = O\hat{D}C \\ OC = OD \Rightarrow O\hat{C}D = O\hat{D}C \end{array}\right\} \Rightarrow A\hat{O}D = B\hat{O}C$$

$$\left.\begin{array}{l} OB = OA \\ B\hat{O}C = A\hat{O}D \\ OC = OD \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\Delta}{BOC} \cong \overset{\Delta}{AOD} \Rightarrow AD = BC$$

پس ذوزنقهٔ ABCD متساوی‌الساقین است.

رسم خط عمود بر یک خط داده شده از یک نقطه روی آن خط



خط d و نقطهٔ M روی آن مفروض است.

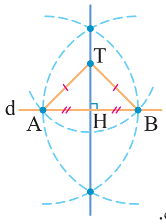
آ) نقطهٔ A متمایز از نقطهٔ M را روی خط در نظر می‌گیریم.

ب) به مرکز M و شعاع MA، دایره‌ای رسم می‌کنیم، محل تلاقی دیگر دایره با خط d را، نقطهٔ B می‌نامیم.

پ) عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم.

ت) این عمودمنصف خطی است که از نقطهٔ M می‌گذرد و بر خط d عمود است.

رسم خط عمود بر یک خط داده شده از یک نقطه غیر واقع بر آن خط



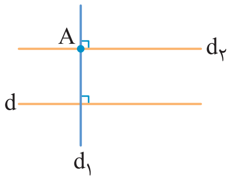
خط d و نقطهٔ T غیرواقع بر آن، مفروض است.

آ) نقطهٔ A را روی خط d در نظر می‌گیریم، اگر TA بر خط d عمود باشد، خط TA جواب است. در غیر این صورت:

ب) به مرکز T و شعاع TA، کمانی رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی دیگر آن را با خط d، B می‌نامیم.

پ) عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم، این عمودمنصف، همان خطی است که از نقطهٔ T می‌گذرد (زیرا $TA = TB$) و بر خط d عمود است.

رسم خط موازی با یک خط داده‌شده از نقطه‌ای غیر واقع بر آن



خط d و نقطهٔ A خارج آن داده شده است.

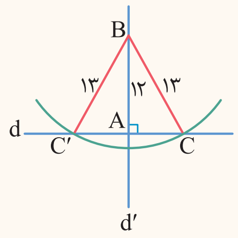
آ) از نقطهٔ A خط d_1 را عمود بر خط d رسم می‌کنیم.

ب) در نقطهٔ A خط d_2 را عمود بر خط d_1 رسم می‌کنیم.

پ) دو خط عمود بر یک خط موازیند، لذا خط d_2 از نقطهٔ A گذشته و موازی خط d است.

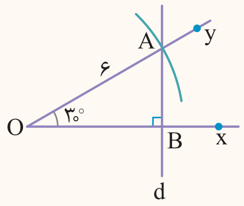
سؤال مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که وتر و یک ضلع آن به‌ترتیب ۱۳ و ۱۲ باشند.

پاسخ خط d را در نظر می‌گیریم. در نقطهٔ A روی آن، خط d' را عمود بر d رسم می‌کنیم و روی آن پاره‌خط AB را به اندازهٔ ۱۲ جدا می‌کنیم و به مرکز B و شعاع ۱۳ کمانی رسم می‌کنیم و نقاط تلاقی آن با خط d را C و C' می‌نامیم. دو مثلث هم‌نهشت ABC و ABC' جواب هستند.



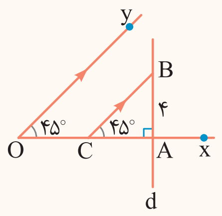
سؤال مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که اندازهٔ وتر آن ۶ و اندازهٔ یک زاویهٔ حادهٔ آن 30° باشد.

پاسخ ابتدا زاویهٔ xOy را به اندازهٔ 30° رسم می‌کنیم، سپس به مرکز O و شعاع ۶ کمانی رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن با نیم‌خط Oy را A می‌نامیم. از نقطهٔ A خط d را عمود بر نیم‌خط Ox رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن با Ox را B می‌نامیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB جواب است.



سؤال مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که اندازهٔ یک ضلع آن ۴ و اندازهٔ زاویهٔ روبه‌رو به آن ضلع، ۴۵ درجه باشد.

پاسخ ابتدا زاویهٔ xOy به اندازهٔ 45° را رسم می‌کنیم، سپس نقطهٔ دلخواه A را روی Ox در نظر می‌گیریم و در این نقطه خط d را عمود بر Ox رسم می‌کنیم. حال پاره‌خط AB را روی خط d به اندازه ۴ جدا می‌کنیم و از نقطهٔ B خطی موازی نیم‌خط Oy رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن با نیم‌خط Ox یا امتداد آن را C می‌نامیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC جواب است.



بسته ۱ — **پرسش‌های تشریحی** — ترسیم‌های هندسی

۱. پاره‌خط AB به‌طول ۸ سانتی‌متر مفروض است. نقاطی را تعیین کنید که از دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۶ سانتی‌متر باشند.

۲. توضیح دهید چگونه می‌توان مثلثی به طول اضلاع ۵، ۶ و ۷ سانتی‌متر رسم کرد.

۳. نقاط A و B به فاصلهٔ ۱۰ سانتی‌متر از هم قرار دارند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطهٔ A برابر .... و از نقطهٔ B برابر .... باشد. جاهای خالی را به گونه‌ای کامل کنید که مسأله فوق:

آ) دو جواب داشته باشد.

ب) یک جواب داشته باشد.

پ) جواب نداشته باشد.

۴. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۶ و ۸ باشد. چند متوازی‌الاضلاع با این شرایط می‌توان رسم کرد؟

۵. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۹ و ۱۲ و زاویهٔ بین‌آن‌ها 45° باشد، چند متوازی‌الاضلاع با این شرایط می‌توان رسم کرد؟

۶. مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۸ سانتی‌متر باشد. چند مستطیل با این شرایط می‌توان رسم کرد؟

۷. یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۶ و ۱۰ باشد.

۸. یک لوزی رسم کنید که طول ضلع آن ۵ و طول یک قطرش ۸ باشد.

۹. دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید.

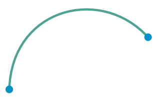
آ) نقطه‌ای بیابید که فاصلهٔ آن از هر ضلع زاویه، ۳ واحد باشد.

ب) با استفاده از قسمت (آ)، نیمساز زاویهٔ مورد نظر را رسم کنید.

۱۰. دو نقطهٔ A و B داخل زاویهٔ xOy مفروض هستند. نقطه‌ای داخل آن چنان بیابید که از دو ضلع زاویه و از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد. چند نقطه با این شرایط می‌توان رسم کرد؟

۱۱. در دایره‌ای به مرکز O و شعاع R وتر AB رسم شده است. ثابت کنید عمودمنصف وتر AB از مرکز دایره می‌گذرد.

۱۲. در شکل مقابل قسمتی از یک دایره داده شده است. مرکز این دایره را تعیین کنید.



۱۳. مستطیلی رسم کنید که طول ضلع‌های آن ۳ و ۴ باشد.

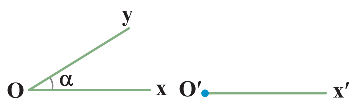
۱۴. ثابت کنید هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

۱۵. ثابت کنید اگر نقطه‌ای داخل یک زاویه از دو ضلع آن به یک فاصله باشد، آن‌گاه آن نقطه روی نیمساز زاویه قرار دارد.

۱۶. ثابت کنید هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.

۱۷. ثابت کنید اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، آن‌گاه آن نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط قرار دارد.

۱۸. مطابق شکل، زاویهٔ معلوم xOy به اندازهٔ α و نیم‌خط $O'x'$ داده شده‌اند. زاویهٔ $x'O'y'$ را چنان رسم کنید که اندازهٔ آن برابر α باشد.



۱۹. مثلث متساوی‌الساقینی رسم کنید که محیط و ارتفاع وارد بر قاعدهٔ آن به‌ترتیب ۳۹ و ۱۲ سانتی‌متر باشند.

۲۰. مثلثی رسم کنید که اندازهٔ دو ضلع آن ۱۷ و ۱۰ و ارتفاع وارد بر ضلع سوم آن ۸ باشد.

۲۱. مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که یک زاویهٔ حاده و مجموع دو ضلع زاویهٔ قائمهٔ آن معلوم باشد.

۲۲. اندازه‌های دو ضلع مثلثی و میانهٔ نظیر ضلع سوم آن معلوم‌اند. مثلث را رسم کنید.

۲۳. اندازهٔ دو ضلع مثلثی ۶ و ۴ سانتی‌متر و اندازهٔ زاویهٔ روبه‌رو به ضلع ۴ سانتی‌متری، 30° است. مثلث را رسم کنید.

۲۴. اندازهٔ دو ضلع مثلثی ۶ و ۴ سانتی‌متر و اندازهٔ زاویهٔ روبه‌رو به ضلع ۶ سانتی‌متری، 30° است. مثلث را رسم کنید.

بسته دوم

استدلال

صفحه ۱۷ تا ۲۷ کتاب درسی

استدلال

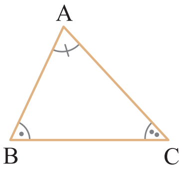
■ **استدلال استقرایی:** روش نتیجه‌گیری کلی براساس مجموعهٔ محدودی از مشاهدات را استدلال استقرایی می‌گویند.

■ **استدلال استنتاجی:** روش نتیجه‌گیری کلی براساس مفاهیمی که درستی آن‌ها را از قبل پذیرفته‌ایم، استدلال استنتاجی نامیده می‌شود.

■ **قضیه و عکس قضیه:** برخی نتایج مهم و کلی که با استدلال استنتاجی حاصل می‌شوند، قضیه نامیده می‌شوند و اگر در یک قضیه جای فرض و حکم را عوض کنیم، آن‌چه که حاصل می‌شود، عکس قضیه گفته می‌شود. عکس یک قضیه می‌تواند درست یا نادرست باشد.

قضیه ۱ مجموع اندازه‌های زوایای هر مثلث، برابر 180° است.

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$$

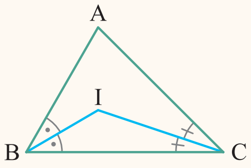


سؤال ثابت کنید در هر مثلث، زاویهٔ حاصل از برخورد دو نیمساز داخلی برابر است با نصف زاویهٔ سوم به‌علاوه 90°

پاسخ

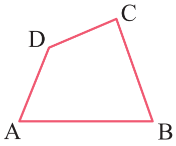
$$\begin{array}{l}\overset{\Delta}{ABC}:\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ\\ \overset{\Delta}{BIC}:\dfrac{\hat{B}}{2}+\dfrac{\hat{C}}{2}+\hat{I}=180^\circ\end{array}\Rightarrow\begin{cases}\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ\\ \hat{B}+\hat{C}+2\hat{I}=360^\circ\end{cases}\xrightarrow{\text{تفاضل}}2\hat{I}-\hat{A}=180^\circ$$

$$\Rightarrow 2\hat{I}=180^\circ+\hat{A}\Rightarrow\hat{I}=90^\circ+\frac{\hat{A}}{2}$$



قضیه ۲ مجموع اندازه‌های زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب، برابر 360° است.

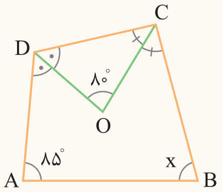
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360^\circ$$



سؤال نیمسازهای داخلی دو زاویهٔ مجاور یک چهارضلعی محدب، یکدیگر را با زاویهٔ 80° قطع می‌کنند. اگر اندازهٔ دو زاویهٔ دیگر 85° و x باشد، مقدار x را بیابید.

پاسخ

$$\begin{cases}\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360^\circ\\ \dfrac{\hat{D}}{2}+\dfrac{\hat{C}}{2}+80^\circ=180^\circ\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}85^\circ+x+\hat{C}+\hat{D}=360^\circ\\ \hat{C}+\hat{D}=200^\circ\end{cases}\Rightarrow x=360^\circ-200^\circ-85^\circ=75^\circ$$



قضیه ۳ سه عمودمنصف اضلاع هر مثلث همرسند.

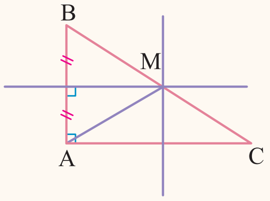
قضیه ۴ سه ارتفاع هر مثلث همرسند.

قضیه ۵ سه نیمساز زوایای داخلی هر مثلث همرسند.

سؤال ثابت کنید در مثلث قائم‌الزاویه، عمودمنصف اضلاع در وسط وتر همرسند.

پاسخ مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ مفروض است. عمودمنصف ضلع AB را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن را با وتر BC، M می‌نامیم. داریم $MA=MB$ و می‌توان نوشت:

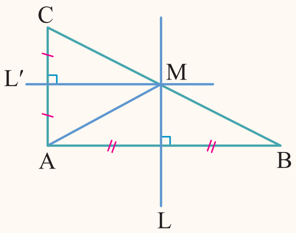
$$\left.\begin{array}{l}MA=MB\Rightarrow B\hat{A}M=\hat{B}\\ M\hat{A}C=90^\circ-B\hat{A}M\end{array}\right\}\Rightarrow M\hat{A}C=90^\circ-\hat{B}\xrightarrow{\hat{C}=90^\circ-\hat{B}}M\hat{A}C=\hat{C}\Rightarrow MA=MC$$



تساوی اخیر یعنی M روی عمودمنصف ضلع AC قرار دارد و هم‌چنین از $MA=MB$ و $MA=MC$ نتیجه می‌شود $BM=MC$. بنابراین M نقطهٔ تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC در وسط وتر است.

سؤال **ثابت کنید اگر در مثلثی نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها روی ضلع مثلث قرار گیرد، آن‌گاه مثلث قائم‌الزاویه است.**

پاسخ مطابق شکل در مثلث ABC فرض کنیم عمودمنصف اضلاع AB ، AC و BC در نقطهٔ M روی ضلع BC همرسند. از M به A وصل می‌کنیم، داریم:

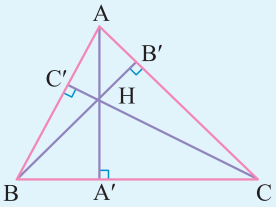


$$\left.\begin{aligned} M \in L &\Rightarrow MA = MB \Rightarrow M\hat{A}B = \hat{B} \\ M \in L' &\Rightarrow MA = MC \Rightarrow M\hat{A}C = \hat{C} \end{aligned}\right\}$$

$$\xrightarrow{+} M\hat{A}B + M\hat{A}C = \hat{B} + \hat{C} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} + \hat{C} \xrightarrow{\text{طرفین}+\hat{A}} ۲\hat{A} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} \Rightarrow ۲\hat{A} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۹۰^\circ$$

و این یعنی مثلث ABC ، در رأس A قائم‌الزاویه است.

سؤال **در شکل مقابل، سه ارتفاع مثلث رسم شده‌اند. ثابت کنید $B\hat{H}C = ۱۸۰^\circ - \hat{A}$**



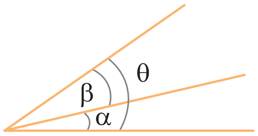
پاسخ در چهارضلعی $AB'HC'$ مجموع زوایا برابر ۳۶۰° است، پس می‌توان نوشت:

$$\hat{A} + ۹۰^\circ + ۹۰^\circ + B'\hat{H}C' = ۳۶۰^\circ \Rightarrow B'\hat{H}C' = ۱۸۰^\circ - \hat{A}$$

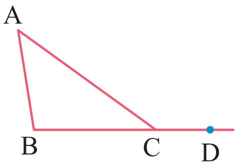
اما دو زاویهٔ $B'\hat{H}C'$ و $B\hat{H}C$ متقابل به رأس و در نتیجه هم‌اندازه هستند، لذا $B\hat{H}C = B'\hat{H}C' = ۱۸۰^\circ - \hat{A}$

نامساوی‌ها در مثلث

۱ در شکل مقابل همواره داریم: $\theta > \alpha$ و $\theta > \beta$

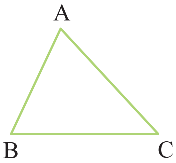


۲ هر زاویهٔ خارجی در مثلث از زوایای داخلی غیر مجاورش بزرگ‌تر است.



$$A\hat{C}D > \hat{A} \quad , \quad A\hat{C}D > \hat{B}$$

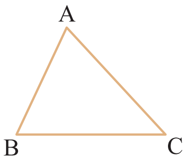
قضیه اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویهٔ روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، از زاویهٔ روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر، بزرگ‌تر است.



$$AB < AC \Rightarrow \hat{C} < \hat{B}$$

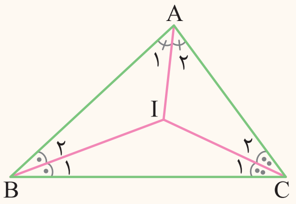
عکس قضیهٔ فوق: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر، بزرگ‌تر است.

$$\hat{C} < \hat{B} \Rightarrow AB < AC$$



سؤال در مثلث ABC اگر I نقطهٔ همرسی نیمسازها و $BC > AB > AC$ باشد، آن‌گاه ثابت کنید $BI > CI > AI$

پاسخ



فرض: $BC > AB > AC$

حکم: $BI > CI < AI$

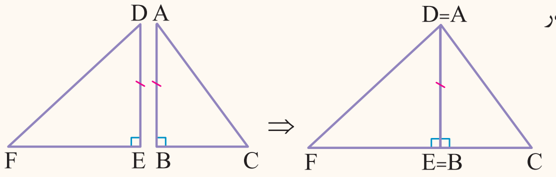
$$BC > AB \Rightarrow \hat{A} > \hat{C} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{۲} > \frac{\hat{C}}{۲} \Rightarrow \hat{A}_۲ > \hat{C}_۲ \xrightarrow{\text{در مثلث } AIC} CI > AI \quad (۱)$$

$$AB > AC \Rightarrow \hat{C} > \hat{B} \Rightarrow \frac{\hat{C}}{۲} > \frac{\hat{B}}{۲} \Rightarrow \hat{C}_۱ > \hat{B}_۱ \xrightarrow{\text{در مثلث } BIC} BI > CI \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow BI > CI > AI$$

سؤال در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و DEF داریم: $\hat{B} = \hat{E} = ۹۰^\circ$ ، $AB = DE$ و $\hat{C} > \hat{F}$. ثابت کنید $DF > AC$

پاسخ دو مثلث را در ضلعی که اندازه‌شان برابر است، مطابق شکل رسم می‌کنیم. چون در مثلث ACF ، $\hat{C} > \hat{F}$ ، پس بنا به قضیهٔ زاویهٔ بزرگ‌تر، نتیجه می‌شود $DF > AC$



گزاره

تعریف گزاره جمله‌ای است خبری، درست یا نادرست، اگرچه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد.

گزاره‌ای که تنها یک خبر را اعلام کند گزارهٔ ساده گفته می‌شود و اگر بیش از یک خبر را اعلام کند به آن گزارهٔ مرکب گفته می‌شود. مثلاً هریک از جمله‌های زیر گزاره است:

- فردا هوا بارانی است. (گزارهٔ ساده)
- یازده، عددی اوّل است. (گزارهٔ ساده)
- فردا هوا برفی است و ۳ عددی زوج است. (گزارهٔ مرکب)
- $\sqrt{۲}^{\sqrt{۲}}$ عددی گنگ است. (گزارهٔ ساده)

نقیض یک گزاره:

اگر P یک گزاره باشد، گزارهٔ «چنین نیست که P » را نقیض P می‌گوییم، مثلاً:

گزاره	نقیض گزاره
a از b بزرگ‌تر است.	چنین نیست که a از b بزرگ‌تر باشد، یعنی a از b بزرگ‌تر نیست و معادل آن این است که بگوییم $a = b$ یا $a < b$ است.
مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° است.	چنین نیست که مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° است و معادل آن «مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن ۱۸۰° نیست.» می‌باشد.

نکته
- نقیض «هر» می‌شود «وجود دارد» و نقیض «وجود دارد» می‌شود «هر» و جملهٔ منفی می‌شود و جمله منفی می‌شود.
- گزاره‌هایی که با «هیچ» شروع می‌شوند به نوعی با «هر» ارتباط دارند. مثلاً «**هیچ مثلثی دو زاویهٔ قائمه ندارد.**» معادل این است که بگوییم «**هر مثلث دو زاویهٔ قائمه ندارد.**»

مثال نقیض عبارت «مربعی وجود دارد که متوازی‌الاضلاع نیست.» را بنویسید.

پاسخ «چنین نیست که مربعی وجود دارد که متوازی‌الاضلاع نیست» و معادل آن این است که «هر مربعی، متوازی‌الاضلاع است.»

گزارهٔ شرطی: هر گزاره به‌صورت «اگر .... ، آن‌گاه ....» گزارهٔ شرطی نامیده می‌شود. مثلاً گزارهٔ «اگر دو ضلع مثلثی برابر باشند، آن‌گاه زوایای مقابل آن‌ها برابر است.» یک گزارهٔ شرطی می‌باشد.

برهان غیرمستقیم (برهان خلف)

آ) فرض می‌کنیم نقیض حکم درست باشد. (فرض خلف)

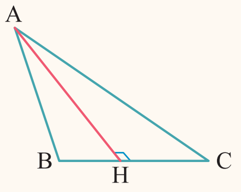
ب) به کمک روش‌های درست ریاضی، گزاره‌ای را نتیجه می‌گیریم که با مفروضات مسئله یا یک قضیه یا یک گزارهٔ درست در تناقض باشد.

پ) با توجه به قسمت (ب) نتیجه می‌گیریم نقیض حکم نادرست است، در نتیجه حکم درست است.

سؤال **ثابت کنید در هر مثلث منفرجه‌الزاویه، دو ارتفاع خارج مثلث قرار می‌گیرد.**

پاسخ فرض کنیم در مثلث ABC زاویهٔ B منفرجه باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم ارتفاع AH خارج مثلث ABC قرار می‌گیرد.

برهان خلف: فرض کنیم AH داخل مثلث یا روی آن قرار گیرد (فرض خلف).



آ) اگر AH داخل مثلث قرار گیرد (شکل مقابل) بنابه زاویهٔ خارجی در مثلث ABH نتیجه می‌شود $\hat{B} < A\hat{H}C$ یا $\hat{B} < 90^\circ$ و این یعنی زاویهٔ B حاده است که با فرض منفرجه بودن آن تناقض دارد.

ب) اگر AH بر AB منطبق باشد، مثلث ABC قائم‌الزاویه می‌شود که این با منفرجه‌الزاویه بودن آن تناقض دارد. پس فرض خلف غلط و حکم مسئله درست است.

با همین استدلال نتیجه می‌شود ارتفاع رسم شده از رأس C نیز خارج مثلث قرار می‌گیرد.

قضیهٔ دو شرطی

اگر عکس یک قضیه درست باشد، آن قضیه را دو شرطی می‌نامند. قضیه‌های دو شرطی به‌صورت (.......... اگر و تنها اگر ....) نوشته می‌شوند و نماد $\Leftrightarrow$ برای آن‌ها به کار می‌رود. مثلاً قضیهٔ فیثاغورس دو شرطی است و به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

«مثلثی قائم‌الزاویه است؛ اگر و تنها اگر مربع یک ضلع آن برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگرش باشد.»

مثال نقض

به مثالی که نشان دهد یک حکم کلی یا یک حدس کلی نادرست است، مثال نقض گفته می‌شود. مثلاً حکم کلی «هر چهارضلعی که چهار ضلع برابر داشته باشد، مربع است.» با مثال لوزی، نقض می‌شود.

اگر درستی یک حکم کلی را نتوانیم اثبات کنیم و برای رد آن مثال نقض نیز نتوانیم بیان کنیم، نمی‌توانیم دربارهٔ درستی آن حکم کلی، نتیجه‌ای بگیریم. مثلاً در ریاضیات، حکم «هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به‌صورت مجموع دو عدد اول نوشت.» معروف به حدس گلدباخ می‌باشد و هنوز درستی آن اثبات و مثال نقضی نیز برای آن پیدا نشده است.

بسته ۲ پرسش‌های تشریحی — استدلال

۲۵. **اگر با مشاهدهٔ تعدادی مثلث که میانه و ارتفاع آن‌ها بر هم منطبق است، نتیجه‌گیری کنیم چنین مثلث‌هایی متساوی‌الساقین می‌باشد، چه استدلالی انجام داده‌ایم؟**

۲۶. **ثابت کنید مجموع اندازه‌های زوایای داخلی هر مثلث 180° است.**

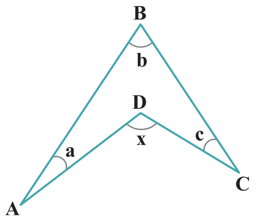
۲۷. **ثابت کنید مجموع اندازه‌های زوایای داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.**

۲۸. **ثابت کنید در هر مثلث، اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی برابر مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورش می‌باشد.**

۲۹. **ثابت کنید هر زاویهٔ خارجی مثلث از زاویه‌های داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر است.**

۳۰. **ثابت کنید مجموع زوایای خارجی هر مثلث برابر 360° است.**

۳۱. **در چهارضلعی مقعر روبه‌رو، ثابت کنید: $x = a + b + c$**

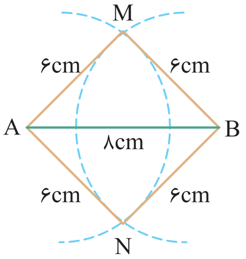


۲
بخش

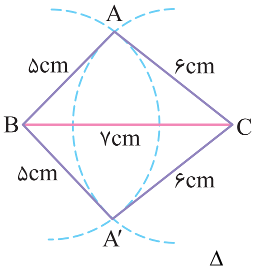
پاسخ‌نامه

فصل ۱
ترسیم‌های هندسی و استدلال

| ۱ | ابتدا پاره‌خط AB را به طول ۸ سانتی‌متر رسم می‌کنیم، سپس به مرکز A و شعاع ۶ سانتی‌متر و به مرکز B و شعاع ۶ سانتی‌متر دو کمان رسم می‌کنیم، محل تلاقی این دو کمان را M و N می‌نامیم. M و N نقاطی هستند که از دو سر پاره‌خط AB به فاصلهٔ ۶ سانتی‌متر هستند.

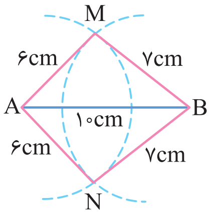


| ۲ | ابتدا یکی از پاره‌خط‌های به طول ۵ یا ۶ یا ۷ را رسم می‌کنیم، مثلاً پاره‌خط بزرگ‌تر BC = ۷ . سپس دو دایره به مراکز B و C و شعاع‌های ۵ و ۶ رسم می‌کنیم، محل تلاقی آن‌ها، جای رأس سوم مثلث یعنی نقطهٔ A است.

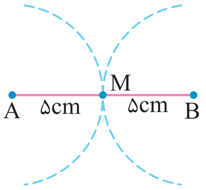


مسئله دارای دو جواب هم‌نهشت $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'BC}$ است که یک جواب محسوب می‌شود.

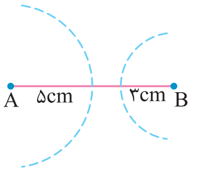
| ۳ | آ) نقاط A و B به فاصلهٔ ۱۰ سانتی‌متر از هم هستند، در این صورت دو نقطه وجود دارد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۶ سانتی‌متر و از نقطهٔ B به فاصلهٔ ۷ سانتی‌متر باشد.



ب) نقاط A و B به فاصلهٔ ۱۰ سانتی‌متر از هم هستند، در این صورت یک نقطه وجود دارد که از نقطه‌های A و B به فاصلهٔ ۵ سانتی‌متر باشد.



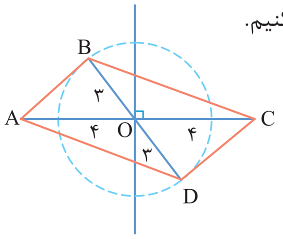
پ) نقاط A و B به فاصلهٔ ۱۰ سانتی‌متر از هم هستند، در این صورت نقطه‌ای وجود ندارد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۵cm و از نقطهٔ B به فاصلهٔ ۳cm باشد.



| ۴ | آ) پاره‌خط AC = ۸ را رسم می‌کنیم.

ب) عمودمنصف پاره‌خط AC را رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن با AC را O می‌نامیم، داریم OA = OC = ۴

پ) به مرکز O و شعاع ۳، دایره‌ای رسم می‌کنیم.



ت) یک قطر دلخواه از این دایره مانند BD که بر AC منطبق نیست را رسم می‌کنیم.

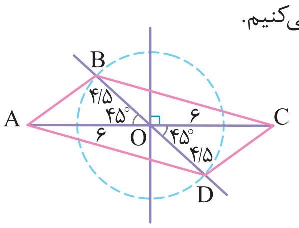
ث) چهارضلعی ABCD، متوازی‌الاضلاع مطلوب است، زیرا قطرهای آن یک‌دیگر را نصف کرده‌اند.

مسئله بی‌شمار جواب دارد، زیرا بی‌شمار قطر مانند BD می‌توان رسم کرد.

| ۵ | آ) پاره‌خط AC=۱۲ را رسم می‌کنیم.

ب) عمودمنصف پاره‌خط AC را رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن را با AC، O می‌نامیم، داریم OA = OC = ۶

پ) به مرکز O و شعاع ۴/۵ دایره‌ای رسم می‌کنیم.

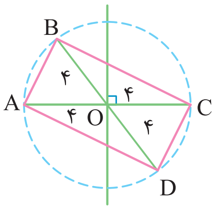


ت) نیمساز زاویهٔ قائمه به رأس O را مطابق شکل رسم می‌کنیم. نقاط تلاقی آن با دایره، B و D می‌باشد.

ث) چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع مطلوب است. زیرا قطرهای آن یک‌دیگر را نصف کرده‌اند و زاویهٔ بین آن‌ها °۴۵ است، پس مسئله دقیقاً یک جواب دارد.

| ۶ | آ) پاره‌خط AC = ۸ را رسم می‌کنیم.

ب) عمودمنصف پاره‌خط AC را رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن با AC را O می‌نامیم، داریم OA = OC = ۴



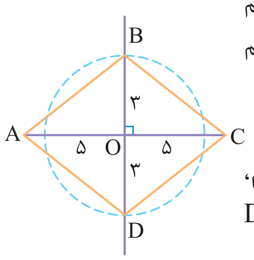
پ) به مرکز O و شعاع ۴، دایره‌ای رسم می‌کنیم.

ت) قطر دلخواه BD که بر AC منطبق نیست را رسم می‌کنیم.

ث) چهارضلعی ABCD مستطیل است زیرا قطرهای آن برابرند و یک‌دیگر را نصف می‌کنند و مسئله بی‌شمار جواب دارد.

| ۷ | آ) پاره‌خط AC = ۱۰ را رسم می‌کنیم.

ب) عمودمنصف پاره‌خط AC را رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن را با AC ، O می‌نامیم، داریم OA = OC = ۵

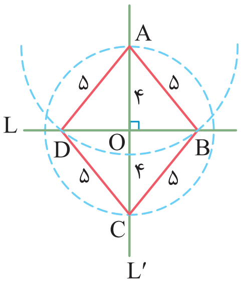


پ) به مرکز O و شعاع ۳ دایره‌ای رسم می‌کنیم، نقطه‌های تلاقی آن با عمودمنصف را B و D می‌نامیم.

ت) چهارضلعی ABCD لوزی است، زیرا قطرهای آن بر هم عمودند و یک‌دیگر را نصف می‌کنند.

| ۸ | آ) دو خط عمود بر هم به نام‌های L و L′ را رسم می‌کنیم.

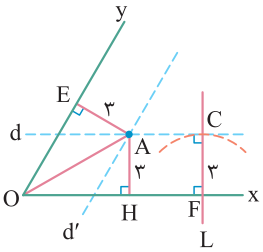
ب) به مرکز O و شعاع ۴ دایره‌ای رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن با خط L′ را A و C می‌نامیم.



پ) به مرکز A و شعاع ۵، کمانی رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن با خط L را با نقاط B و D می‌نامیم. مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ AOB و AOD به حالت برابری وتر و یک ضلع هم‌نهشت‌اند پس OB = OD

ت) ABCD لوزی به ضلع ۵ و قطر ۸ می‌باشد، زیرا قطرهای آن عمودمنصف یک‌دیگرند.

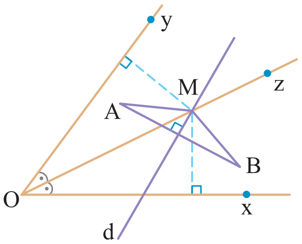
۹ | آ) خط دلخواه L را در F عمود بر Ox رسم می‌کنیم، کمانی به مرکز F و شعاع ۳ رسم می‌کنیم تا خط L را در نقطهٔ C قطع کند. در نقطهٔ C، خط d را عمود بر L رسم می‌کنیم. همهٔ نقاط خط d از نیم‌خط Ox به فاصلهٔ ۳ می‌باشند.



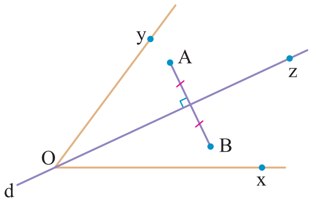
به طریق مشابه خط d′ موازی Oy و به فاصلهٔ ۳ از آن رسم می‌شود، محل تلاقی d و d′ نقطهٔ A است که از دو نیم‌خط Ox و Oy به فاصلهٔ ۳ است.

ب) چون نقطهٔ A از ضلع‌های زاویهٔ xOy به یک فاصله است، پس روی نیمساز زاویهٔ xOy قرار دارد، از طرفی O نقطه‌ای از نیمساز زاویهٔ xOy است. در نتیجه نیم‌خط شامل پاره‌خط OA نیمساز زاویهٔ xOy است.

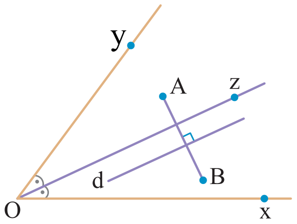
۱۰ | Oz نیمساز زاویهٔ xOy و سپس خط d عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن با Oz را M می‌نامیم. نقطهٔ M از دو ضلع زاویهٔ xOy و از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله است.



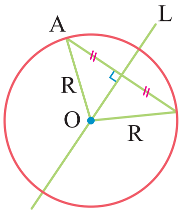
اگر نیمساز Oz بر خط d منطبق شود، در این صورت مسئله بی‌شمار جواب دارد و این اتفاق، وقتی می‌افتد که A و B دو طرف Oz قرار گرفته و از آن به یک فاصله باشند.



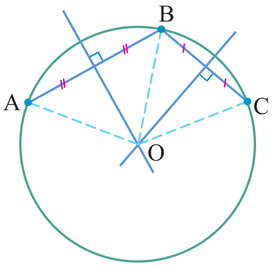
اما اگر نیمساز Oz و خط d موازی باشند، مسئله جواب ندارد.



۱۱ | فرض کنید خط L عمودمنصف وتر AB در دایره به مرکز O و شعاع R باشد، چون OA = OB = R است، پس نقطهٔ O روی عمودمنصف پاره‌خط AB یعنی خط L قرار دارد.

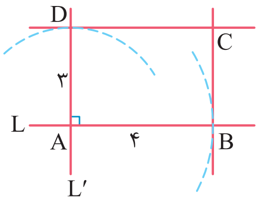


۱۲ | نقاط A، B و C را مطابق شکل روی کمان داده‌شده در نظر می‌گیریم. عمودمنصف پاره‌خط‌های AB و AC را رسم می‌کنیم. چون هر دوی این عمودمنصف‌ها از مرکز دایره می‌گذرند، پس نقطهٔ تلاقی آن‌ها یعنی نقطهٔ O مرکز دایره‌ای است که این کمان بخشی از آن است.

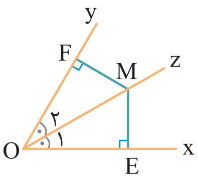


۱۳ | دو خط عمود بر هم L و L′ را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن‌ها را A می‌نامیم. به مرکز A و شعاع ۴ کمانی رسم می‌کنیم تا خط L را در نقطهٔ B قطع کند. هم‌چنین به مرکز A و شعاع ۳ کمانی رسم می‌کنیم تا خط L′ را در نقطهٔ D قطع کند.

در نقطهٔ B خطی عمود بر L و در نقطهٔ D خطی عمود بر L′ رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی این دو خط را C می‌نامیم. ABCD مستطیل مطلوب است.



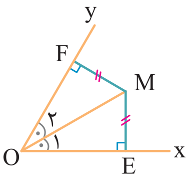
۱۴ | **فرض:** $\hat{O}_1=\hat{O}_2$ ، **حکم:** $ME = MF$



$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_1=\hat{O}_2\\ OM=OM\\ \hat{E}=\hat{F}=90^\circ\end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{وتر و یک زاویهٔ حاده}} \overset{\Delta}{OME} \cong \overset{\Delta}{OMF} \Rightarrow ME = MF$$

۱۵ | **فرض:** $ME = MF$ ، **حکم:** $\hat{O}_1=\hat{O}_2$

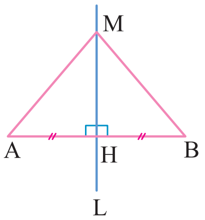


$$\left.\begin{array}{l}OM=OM\\ ME=MF\\ \hat{E}=\hat{F}=90^\circ\end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\Delta}{OME} \cong \overset{\Delta}{OMF} \Rightarrow \hat{O}_1=\hat{O}_2$$

یعنی نقطهٔ M روی نیمساز زاویهٔ xOy قرار دارد.

۱۶ | **فرض:** خط L عمودمنصف AB است. ، **حکم:** $MA = MB$

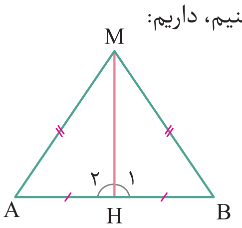


$$\left.\begin{array}{l}AH=BH\\ A\hat{H}M=B\hat{H}M=90^\circ\\ MH=MH\end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\Delta}{AMH} \cong \overset{\Delta}{BMH} \Rightarrow MA=MB$$

۱۷ | **فرض:** $MA = MB$ ، **حکم:** M روی عمودمنصف AB قرار دارد.

نقطهٔ M را به وسط پاره‌خط AB وصل می‌کنیم، داریم:

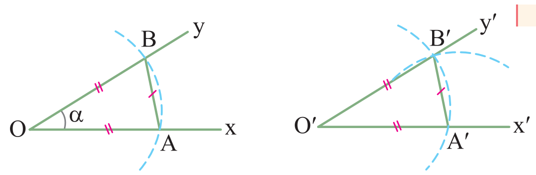


$$\left.\begin{array}{l}AM=MB\\ MH=MH\\ AH=BH\end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\Delta}{AMH} \cong \overset{\Delta}{BMH} \Rightarrow \hat{H}_1=\hat{H}_2$$

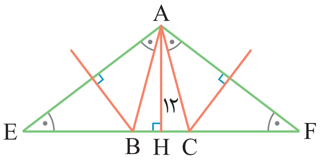
از طرفی $\hat{H}_1+\hat{H}_2=180^\circ$ ، پس $\hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ$ ، یعنی MH عمودمنصف پاره‌خط AB است، پس M روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.

۱۸ |

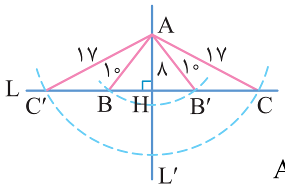


نقطهٔ A را غیر از O روی نیم‌خط Ox در نظر می‌گیریم. کمانی به مرکز O و شعاع OA، نیم‌خط Oy را در نقطه‌ای مانند B قطع می‌کند، داریم $OA=OB$. به مرکز O' و شعاع OA کمانی رسم می‌کنیم، نقطهٔ تلاقی آن را با نیم‌خط $O'x'$، نقطهٔ A' می‌نامیم. به مرکز A' و شعاع AB کمانی رسم می‌کنیم، یک نقطهٔ تلاقی آن را با کمان قبل نقطهٔ B' می‌نامیم. O' را به B' وصل کرده و امتداد می‌دهیم. اندازهٔ زاویهٔ $x'O'y'$ برابر α است زیرا دو مثلث OAB و $O'A'B'$ به حالت (ض‌ض‌ض) هم‌نهشت هستند.

۱۹ | پاره‌خط EF را به طول ۳۹ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. عمودمنصف این پاره‌خط را رسم می‌کنیم و روی آن پاره‌خط AH را به طول ۱۲ سانتی‌متر جدا می‌کنیم. مثلث AEF متساوی‌الساقین است. عمودمنصف ساق‌های AE و AF را رسم می‌کنیم. نقطهٔ تلاقی آن‌ها را با EF به‌ترتیب B و C می‌نامیم. دو مثلث متساوی‌الساقین ABE و ACF به حالت (زض‌ز) هم‌نهشت‌اند. پس $BE=AB=AC=CF$. در نتیجه محیط مثلث متساوی‌الساقین ABC برابر $EF=۳۹$ است و ارتفاع وارد بر قاعدهٔ آن $AH=۱۲$ است.



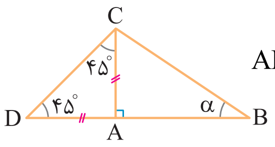
۲۰ | دو خط عمود بر هم L و L' را رسم می‌کنیم. AH را روی L' برابر ۸ جدا می‌کنیم. به مرکز A و شعاع ۱۰ و به مرکز A و شعاع ۱۷، دو کمان رسم می‌کنیم. نقاط تلاقی آن‌ها با خط L را B، B'، C و C' می‌نامیم. مثلث‌های ABC، $AB'C'$، $AB'C$ و ABC' جواب‌اند و مسئله دارای دو جواب متمایز ABC و $AB'C$ است. زیرا $\overset{\Delta}{ABC}\cong\overset{\Delta}{AB'C'}$ و $\overset{\Delta}{AB'C}\cong\overset{\Delta}{ABC'}$



۲۱ | بنا به فرض $\hat{B}=\alpha$ و $AB+AC=k$ معلوم هستند. ابتدا پاره‌خط $BD=k$ را رسم می‌کنیم. زوایایی به اندازهٔ ۴۵° و α را به‌ترتیب در رأس‌های D و B می‌سازیم. محل برخورد اضلاع دیگرشان را C می‌نامیم. از C بر BD عمود می‌کنیم. پای عمود را A می‌نامیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC جواب است.

زیرا $AB+AC=AB+AD=BD=k$

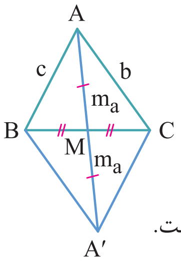
و $\hat{B}=\alpha$



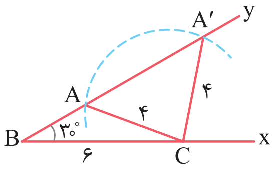
۲۲ | بنا به فرض $AB=c$، $AC=b$ و $AM=m_a$ معلوم هستند. میانهٔ AM را به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ A' به‌دست آید.

چهارضلعی $ABA'C$ متوازی‌الاضلاع است؛ زیرا قطرهایش یک‌دیگر را نصف می‌کنند، پس $A'C=AB=c$

مثلث $AA'C$ سه‌ضلعش معلوم است ($A'C=c$، $AC=b$ و $AA'=۲m_a$)، آن را رسم می‌کنیم. CM را از سمت M به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم، تا نقطهٔ B به‌دست آید. A را به B وصل می‌کنیم. مثلث ABC مثلث مطلوب است.

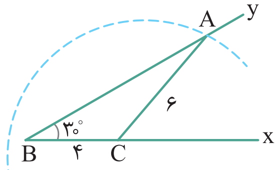


۲۳ | ابتدا زاویهٔ xBy را به اندازهٔ ۳۰° رسم می‌کنیم.



به مرکز B و شعاع ۶ کمانی رسم می‌کنیم تا نیم‌خط Ox را در نقطهٔ C قطع کند. به مرکز C و شعاع ۴ سانتی‌متر کمانی رسم می‌کنیم. نقاط تلاقی آن با نیم‌خط By را A و A' می‌نامیم. مثلث‌های غیرهم‌نهشت ABC و $A'BC$ جواب هستند.

۲۴ | ابتدا زاویهٔ $x\hat{B}y$ را به اندازهٔ ۳۰° رسم می‌کنیم.

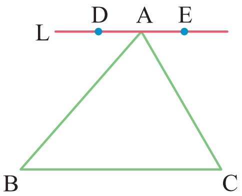


به مرکز B و شعاع ۴ سانتی‌متر کمانی رسم می‌کنیم تا نیم‌خط Bx را در C قطع کند. به مرکز C و شعاع ۶ سانتی‌متر، کمانی رسم می‌کنیم. این کمان، نیم‌خط By را دقیقاً در یک نقطه مثلاً به نام A قطع می‌کند. مثلث ABC جواب است.

۲۵ | استدلال استقرایی

۲۶ | **فرض:** مثلث ABC، **حکم:** $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$

از رأس A خط L را موازی BC رسم می‌کنیم، داریم:



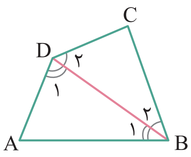
$$\left.\begin{array}{l} L\parallel BC\ ,\ \text{مورب}\ AB\Rightarrow D\hat{A}B=\hat{B} \\ L\parallel BC\ ,\ \text{مورب}\ AC\Rightarrow E\hat{A}C=\hat{C} \end{array}\right\}$$

از طرفی داریم $D\hat{A}B+\hat{A}+E\hat{A}C=۱۸۰^\circ$ و با قرار دادن تساوی‌های فوق در آن نتیجه می‌شود: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$

۲۷ | **فرض:** ABCD چهارضلعی محدب

حکم: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=۳۶۰^\circ$

قطر AC یا BD را رسم می‌کنیم، داریم:



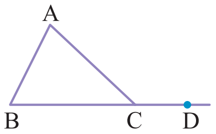
$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABD}:\hat{A}+\hat{D}_۱+\hat{B}_۱=۱۸۰^\circ \\ \overset{\Delta}{BCD}:\hat{C}+\hat{D}_۲+\hat{B}_۲=۱۸۰^\circ \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{+}\hat{A}+\hat{C}+(\hat{D}_۱+\hat{D}_۲)+(\hat{B}_۱+\hat{B}_۲)=۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow\hat{A}+\hat{C}+\hat{D}+\hat{B}=۳۶۰^\circ$$

۲۸ | **فرض:** $A\hat{C}D$ زاویهٔ خارجی $A\hat{B}C$

حکم: $A\hat{C}D=\hat{A}+\hat{B}$

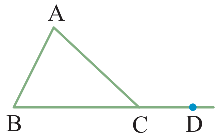


$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ\\ \hat{C}+A\hat{C}D=180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\hat{C}+A\hat{C}D$$

$$\Rightarrow A\hat{C}D=\hat{A}+\hat{B}$$

۲۹ | **فرض:** $A\hat{C}D$ زاویهٔ خارجی $\overset{\Delta}{ABC}$

حکم: $A\hat{C}D>\hat{B}$ ، $A\hat{C}D>\hat{A}$



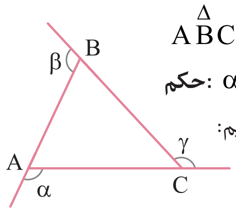
می‌دانیم اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی مثلث برابر مجموع اندازه‌های زوایای داخلی غیرمجاور مثلث است. لذا:

$$A\hat{C}D=\hat{A}+\hat{B}\Rightarrow A\hat{C}D>\hat{A}\ ,\ A\hat{C}D>\hat{B}$$

۳۰ | **فرض:** α و β و γ زاویه‌های خارجی $\overset{\Delta}{ABC}$

حکم: $\alpha+\beta+\gamma=360^\circ$

بنابه ویژگی زاویهٔ خارجی در مثلث ABC داریم:

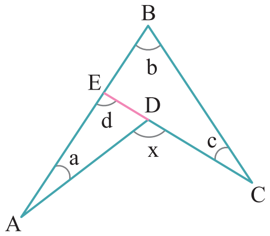


$$\left.\begin{array}{l}\alpha=\hat{B}+\hat{C}\\ \beta=\hat{A}+\hat{C}\\ \gamma=\hat{A}+\hat{B}\end{array}\right\}\xrightarrow{+}\alpha+\beta+\gamma=2(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C})=2\times180^\circ=360^\circ$$

۳۱ | **فرض:** ABCD چهارضلعی مقعر

حکم: $x=a+b+c$

مطابق شکل، امتداد ضلع CD، ضلع AB را در E قطع می‌کند. بنابه ویژگی زاویهٔ خارجی در مثلث‌های $\overset{\Delta}{BCE}$ و $\overset{\Delta}{ADE}$ داریم:

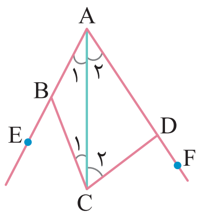


$$\left.\begin{array}{l}x=a+d\\ d=b+c\end{array}\right\}\Rightarrow x=a+b+c$$

۳۲ | **فرض:** $E\hat{B}C$ و $F\hat{D}C$ به‌ترتیب زوایای خارجی $\hat{B}$ و $\hat{D}$ در چهارضلعی محدب ABCD

حکم: $E\hat{B}C+F\hat{D}C=\hat{A}+\hat{C}$

قطر AC را رسم می‌کنیم. بنا به زاویهٔ خارجی در مثلث‌های ABC و ACD داریم:

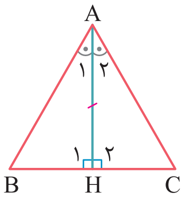


$$\left.\begin{array}{l}E\hat{B}C=\hat{A}_1+\hat{C}_1\\ F\hat{D}C=\hat{A}_2+\hat{C}_2\end{array}\right\}\xrightarrow{+}E\hat{B}C+F\hat{D}C=(\hat{A}_1+\hat{A}_2)+(\hat{C}_1+\hat{C}_2)$$

$$\Rightarrow E\hat{B}C+F\hat{D}C=\hat{A}+\hat{C}$$

۳۳ | **فرض:** AH نیمساز $\hat{A}$ و $AH\perp BC$

حکم: $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی‌الساقین است.



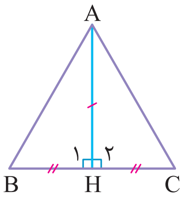
$$(\hat{A}_1=\hat{A}_2\ ,\ AH=AH,\hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ)$$

$$\xrightarrow{(\text{ز ض ز})}\overset{\Delta}{ABH}\cong\overset{\Delta}{ACH}\Rightarrow AB=AC$$

پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

۳۴ | **فرض:** $BH=CH$ و $AH\perp BC$

حکم: $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی‌الساقین است.



$$(AH=AH,\hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ\ ,BH=CH)$$

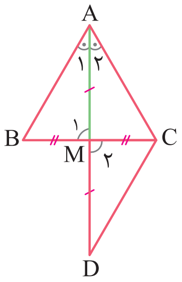
$$\xrightarrow{(\text{ض ز ض})}\overset{\Delta}{ABH}\cong\overset{\Delta}{ACH}\Rightarrow\hat{B}=\hat{C}$$

پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

۳۵ | **فرض:** AM نیمساز $\hat{A}$ و $BM=CM$

حکم: $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی‌الساقین است.

میانهٔ AM را به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ D امتداد می‌دهیم، داریم:



$$(BM=CM\ ,\ \hat{M}_1=\hat{M}_2\ ,\ AM=DM)$$

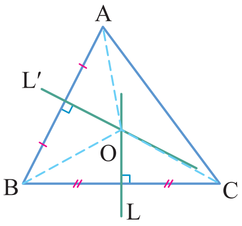
$$\xrightarrow{(\text{ض ز ض})}\overset{\Delta}{ABM}\cong\overset{\Delta}{DCM}\Rightarrow\left\{\begin{array}{ll}AB=CD & (1)\\ \hat{D}=\hat{A}_1\end{array}\right.$$

$$\hat{D}=\hat{A}_1\xrightarrow{\hat{A}_1=\hat{A}_2}\hat{D}=\hat{A}_2\Rightarrow AC=CD\quad(2)$$

$(1),(2)\Rightarrow AB=AC\Rightarrow$ متساوی‌الساقین است $\overset{\Delta}{ABC}$

۳۶ | **فرض:** $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث دلخواه

حکم: عمودمنصف اضلاع AB، AC و BC همرسند.



نقطهٔ تلاقی عمودمنصف اضلاع BC و AB (خط‌های L و L′) را O می‌نامیم و O را به رأس‌های مثلث وصل می‌کنیم.

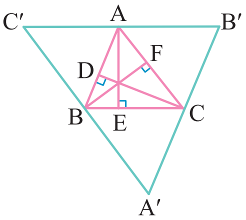
$$\left.\begin{array}{l}O\in L\Rightarrow OB=OC\\ O\in L'\Rightarrow OB=OA\end{array}\right\}\Rightarrow OA=OC$$

و این یعنی نقطهٔ O از دو سر پاره‌خط AC به یک فاصله است، پس O روی عمودمنصف ضلع AC قرار دارد و این یعنی سه عمودمنصف اضلاع مثلث ABC در نقطهٔ O همرسند.

۳۷ | **فرض:** $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث دلخواه

حکم: ارتفاع‌های وارد بر اضلاع AB، AC و BC همرسند.

مطابق شکل AE، BF و CD، سه ارتفاع مثلث ABC هستند.



از رأس‌های مثلث ABC خط‌هایی موازی اضلاع مقابل آن رأس‌ها رسم می‌کنیم تا مثلث $A'B'C'$ پدید آید، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AB' \parallel BC \text{ ,مورب } AC \Rightarrow B\hat{C}A = B'\hat{A}C \\ AC = CA \\ AB \parallel B'C \text{ ,مورب } AC \Rightarrow B\hat{A}C = B'\hat{C}A \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{(\text{ز ض ز})} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{CB'A} \Rightarrow AB' = BC$$

با استدلال مشابه دو مثلث ABC و BAC' نیز به حالت (زض‌ز) هم‌نهشت‌اند؛ پس $AC' = BC$ و در نتیجه $AC' = BC = AB'$ و این یعنی A وسط $B'C'$ است.

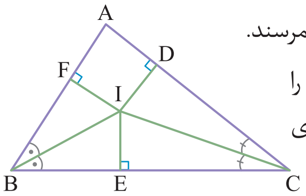
$$B'C' \parallel BC \quad , \quad AE \perp BC \Rightarrow AE \perp B'C'$$

بنابراین AE عمودمنصف $B'C'$ است. با استدلال مشابه نتیجه می‌شود BF عمودمنصف $A'C'$ و CD عمودمنصف $A'B'$ است. از طرفی عمودمنصف اضلاع مثلث $A'B'C'$ همرسند، پس ارتفاع‌های مثلث ABC نیز همرسند.

---

۳۸ فرض: $\overset{\Delta}{ABC}$ دلخواه

حکم: نیمساز زوایای $\hat{A}$، $\hat{B}$ و $\hat{C}$، همرسند.



نقطهٔ تلاقی نیمسازهای زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را I می‌نامیم. از I بر اضلاع مثلث، عمودهای IE، IF و ID را رسم می‌کنیم، داریم:

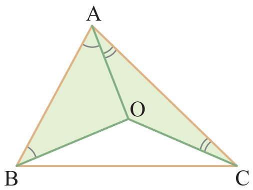
$$\left.\begin{array}{l} \text{روی نیمساز زاویهٔ } \hat{B} \; I \Rightarrow IE = IF \\ \text{روی نیمساز زاویهٔ } \hat{C} \; I \Rightarrow IE = ID \end{array}\right\} \Rightarrow IF = ID$$

و این یعنی نقطهٔ I از دو ضلع زاویهٔ A نیز به یک فاصله است، پس I روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد، یعنی سه نیمساز زوایای داخلی مثلث ABC همرسند.

---

۳۹ فرض: O، نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث ABC داخل آن است.

حکم: $B\hat{O}C = ۲\hat{A}$



O را به A وصل می‌کنیم. چون نقطهٔ O همرسی عمودمنصف‌های مثلث ABC است، پس $OA=OB=OC$ است، در نتیجه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} OA = OB \Rightarrow O\hat{B}A = O\hat{A}B \\ OA = OC \Rightarrow O\hat{C}A = O\hat{A}C \end{array}\right\}$$

$$\overset{+}{\Rightarrow} O\hat{B}A + O\hat{C}A = O\hat{A}B + O\hat{A}C = \hat{A}$$

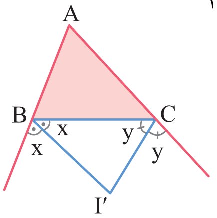
اما در چهارضلعی مقعر ABOC داریم:

$$B\hat{O}C = O\hat{B}A + \hat{A} + O\hat{C}A = \underbrace{O\hat{B}A + O\hat{C}A}_{\hat{A}} + \hat{A} = ۲\hat{A}$$

---

۴۰ فرض: BI' و CI' نیمسازهای خارجی زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ در مثلث ABC

حکم: $B\hat{I'}C = ۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲}$



مطابق شکل داریم:

$$۲x = ۱۸۰^\circ - \hat{B} \Rightarrow x = ۹۰^\circ - \frac{\hat{B}}{۲}$$

$$۲y = ۱۸۰^\circ - \hat{C} \Rightarrow y = ۹۰^\circ - \frac{\hat{C}}{۲}$$

در مثلث $BI'C$ داریم:

$$x + y + B\hat{I'}C = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۹۰^\circ - \frac{\hat{B}}{۲} + ۹۰^\circ - \frac{\hat{C}}{۲} + B\hat{I'}C = ۱۸۰^\circ$$

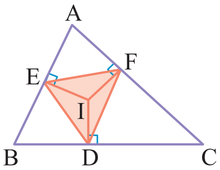
$$\Rightarrow B\hat{I'}C = \frac{\hat{B}+\hat{C}}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ - \hat{A}}{۲} = ۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲}$$

---

۴۱ فرض: I نقطهٔ همرسی نیمسازهای مثلث ABC و IE، ID و IF عمود بر اضلاع

حکم: I نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های $\overset{\Delta}{DEF}$

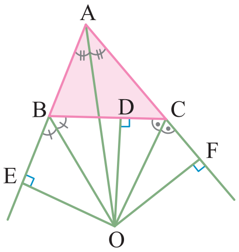
می‌دانیم I از اضلاع ABC به یک فاصله است؛ پس $IE = IF = ID$ که نتیجه می‌دهد نقطهٔ I در مثلث EFD از سه رأس آن به یک فاصله است، لذا نقطهٔ I همرسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث DEF است.



---

۴۲ فرض: نیمساز زاویهٔ داخلی $\hat{A}$، نیمساز زاویهٔ خارجی $\hat{B}$ و نیمساز زاویهٔ خارجی $\hat{C}$ در مثلث ABC را رسم می‌کنیم.

حکم: سه نیمساز فوق همرسند.



نقطهٔ تلاقی نیمسازهای زوایای خارجی B و C در مثلث ABC را O می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم نیمساز زاویهٔ A هم از O می‌گذرد. به همین جهت از O بر ضلع BC و امتداد اضلاع AB و AC عمود می‌کنیم. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \text{روی نیمساز زاویهٔ خارجی } \hat{B} \; O \Rightarrow OE = OD \\ \text{روی نیمساز زاویهٔ خارجی } \hat{C} \; O \Rightarrow OF = OD \end{array}\right\} \Rightarrow OE = OF$$

و این یعنی نقطهٔ O از اضلاع زاویهٔ A به یک فاصله است، پس O روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد.

---

۴۳ فرض: EH، عمودمنصف AB و MF، عمودمنصف AC در مثلث ABC و O نقطهٔ تلاقی آن‌ها است.

حکم: O، نقطهٔ همرسی نیمسازهای زوایای مثلث $\overset{\Delta}{AEF}$ است.

در مثلث حاده‌الزوایای ABC، O نقطهٔ تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع AB و AC، همان نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها می‌باشد. EH عمودمنصف AB است، پس مثلث AEB متساوی‌الساقین است $(AE = BE)$، بنابراین EH نیمساز زاویهٔ AEF است.

ویرایش جدید

منطبق بر «استانداردهای جدید»

گاج

پاسخ تمرین‌های کتاب درسی

هندسه ۱

فرمول بیست

هدیه رایگان

فرمول بیست

در این کتابچه،
«تمرین‌های» کتاب درسی
را به طور کامل پاسخ
داده‌ایم.
از آن‌جایی که تقریباً
بیش از نیمی از سؤالات
امتحانات نهایی مشابه
تمرینات کتاب درسی
طراحی می‌شوند مرور
مطالب این کتابچه در
شب امتحان به شما کمک
می‌کند تا با آمادگی کامل
سر جلسه امتحان حاضر
شوید.

تهران، میدان انقلاب
نبش بازارچه کتاب
www.gajmarket.com

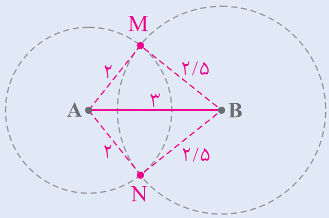
فهرست

فصل ۱
ترسیم‌های هندسی و استدلال

درس ۱ ترسیم‌های هندسی

کاردرکلاس | ص ۱۱ کتاب درسی

۱ دو نقطه مانند A و B را به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از هم در نظر بگیرید. نقاطی را بیابید که فاصله‌شان از A، ۲ و از B، ۲/۵ سانتی‌متر باشد.

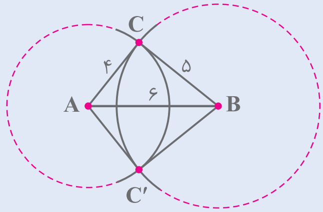


همهٔ نقاطی که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر باشند، روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۲ سانتی‌متر قرار دارند. همچنین همهٔ نقاطی که از نقطهٔ B به فاصلهٔ ۲/۵ سانتی‌متر باشند، روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۲/۵ سانتی‌متر قرار دارند.

پس جواب مسئله، محل برخورد این دو دایره است. از آنجا که مجموع شعاع‌های دو دایره (یعنی ۴/۵) از فاصلهٔ A و B (یعنی ۳) بزرگ‌تر است، (چون $|۲/۵-۲| < AB < ۲/۵+۲$) دایره‌ها در دو نقطهٔ M و N متقاطع‌اند و مسئله دو جواب دارد.

$MA = ۲cm \,,\, MB = ۲/۵cm \qquad NA = ۲cm \,,\, NB = ۲/۵cm$

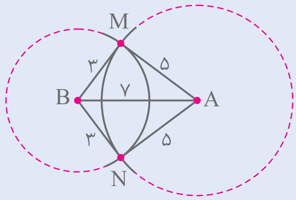
۲ توضیح دهید که چگونه می‌توان مثلثی به طول اضلاع ۴و ۵ و ۶ واحد رسم کرد.



ابتدا پاره‌خطی به طول ۶ واحد رسم می‌کنیم؛ سپس به مرکز A دایره‌ای به شعاع ۴ واحد و همچنین دایرهٔ دیگری به مرکز B و شعاع ۵ واحد رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو دایره، رأس سوم مثلث است.

۳ نقاط A و B به فاصلهٔ ۷ سانتی‌متر از هم قرار دارند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطهٔ A برابر .... و از نقطهٔ B برابر .... باشد. جاهای خالی را به گونه‌ای کامل کنید که مسئلهٔ زیر :

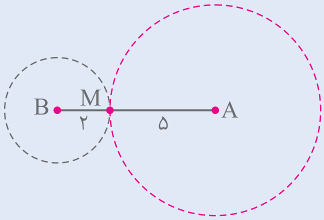
الف) دو جواب داشته باشد.



نقاط A و B به فاصلهٔ ۷ سانتی‌متر از هم قرار دارند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطهٔ A برابر ۵cm و از نقطهٔ B برابر ۳cm باشد.

دو دایره به مرکزهای A و B و به شعاع‌های ۵ و ۳ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. از آنجا که ۷ > ۳ + ۵ ، این دو دایره در دو نقطه متقاطع‌اند(M وN) و مسئله دو جواب دارد.

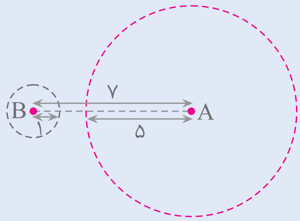
ب) یک جواب داشته باشد.



نقاط A و B به فاصلهٔ ۷ سانتی‌متر از هم قرار دارند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطهٔ A برابر ۵cm و از نقطهٔ B برابر ۲cm باشد.

دو دایره به مرکزهای A و B و به شعاع‌های ۵ و ۲ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. از آنجا که ۷ = ۲ + ۵ ، این دو دایره مماس‌اند و مسئله یک جواب دارد (نقطهٔ M).

پ) جواب نداشته باشد.



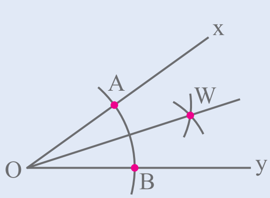
نقاط A و B به فاصلهٔ ۷ سانتی‌متر از هم قرار دارند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطهٔ A برابر ۵cm و از نقطهٔ B برابر ۱cm باشد.

دو دایره به مرکزهای A و B و به شعاع‌های ۵ و ۱ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. از آنجا که ۷ > ۱ + ۵ ، این دو دایره یکدیگر را قطع نمی‌کنند و مسئله جواب ندارد.

برای هر قسمت از این سؤال می‌توان بی‌شمار جواب یافت و عددهای ارائه‌شده فقط یک نمونه از جواب‌ها هستند.

کاردرکلاس | ص ۱۲ کتاب درسی

روش رسم نیمساز یک زاویه را توضیح دهید.

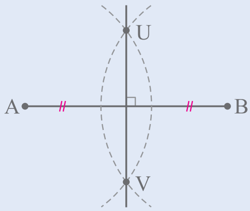


زاویهٔ xOy مفروض است. کمانی دلخواه به مرکز O رسم می‌کنیم تا اضلاع زاویه را در نقطه‌های A و B قطع کند. سپس دهانهٔ پرگار را به اندازه‌ای بیشتر از نصف فاصلهٔ A تا B باز کرده و به مرکزهای A و B دو کمان می‌زنیم تا یکدیگر را در W قطع کنند.

OW نیمساز $x\hat{O}y$ است.

کاردرکلاس | ص ۱۴ کتاب درسی

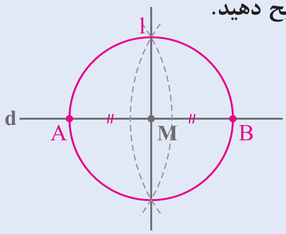
مراحل رسم عمودمنصف یک پاره‌خط را توضیح دهید.



پاره‌خط AB مفروض است. دهانهٔ پرگار را بیشتر از نصف AB باز کرده و به مرکزهای A و B دو کمان می‌زنیم تا یکدیگر را در نقاط U و V قطع کنند. خط گذرنده از U و V، عمودمنصف پاره‌خط AB است.

کاردرکلاس | ص ۱۴ کتاب درسی

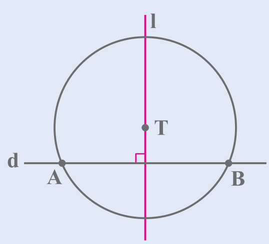
مراحل رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی آن را توضیح دهید.



خط d و نقطهٔ M روی آن مفروض است. به مرکز M و شعاع دلخواه دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند. خط l عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم. خط l بر خط d عمود است و از نقطهٔ M می‌گذرد.

کاردرکلاس | ص ۱۵ کتاب درسی

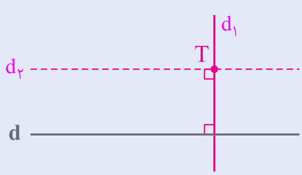
روش رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای غیر واقع بر آن را توضیح دهید.



نقطهٔ T خارج خط d مفروض است. به مرکز T و شعاعی بیشتر از فاصلهٔ T تا خط d، دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در A و B قطع کند. خط l عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم. در این‌صورت، خط l از نقطهٔ T می‌گذرد و بر خط d عمود است.

کاردرکلاس | ص ۱۵ کتاب درسی

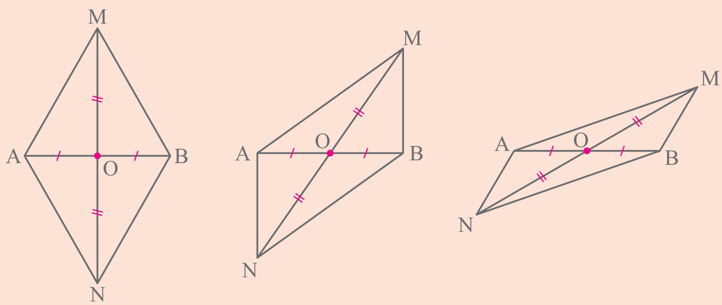
روش رسم خط موازی با یک خط از نقطه‌ای غیرواقع بر آن را توضیح دهید.



نقطهٔ T خارج خط d مفروض است. از نقطهٔ T خط d_1 را بر خط d عمود رسم می‌کنیم؛ سپس از نقطهٔ T خط d_2 را بر خط d_1 عمود می‌کنیم. از آنجا که دو خط d و d_2 بر خط d_1 عمودند، با هم موازی‌اند. پس خط d_2 از نقطهٔ T می‌گذرد و با خط d موازی است.

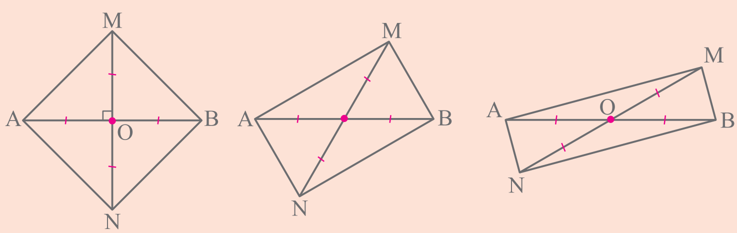
۱ فرض کنیم هر چهارضلعی که قطرهایش منصف هم باشند، متوازی‌الاضلاع است. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۷ باشد. چند متوازی‌الاضلاع به طول قطرهای ۴ و ۷ می‌توان رسم کرد؟

ابتدا پاره‌خط AB به طول ۴ را رسم کرده و وسط آن را O می‌نامیم. حال پاره‌خط MN به طول ۷ را از نقطهٔ O چنان رسم می‌کنیم که نقطهٔ O وسط آن باشد. چهارضلعی AMBN متوازی‌الاضلاع مورد نظر است. از آنجا که زاویهٔ بین دو قطر یا اطلاعات دیگری از این متوازی‌الاضلاع داده نشده است، این مسئله بی‌شمار جواب دارد (مانند شکل‌های زیر).



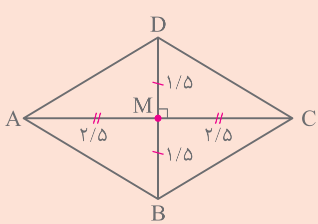
۲ فرض کنیم هر چهارضلعی که قطرهایش با هم برابر و منصف هم باشند، مستطیل است. مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۶ سانتی‌متر باشد.

ابتدا پاره‌خط AB به طول ۶ را رسم کرده و وسط آن را O می‌نامیم. سپس پاره‌خط MN به طول ۶ را چنان رسم می‌کنیم که نقطهٔ O وسط آن باشد. طبق فرض، چهارضلعی AMBN مستطیلی به قطر ۶ است. از آنجا که زاویهٔ بین قطرها یا اطلاعات دیگری از این مستطیل داده نشده است، این مسئله بی‌شمار جواب دارد (مانند شکل‌های زیر).

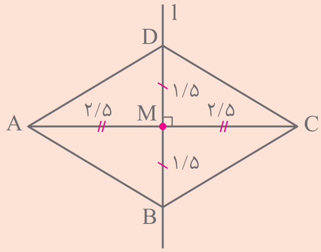


۳ فرض کنیم که برای لوزی بودن یک چهارضلعی کافی است که قطرهای آن چهارضلعی عمودمنصف یکدیگر باشند. ترسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۵ باشد.

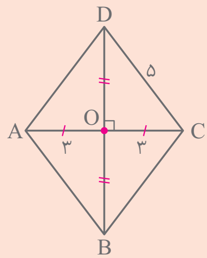


ابتدا فرض می‌کنیم مسئله حل شده است و شکل آن را رسم می‌کنیم:

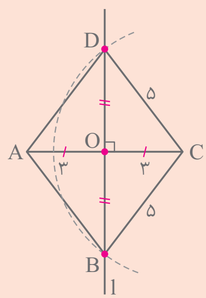


با توجه به شکل، روش رسم به‌صورت زیر است:
ابتدا پاره خط AC به طول ۵ سانتی‌متر و سپس خط l عمودمنصف AC را رسم می‌کنیم و وسط AC را M می‌نامیم. حال روی خط l، دو پاره‌خط MB و MD را به طول ۱/۵ سانتی‌متر در طرفین نقطهٔ M جدا می‌کنیم. قطرهای چهارضلعی ABCD عمودمنصف یکدیگرند؛ پس این چهارضلعی، یک لوزی به قطرهای ۳ و ۵ است.

ب) یک لوزی به طول ضلع ۵ و طول قطر ۶ رسم کنید.



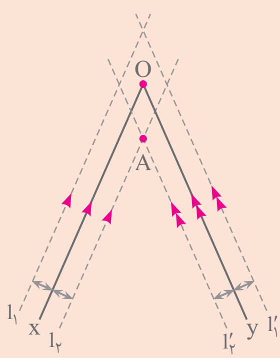
ابتدا فرض می‌کنیم مسئله حل شده است و شکل آن را رسم می‌کنیم.
با توجه به شکل، روش رسم به صورت زیر است:



ابتدا پاره‌خط AC به طول ۶ واحد و خط l عمودمنصف AC را رسم می‌کنیم. حال، به مرکز C و شعاع ۵ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط l را در B و D قطع کند. از آنجا که قطرهای این چهارضلعی عمودمنصف یکدیگرند، این چهارضلعی یک لوزی به ضلع ۵ و طول قطر ۶ است.

۴ دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید.

الف) نقطه‌ای بیابید که فاصلهٔ آن از هر ضلع زاویهٔ مورد نظر ۲ واحد باشد.



نقاطی که از Ox به فاصلهٔ ۲ واحد باشند، روی دو خط l_1 و l_2 به موازات Ox و به فاصلهٔ ۲ واحد از آن قرار دارند. به همین ترتیب، نقاطی که از Oy به فاصلهٔ ۲ واحد باشند روی دو خط l'_1 و l'_2 به موازات Oy و به فاصلهٔ ۲ واحد از آن قرار دارند. پس نقاط موردنظر، محل برخورد خط‌های l_1 و l_2 با l'_1 و l'_2 هستند.